

Mancomunitat de Catalunya

EXTENSIO  
D'ENSENYAMENT  
T E C N I C



TEXT N.º 8

ALGEBRA

PART II

Carrer d'Urgell 187 Barcelona



# ÀLGEBRA

## 2.<sup>a</sup> PART

### EXPRESSIONS ALGÈBRIQUES

1) Una expressió algèbrica és una combinació de valors enllaçades per signes que indiquen les operacions que hi cal efectuar.

Així,

$$(a+b)c, a^2-b^2, \frac{4a^3+56^4+3c^2}{bx^2+y}, a^2+b^2-\sqrt{bc}-\frac{a-b}{c},$$

són expressions algèbriques.

2) Termes d'una expressió algèbrica són les seves parts enllaçades pels signes + o -. Així, l'expressió  $a^2+b^2-2ab$ , té tres termes  $a^2$ ,  $b^2$  i  $2ab$ .

3) En un terme algèbric poden figurar a la vegada números i lletres; aquestes constitueixen la *part literal* del terme. Així, en el terme  $2ab$ ,  $ab$  és la part literal.

4) En una expressió, com per exemple

$$x^2-4x+\frac{a}{b}xy+7abx-(a+5b)y$$

en què les valors de les incògnites són representades per les lletres  $x$  i  $y$ , les quantitats  $-4$ ,  $+\frac{a}{b}$ ,  $+7ab$ , i  $-(a+5b)$  que les multipliquen, són anomenades *coeficients*.

Com veiem, els coeficients poden ésser numèrics o literals, i poden constar d'un terme o de més.

Quan no hi ha escrit coeficient numèric, se suposa que aquest és la unitat. Així, el coeficient del terme  $x^2$  és 1, tota vegada que  $x^2=1 \times x^2$ .

5) La valor numèrica d'una expressió algèbrica, és la que resulta d'efectuar les operacions indicades, després d'haver substituït les lletres per les valors que els corresponen en el problema de què es tracta.



Així, en l'expressió algèbrica  $c = v \times t$  (1)

si  $v = 80$  quilòmetres per hora i  $t = 5$  hores.

$c = v \times t = 80 \times 5 = 200$  quilòmetres, essent 200 la valor numèrica d'aquesta expressió.

Altre exemple:

$$\frac{4a^3 + 5b^4 + 3c^2}{a^2 + b^2} \quad \text{si} \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

substituint les lletres per les seves valors tindrem

$$\frac{4(-2)^3 + 5 \times 1^4 + 3 \times 2^2}{(-2)^2 + 1^2} = \frac{-32 + 5 + 12}{4 + 1} = \frac{-15}{5} = -3$$

per tant la valor numèrica de la expressió proposta és  $-3$ .

6) En tota fórmula un dels membres és una expressió algèbrica i l'altre és la incògnita. Per trobar la valor de la incògnita havem de calcular la valor numèrica de l'expressió algèbrica.

Així, la fórmula  $V = RI$ ,

que ens expressa que la diferència de potencial  $V$  d'un corrent elèctric és igual al producte de la intensitat  $I$  del corrent que circula per un conductor per la resistència  $R$  del dit conductor.  $RI$  és una expressió algèbrica la valor numèrica de la qual ens dona a conèixer la diferència de potencial que existeix entre els extrems del dit conductor.

Si en un cas particular tenim un conductor d'una resistència de 50 ohms, i pel qual circula un corrent de 4 ampers i desitgem conèixer la diferència de potencials entre sos extrems, direm:

$$R = 50 \quad I = 4$$

aleshores:

$$V = RI = 50 \times 4 = 200 \text{ volts}$$

#### EXERCICIS PER A PRÀCTIQUES

Quines valors numèriques prenen les següents expressions algèbriques?

1.  $(a+b)(a-b)$  si  $a = 5$  i  $b = 4$  Solució 9
2.  $a^2 + 2ab + b^2$  si  $a = 5$  i  $b = 7$  » 144
3.  $SHa10^{-8}$  si  $S = 100$ ,  $H = 0,2$ ,  $a = 125$  Solució 0,000025
4.  $[(x+1)y - (x-1)]^2$  si  $x = \frac{3}{2}$  i  $y = \frac{2}{3}$  Solució  $\frac{49}{36}$

Per a  $x=8$  i  $y=6$  cerqueu la valor numèrica de

5.  $(x+y)(x-y) - \sqrt{\frac{x+y^2}{11}}$  Solució 26

6.  $\sqrt{(x+y)^2(x^2+y)} + 0,25 - (x-y)(\sqrt[3]{x+y})$  » 39,5

7.  $\frac{x^2y^2}{x+y} + \frac{x^2y(x+y^2)}{\sqrt{3xy}}$  Solució 1572,571

7) Una expressió algebàrica és RACIONAL quan no conté indicació de cap mena d'extracció d'arrels que AFECTI UNA PART LITERAL. En cas contrari, és *irracional*.

Així, l'expressió:

$$\frac{3a^2b}{d} + \frac{\sqrt{4a^2}}{c} - \frac{8ab}{\sqrt{7dc}}$$

serà racional perquè les arrels no afecten la part literal.

Al contrari, serà irracional l'expressió

$$\frac{a^2-b^2}{4} + \frac{c^2q}{h} - \frac{\sqrt{x}}{g}$$

perquè l'arrel afecta la part literal.

8) MONOMI és una expressió algebàrica que es compon d'un sol terme, com  $4abc$ ;  $2ax^3$ ;  $-\frac{5a^2bc}{vd}$ .

9) Els monomis poden ésser enters o fraccionaris. Direm que un monomi és enter quan no conté cap factor literal formant part d'un denominador. Així, els monomis  $a^2b^2c^3$ ;  $5a^7b$ ;  $\frac{xy}{5}$  són enters i  $\frac{4x^2}{c}$ ;  $a^2b^{-2}$ ;  $\frac{7x^3y}{4b}$  són monomis fraccionaris.

10) Sovint, és possible REDUIR un monomi a una forma més senzilla. Per a això efectuarem les operacions indicades amb els factors numèrics si n'hi ha diversos, i obtindrem el COEFICIENT numèric del monomi. Escrivim primer el coeficient resultant i agruparem les potències d'una mateixa lletra substituint-les per llur producte. Aquest serà una potència de la mateixa lletra. Així, el monomi

$$\frac{(-5)ab^2(-4)c^3 \cdot 2 \cdot a^2b^3}{c^2} = (-5)(-4) \cdot 2 \cdot aa^2b^2b^3 \frac{c^3}{c^2} = 40a^3b^5c$$

11) GRAU d'un monomi enter respecte a una de ses lletres és l'EXPO-  
NENT amb què aquesta lletra figura en el MONOMI REDUÏT.

Així,  $-5ab^2c^4$

és de *primer grau* en relació de  $a$ , de *segon grau* en relació de  $b$  i de *quart grau* en relació de  $c$ .

El GRAU d'un monomi enter respecte de diverses lletres que hi figuren és la suma dels GRAUS en relació de les dites lletres. Així, el monomi anterior és de tercer grau en relació de  $ab$  i de setè grau respecte de  $abc$ .

12) BINOMI és una expressió que es compon de dos termes, com  $a^2+b^2$ ;  $a^2-b^2$ ;  $2a+5b$ .

13) TRINOMI és una expressió que consta de tres termes, com  $a^2+b^2-2ab$ .

14) POLINOMI (1) és una expressió que es compon de més de dos termes. Aquest nom és aplicat generalment a una expressió que consta de quatre o més termes. L'expressió

$$ab^3 - 3abc + 7a^2bc^3 - ac^2$$

és un polinomi de quatre termes.

El polinomi serà *enter* si tots els termes són enters.

15) TERMES SEMBLANTS són aquells que difereixen tan sols en sos coeficients numèrics. Tots els altres són termes diferents. Així,  $3ac$  i  $5ac$  són termes semblants;  $3ac$  i  $5a^2c$  són termes diferents.

16) Diem que el polinomi  $x+bx^2+cx^3+dx^4-fx^5$  és ordenat segons les potències *creixents* o *ascendents* de  $x$  perquè sos exponents van creixent d'esquerra a dreta. El polinomi

$$-fx^5+dx^4+cx^3+bx^2+x$$

és ordenat segons les potències *decreixents* de  $x$ , ja que sos exponents disminueixen successivament d'esquerra a dreta.

17) L'ordenació dels termes d'un polinomi no altera la seva valor. Així,  $x^2+2xy+y^2$  té la mateixa valor que  $2xy+x^2+y^2$ .

18) El GRAU d'un polinomi ordenat segons les potències d'una lletra  $x$ , és el major exponent amb què la lletra  $x$  figura en dit polinomi. Així, el polinomi  $x+bx^2+cx^3+dx^4-fx^5$  serà de quint grau.

Si un polinomi, tal com  $a^3+3a^2b+ab^2+b^3$ , és del mateix grau respecte de dues lletres  $a$  i  $b$  i resulta ordenat segons les potències creixents de l'una

(1) Les paraules *monomi*, *binomi*, *trinomi* i *polinomi*, deriven respectivament de les paraules gregues *monos*, *bis*, *tris*, *polis*, que signifiquen *u*, *dos*, *tres*, *molts* i *nomios* que vol dir *partició*.

d'elles i decreixents de l'altra, cada terme serà del mateix grau respecte de les dites lletres  $a$  i  $b$ . Aquest polinomi serà *homogeni* respecte de les dites lletres.

19) Un polinomi ordenat segons les potències d'una lletra serà *complet* quan contingui totes les potències de la dita lletra des del grau més elevat fins al grau zero (terme constant).

Així, el polinomi

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 5$$

serà complet, ja que el terme 5 pot ésser considerat igual a  $5x^0$  (segons ja havem dit, Quadern 1, n.º 38, tota quantitat elevada a zero és igual a la unitat.)

Els polinomis

$$x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 4x; \quad x^4 + 5x^2 - 4x - 5,$$

són *incomplets*; al primer li falta un terme que contingui  $x$ , i al segon, un terme en  $x^3$ .

## SUMA I RESTA DE MONOMIS I POLINOMIS

20) Per ésser els monomis quantitats algèbriques, les sumarem com havem indicat (Quadern 1, n.º 11), o sigui *col·locant les unes a continuació de les altres amb son signe propi*. Així, la suma dels monomis  $7a^3$ ,  $-5b^3$ ,  $8ab^2$ ,  $4a^2b$ ,  $-3ab^2$ ,  $-7$ ,  $4$ , serà el polinomi

$$7a^3 - 5b^3 + 8ab^2 + 4a^2b - 3ab^2 - 7 + 4$$

21) El polinomi resultant pot ésser simplificat i ordenat.

Per obtenir sa simplificació cal operar de la manera següent:

1.<sup>er</sup> Agruparem els termes representats per guarismes i els substituïm per la llur suma algèbrica efectuada. Així, en el polinomi anterior  $-7 + 4 = -3$ .

2.<sup>on</sup> Reduirem els termes semblants. *Per a això agruparem els termes semblants que hi hagi i separarem com a factor comú la seva part literal*. (Quadern I, n.º 20.) En el polinomi anterior agruparem els termes semblants  $8ab^2$  i  $-3ab^2$  i separarem  $ab^2$  factor comú:

$$8ab^2 - 3ab^2 = (8 - 3)ab^2 = 5ab^2$$

El polinomi reduït serà:

$$7a^3 - 5b^3 + 5ab^2 + 4a^2b - 3$$

i, ordenant-lo segons les potències decreixents de  $a$ ,

$$\text{tindrem} \quad 7a^3 + 4a^2b + 5ab^2 - 5b^3 - 3$$

que serà la suma demanada.

Exemple 1.<sup>er</sup> Sumar els monomis  $-abxy$ ,  $-2abxy$ ,  $-3abxy$  i  $-6abxy$ .

Com que tots els monomis són semblants, sumarem els coeficients  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ ,  $-6$ , i la seva suma,  $-12$ , multiplicarà la part literal comuna  $abxy$ , i la suma cercada serà

$$-12abxy$$

Exemple 2.<sup>on</sup> Sumar els monomis  $xy^2$ ,  $-2xy^2$ ,  $8xy^2$  i  $-4xy^2$ .

Sumarem algebricament els coeficients  $+1$ ,  $-2$ ,  $+8$ ,  $-4$  i el resultat  $+3$  el multiplicarem per la part literal comuna  $xy^2$ :

$$3xy^2$$

Exemple 3.<sup>er</sup> Sumar els monomis  $2x^2$ ,  $3xy$ ,  $-x^2$ ,  $8y^2$ ,  $-5xy$  i  $-7y^2$ . Simplificarem els termes semblants:

$$2x^2 - x^2 = x^2; \quad 8y^2 - 7y^2 = y^2; \quad 3xy - 5xy = -2xy$$

i ordenant el polinomi resultant obtindrem la suma demanada

$$x^2 - 2xy + y^2$$

22) Per restar un monomi d'un altre, canviarem el signe al subtrahend i després els sumarem (Quadern I, n.º 12). Així, per restar  $5cd$  de  $-4cd$ , canviem el signe de  $5cd$  i l'afegim a  $-4cd$ :

$$-4cd - 5cd = -9cd$$

Exemple 1.<sup>er</sup> Restar  $-11a$  de  $17a$ .

Canviarem el signe de  $(-11a)$  i l'afegirem a  $17a$

$$17a + 11a = 28a$$

Exemple 2.<sup>on</sup> Restar  $-10b^2$  de  $-10b^2$ .

$$\text{Solució} \quad -10b^2 + 10b^2 = 0$$

EXERCICIS PER A PRÀCTIQUES

Efectuar les sumes:

1.  $(-6a^2) + (2a^2) + (-5a^2) + (4a^2) + (-3a^2) + a^2$  Solució  $-7a^2$
2.  $(2a^2b) + (-a^2b) + (11a^2b) + (-5a^2b) + (-9a^2b)$  »  $= -2a^2b$
3.  $(7y^2) + (6xy) + (-y^2) + (-5y^2) + (-4xy) + (7x^2)$  »  $y^2 + 9xy + 7x^2$
4.  $(a^2bc) + (-2ab^2c) + (3abc^2) + (-4a^2bc) + (5ab^2c)$

Solució  $3(ab^2c - a^2bc + abc^2)$

Reduir els polinomis

5.  $a^3 + 2a^2 - 3a + 1 - 2 + 4a + 2a^3 - 3a^2 + 4a^3 - 9 - 5a$

Solució  $7a^3 - a^2 - 4a - 10$

6.  $x^3y^2 - 5x^2y^3 + 2x^5 - y^5 - 8x^2y^3 + x^3y^2 - 2x^4y - xy^4 + 8y^5$

Solució  $2x^5 - 2x^4y + 2x^3y^2 - 13x^2y^3 - xy^4 + 7y^5$

7. De  $-6x$  restar  $-6x$  Solució 0
8. De  $-10xy$  restar  $12xy$  »  $-22xy$
9. De  $a^2bc$  restar  $5a^2bc$  »  $-4a^2bc$

23) Per sumar polinomis, els reduïrem prèviament i els ordenarem tots en un mateix sentit segons les potències d'una mateixa lletra; després els escriurem els uns sota dels altres, de manera que els termes semblants es corresponguin segons una columna i efectuarem la suma dels termes de cada columna.

Quan els polinomis no són complets espaiarem els termes convenientment, per a marcar els llocs dels termes que faltin en el polinomi en qüestió i que poden existir en els altres.

Exemple 1.<sup>er</sup> Sumar els polinomis  $5a^2 + 6ac - 3b^2 - 2xy$ ;  $7ac - 3a^2 + 4b^2 + 3xy$ . i  $4xy - 5b^2 + 8ac - a^2$ .

Col·locarem els termes semblants en una mateixa columna

$$\begin{array}{r}
 5a^2 + 6ac - 3b^2 - 2xy \\
 -3a^2 + 7ac + 4b^2 + 3xy \\
 -a^2 + 8ac - 5b^2 + 4xy \\
 \hline
 \text{Suma} \quad a^2 + 21ac - 4b^2 + 5xy
 \end{array}$$

Exemple 2.<sup>on</sup> Sumar els polinomis  $x + x^2 - 1$ ;  $x^3 - x + 4x^3 - 3$ ; i  $x - 4$ .

Ordenant-los i col·locant-los com en el problema anterior:

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 1 \\ x^3 + 4x^2 - x - 3 \\ \hline x - 4 \\ \hline \text{Suma} \quad x^3 + 5x^2 + x - 8 \end{array}$$

Exemple 3.<sup>er</sup> Sumar els polinomis

$$x^4 + 2x^2y^2 - 3x^3y + y^4; \quad x^4 - y^4; \quad 6x^3y - 5xy^3; \quad \text{i} \quad 8x^2y^2 + 2y^4.$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^3y + 2x^2y^2 \quad + y^4 \\ x^4 \quad \quad \quad \quad \quad - y^4 \\ \quad 6x^3y \quad \quad \quad - 5xy^3 \\ \quad \quad 8x^2y^2 \quad \quad + 2y^4 \\ \hline \text{Suma} \quad 2x^4 + 3x^3y + 10x^2y^2 - 5xy^3 + 2y^4 \end{array}$$

24) Per restar un polinomi canviarem el signe al subtrahend i procedirem com en el cas de la suma.

Exemple 1.<sup>er</sup> Restar de  $3ac - 2b$  el trinomi  $ac - b - d$ .

$$\begin{array}{r} \text{Solució:} \quad 3ac - 2b \\ \quad \quad \quad - ac + b + d \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Diferència} \quad 2ac - b + d$$

Exemple 2.<sup>on</sup> Restar de  $x^4 - 3x^2 + x + 1$ , el polinomi  $x^4 - 2x^2 + y^4$ .

$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^2 + x + 1 \\ - x^4 + 2x^2 \quad \quad - y^4 \\ \hline \text{Diferència} \quad \quad - x^2 + x + 1 - y^4 \end{array}$$

Exemple 3.<sup>er</sup> Restar del monomi  $\frac{1}{2}x^3$ , el polinomi  $x^4 - 2x^3 + x - 5$ .

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x^3 \\ \hline - x^4 + 2x^3 - x + 5 \\ \hline \text{Diferència} \quad - x^4 + \frac{5}{2}x^3 - x + 5 \end{array}$$

## EXERCICIS PER A PRÀCTIQUES

Sumar els següents polinomis:

1.  $ax+2bx+4by-3ay$ ;  $2ax+bx+2ay-by$  i  $4ax+3by$

Solució  $7ax+3bx+6by-ay$

2.  $a-x+4y-3z+w$ ;  $z+3a-2x-y-w$  i  $x+y+z$

Solució  $4a-2x+4y-z$

3.  $\frac{20}{3}x^3y+4yx^2-5xy$ ;  $\frac{10}{3}y^3x-4x^2y$  i  $8xy-\frac{2}{3}x^3y-xy^3$

Solució  $6x^3y+3xy+\frac{7}{3}xy^3$

4. De  $3x^3+4x^2y-7xy^2+y^3-xy^3$  restar  $5x^3+x^2y-6xy^2+y^3$

Solució  $-2x^3+3x^2y-xy^2-xy^3$

Donats els polinomis

$$A = x^5 + x^3 - 8x^2 - 8$$

$$B = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$$

$$C = x^5 - 2x^4 + x - 2$$

$$D = x^3 - 4x^2 + 4x$$

efectuar les operacions següents:

5.  $A + B + C + D$   $2x^5 - x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 9x - 18$

6.  $A - B + C - D$   $2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 7x - 2$

7.  $D - A - B - C$   $-2x^5 + x^4 + 5x^3 - 2x^2 - x + 18$

8.  $B - C - D - A$   $-2x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 18x^2 - x + 2$

## PRODUCTE DE MONOMIS I POLINOMIS

25) La multiplicació de les expressions algèbriques comprèn dues operacions distintes, ço és: primera, cercar la valor absoluta del producte i segona, el signe que l'ha de precedir. La primera operació comprèn la multiplicació dels coeficients i la multiplicació de ses parts literals.

Multiplicar  $a$  per  $b$ ,  $a \times b = ab$  equival a dir que havem de repetir  $a$  com a sumand tantes vegades com indica  $b$ .

$$a \times b = a + a + a + a + \dots \dots \dots \text{(b, vegades)}$$

El producte  $ab \times c = abc$  ens indica que havem de multiplicar  $a$  per  $b$  i llur producte, multiplicar-lo per  $c$ .

26) L'ordre en què efectuem aquestes operacions és indiferent. El mateix resultat obtindrem multiplicant  $a \times b$  i després per  $c$ , que multiplicant  $a \times c$  i després per  $b$ .

Un esquema senzill ens justificarà el procediment:

	1/	2/	3/	4/	b/ vegades	
1)	$a$	$+ a$	$+ a$	$+ a$	$\dots\dots\dots + a$	$= ab$
2)	$a$	$+ a$	$+ a$	$+ a$	$\dots\dots\dots + a$	$= ab$
3)	$a$	$+ a$	$+ a$	$+ a$	$\dots\dots\dots + a$	$= ab$
	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots + a$	$= ab$
c) vegades	$a$	$+ a$	$+ a$	$+ a$	$\dots\dots\dots + a$	$= ab$
$ac + ac + ac + ac \dots\dots\dots + ac = acb$						

Si sumem per rengles, cada rengle conté el número  $a$  repetit  $b$  vegades com a sumand, igual per tant a  $ab$ , i com que hi ha  $c$  rengles, la suma total serà igual a  $ab \times c$ . Si sumem per columnes, cada columna conté el número  $a$  repetit  $c$  vegades, igual per tant a  $ac$ , i com que hi ha  $b$  columnes, la suma total serà igual a  $ac \times b$ . Això mostra que l'ordre dels factors no altera el producte.

27) El producte de  $a$  per  $a$  és  $a \times a = a^2$

El de  $a^2$  per  $a$  és  $a^2 \times a = a \times a \times a = a^3$

El de  $a^2$  per  $b$  és  $a^2 \times b = a^2b$

El de  $a^2b$  per  $bc$  és  $a^2b \times bc = a^2b^2c$

El de  $\frac{a^2}{b^2}$  per  $c$  és  $\frac{a^2}{b^2} c = a^2b^{-2}c$

El de  $\frac{a^2}{b^2}$  per  $bc$  és  $a^2b^{-2} \times bc = a^2b^{-1}c$

El de  $a^3b^{-2}$  per  $b^3c$  és  $a^3b^{-2} \times b^3c = a^3bc$

El de  $5a^2b^2$  per  $3ab^2$  és  $5a^2b^2 \times 3ab^2 = 5 \times 3 \times a^2 \times a \times b^2 \times b^2 = 15a^3b^4$

El de  $\frac{5ab^3}{c}$  per  $\frac{8ac^2}{b^4}$  és  $5ab^3c^{-1} \times 8ac^2b^{-4} = 5 \times 8 \times a \times a \times b^3b^{-4}c^{-1}c^2 = 40 \times a^2 \times b^{-1} \times c = 40a^2b^{-1}c$ .

28) Si multipliquem dos monomis obtindrem el signe del producte (Quadern I, n.ºs 15 i 16) en la forma següent: Si el multiplicador és positiu el producte serà del mateix signe que el multiplicand; i si és negatiu el producte tindrà el signe contrari al del multiplicand, això és:

$$\begin{aligned} (+a) \times (+b) &= +ab \\ (+a) \times (-b) &= -ab \\ (-a) \times (+b) &= -ab \\ (-a) \times (-b) &= +ab \end{aligned}$$

Si els factors tenen el mateix signe el producte serà positiu (casos 1 i 4), si els factors tenen signe contrari el producte serà negatiu (casos 2 i 3).

Si multipliquem tres o més monomis, el signe del producte serà *positiu* si tots els factors són positius o si el nombre de factors negatius és *parell*. Serà *negatiu* si el nombre de factors negatius és *imparell*.

29) Per multiplicar dos monomis seguirem les següents REGLES:

1.<sup>a</sup> EL COEFICIENT DEL PRODUCTE SERÀ EL PRODUCTE DELS COEFICIENTS DELS FACTORS.

2.<sup>a</sup> LA PART LITERAL DEL PRODUCTE SERÀ FORMADA PER LES DISTINTES LLETRES DELS FACTORS ELEVADA A UN EXPONENT IGUAL A LA *suma algebàrica* DELS EXPONENTS QUE TÉ CADA LLETRA EN ELS MONOMIS FACTORS.

3.<sup>a</sup> EL SIGNE DEL PRODUCTE SERÀ + O —, SEGONS QUE EL NOMBRE DE FACTORS NEGATIUS SIGUI PARELL O IMPARELL.

Exemple 1.<sup>er</sup> Multiplicar  $4a^2b$  per  $-5a^3bc$ .

El producte dels coeficients serà  $4 \times 5 = 20$ , i les lletres que formaran sa part literal seran  $a$ ,  $b$  i  $c$ . L'exponent de  $a$  serà  $2+3=5$ , el de  $b$  serà  $1+1=2$  i el de  $c$  la unitat. El signe del producte serà —, perquè sols hi ha un factor negatiu.

El producte demanat serà

$$4a^2b \times (-5a^3bc) = -20 a^5b^2c$$

Exemple 2.<sup>on</sup> Multiplicar els monomis

$$4x^3y^3z, \quad -3x^2yz^3 \quad \text{i} \quad -5xy^2t$$

El coeficient serà  $4 \times 3 \times 5 = 60$ ; la part literal  $x^{3+2+1} = x^6$ ,  $y^{3+1+2} = y^6$ ;  $z^{1+3} = z^4$  i  $t$ . El signe serà +, perquè consta d'un nombre parell de factors negatius.

El producte serà

$$(4x^3y^3z) (-3x^2yz^3) (-5xy^2t) = 60x^6y^6z^4t$$

Exemple 3.<sup>er</sup> Multiplicar  $-7a^2b^{-1}c$  per  $-7ab^5c^{-4}$  i per  $6a^{-4}b^{-2}c^2d$ .

$$\text{Solució: } (-7a^2b^{-1}c) \times (-7ab^5c^{-4}) \times (6a^{-4}b^{-2}c^2d) = 294a^{-1}b^2c^{-1}d$$

30) Per multiplicar un polinomi per un monomi:

ORDENAREM EL POLINOMI MULTIPLICAND SEGONS LES POTÈNCIES CREIXENTS O DECREIXENTS D'ALGUNA LLETRA I MULTIPLICAREM CADA TERME DEL MULTIPLICAND PEL MONOMI MULTIPLICADOR; LA SUMA ALGÈBRICA DELS PRODUCTES PARCIAIS OBTINGUTS AIXÍ, SERÀ EL PRODUCTE DEMANAT.

Exemple 1.<sup>er</sup> Multiplicar el polinomi

$$-3a^2b^2 - 3a^4b - b^4 + a^5 - 4ab^3 \quad \text{per} \quad -5b^2$$

Ordenem el polinomi segons les potències successives i decreixents de  $a$  i multipliquem:

$$\begin{array}{r} a^5 - 3a^4b + 3a^2b^2 - 4ab^3 - b^4 \\ - 5ab^2 \\ \hline - 5a^6b^2 + 15a^5b^3 - 15a^3b^4 + 20a^2b^5 + 5ab^6 \end{array}$$

Procedint en aquesta forma el polinomi producte resulta també ordenat.  
Exemple 2.<sup>on</sup> Multiplicar  $x^4 - x^2 + 2x + 7$  per  $2x^2$ .

$$\begin{array}{r} x^4 - x^2 + 2x + 7 \\ 2x^2 \\ \hline 2x^6 - 2x^4 + 4x^3 + 14x^2 \end{array}$$

31) Per multiplicar dos polinomis:

ORDENAREM ELS DOS POLINOMIS SEGONS LES POTÈNCIES D'UNA MATEIXA LLETRA (tots dos en el mateix sentit). ESCRIUREM EL POLINOMI MULTIPLICADOR DESSOTA DEL MULTIPLICAND I MULTIPLICAREM SUCCESSIVAMENT TOTS ELS TERMES DEL MULTIPLICAND PER CADA UN DELS TERMES DEL MULTIPLICADOR. ESCRIUREM ELS PRODUCTES PARCIALS OBTINGUTS AIXÍ, ELS UNS DESSOTA DELS ALTRES DE MANERA QUE ELS TERMES SEMBLANTS OCUPIN LA MATEIXA COLUMNA I PROCEDIREM A LA ADDICIÓ LLUR.

Exemple: Multiplicar  $1 - x + x^2 + x^3$  per  $1 + x - x^2$

$$\begin{array}{r} 1 - x + x^2 + x^3 \\ 1 + x - x^2 \\ \hline 1 - x + x^2 + x^3 \\ x - x^2 + x^3 + x^4 \\ -x^2 + x^3 - x^4 - x^5 \\ \hline 1 - x^2 + 3x^3 - x^5 \end{array}$$

Exemple 2.<sup>on</sup> Multiplicar

$x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$  per  $x - a$ .

$$\begin{array}{r} x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 \\ x - a \\ \hline x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x \\ -ax^3 - a^2x^2 - a^3x - a^4 \\ \hline x^4 - a^4 = x^4 - a^4 \end{array}$$

EXERCICIS PER A PRÀCTIQUES

Cercar els productes

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 1. $(a^3b^2) \times (-5abd)$  | Solució $-5a^4b^3d$ |
| 2. $\frac{1}{3} ab^2c^3 \times 12a^6$   | » $4a^7b^2c^3$      |
| 3. $(-15m^5n^6)(-3mn)$  | » $45m^6n^7$        |
| 4. $(2a^3m^2x) \times (-3a^2mx^3) \times (4am^3x^2)$  | » $-24a^6m^6x^6$    |
| 5. $3a(x-y)^2 \times 2a^2(x-y)$   | » $6a^3(x-y)^3$     |
| 6. $\left(5x^2y - \frac{4}{5}xy^2 - \frac{2}{3}y^3 + x^3\right) \left(2x^3y - \frac{5}{6}xy^3\right)$ |                     |

Solució  $2x^6y + 10x^5y^2 - \frac{73}{30}x^4y^3 - \frac{17}{6}x^3y^4 + \frac{2}{3}x^2y^5 + \frac{5}{9}xy^6$

- |                                   |                              |
|-----------------------------------|------------------------------|
| 7. $(x+2)(x-2)(x^2+4)$            | Solució $x^4 - 16$           |
| 8. $[x(x^2-y^2)-2][x(x^2+y^2)+2]$ | » $x^6 - x^2y^4 - 4xy^2 - 4$ |

DIVISIÓ DE MONOMIS I POLINOMIS

32) Per trobar el QUOCIENT de dos *monomis* podem fonamentar-nos en això: que el producte del divisor pel quocient ha d'ésser igual al dividend. La divisió comprèn, com la multiplicació, dues operacions distintes.

1. Cercar la valor absoluta del quocient, és a dir, el coeficient i la part literal del dit quocient.

2. Cercar el signe del quocient.

33) La regla dels signes ens és coneguda (Quadern I, n.º 25) així és,

$\frac{+10}{+5} = +2$	$+a : +b = +\frac{a}{b}$
$\frac{+10}{-5} = -2$	$+a : -b = -\frac{a}{b}$
$\frac{-10}{+5} = -2$	$-a : +b = -\frac{a}{b}$
$\frac{-10}{-5} = +2$	$-a : -b = +\frac{a}{b}$

34) En la multiplicació, els exponents de les lletres comunes a tots dos factors eren *sumats*; en la divisió els exponents de les lletres comunes han d'ésser *restats*. Així  $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$  d'on es dedueix  $\frac{a^5}{a^3} = a^2$ . Podem ob-

tenir aquest resultat directament dividint, com l'havem obtingut en el Quadern I, n.º 36, així:

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a^2$$

35) El coeficient del quocient serà igual al resultat de dividir el coeficient del dividend pel del divisor, puix el dit coeficient ha d'ésser tal que multiplicat pel del divisor ens doni el del dividend.

$$\frac{15a^5}{3a^2} = 5a^3$$

36) Tota lletra que figura en el dividend i no en el divisor, figura en el quocient amb son propi exponent.

$$\frac{15a^5b^2}{3a^3} = 5a^2b^2$$

37) Tota lletra comuna a dividend i divisor que hi figuri elevada a potència distinta apareixerà en el quocient amb un exponent igual a la *diferència* entre el que tingui en el dividend i el que tingui en el divisor.

1. Si l'exponent de la dita lletra en el dividend és major que en el divisor l'exponent de la dita lletra en el quocient serà positiu

$$\frac{15a^5}{3a^2} = 5a^3$$

2. Si l'exponent de la dita lletra és en el dividend menor que en el divisor, l'exponent de la dita lletra en el quocient serà negatiu.

$$\frac{15a^2}{3a^5} = \frac{3 \times 5 \times a \times a}{3 \times a \times a \times a \times a \times a} = \frac{5}{a \times a \times a} = 5 \times a^{-3}$$

Si l'exponent de la dita lletra en el dividend és igual a l'exponent en el divisor, la dita lletra no figurarà en el quocient.

$$\frac{15a^3}{3a^3} = \frac{3 \times 5 \times a^3}{3a^3} = \frac{3 \times 5 \times a \times a \times a}{3 \times a \times a \times a} = 5$$

38) Tota lletra que figuri en el divisor i no en el dividend apareixerà en el quocient amb son mateix exponent, però negatiu.

$$\frac{15a^5}{5a^2b} = 3a^3b^{-1}$$

39) Perquè el quocient sigui enter, és precis que el coeficient del dividend sigui divisible pel del divisor i que els exponents del divisor no siguin majors que els de les mateixes lletres en el dividend.

La segona condició és essencial, perquè si es compleix sense la primera, el quocient tindrà, és veritat, un coeficient fraccionari, però no obstant, serà *algèbricament enter*.

Per exemple,

$$\frac{8a^7b^5c^4d^2e}{12a^4b^3c^2d} = \frac{2}{3} a^3b^2c^2de$$

Diem que una expressió és *algèbricament entera* quan, prescindint dels coeficients numèrics, ho és sa part literal.

Si no es compleix la segona condició, el quocient serà fraccionari, però caldrà simplificar-lo tant com puguem.

Per exemple:

$$\frac{18a^3b^4c^2d^3}{30ab^5c^4} = \frac{3a^2d^3}{5bc^2}$$

40) Per dividir dos monomis aplicarem la següent REGLA:

DIVIDIREM EL COEFICIENT DEL DIVIDEND PEL COEFICIENT DEL DIVISOR. ESCRIUREM AL COSTAT DEL QUOCIENT LES LLETRES COMUNES AL DIVIDEND I DIVISOR AMB UN EXPONENT IGUAL A LA DIFERÈNCIA DELS EXPONENTS AMB QUÈ FIGUREN EN EL DIVIDEND I DIVISOR: LES LLETRES QUE SÓN EXCLUSIVES DEL DIVIDEND SERAN ESCRITES AMB SON EXPONENT I LES EXCLUSIVES DEL DIVISOR, AMB SON EXPONENT CANVIAT DE SIGNE.

EL SIGNE DEL QUOCIENT SERÀ + SI EL DIVIDEND I DIVISOR TENEN UN MATEIX SIGNE, I SERÀ — SI TENEN SIGNES CONTRARIS.

Exemple 1.<sup>er</sup> Dividir  $6a^5b^4c^3$  per  $3a^2bc^3$

El quocient de  $6 : 3 = 2$ . La part literal és formada per  $a^5 : a^2 = a^3$  i per  $b^4 : b = b^3$ . Ometrem la lletra  $c$ , que tindria exponent zero,  $c^3 : c^3 = c^0 = 1$ .

$$\frac{6a^5b^4c^3}{3a^2bc^3} = 2a^3b^3$$

Exemple 2.<sup>on</sup> Dividir  $-10a^6b^3c^2d$  per  $-2ab^3c$

Solució: El coeficient del quocient serà  $10 : 2 = 5$ . La part literal serà  $a^6 : a = a^5$ ;  $b^3 : b^3 = 1$ ;  $c^2 : c = c$ ; i,  $d$

$$\frac{-10a^6b^3c^2d}{-2ab^3c} = 5a^5cd$$

Exemple 3.<sup>er</sup> Dividir  $-108x^3y^7z^5$  per  $6x^3y^8z^4t$

Solució:

$$\frac{-108x^3y^7z^5}{6x^3y^8z^4t} = -\frac{18z}{yt}$$

41) Dos números són recíprocs quan llur producte és igual a la unitat. Per tant, el recíproc d'un número serà la unitat dividida pel dit número. Així el recíproc de 5 serà  $\frac{1}{5}$ , el recíproc de  $a^2$  és  $\frac{1}{a^2}$ , el recíproc de  $a^2b^3z$  és  $\frac{1}{a^2b^3z}$  etc. El recíproc d'una fracció serà la fracció invertida. Així el recíproc de  $\frac{7}{12}$  és  $\frac{12}{7}$ , el de  $\frac{a-b}{c}$  és  $\frac{c}{a-b}$ . Dividir per una quantitat equivaldrà a multiplicar per la recíproca.

Exemple: Dividir  $a^5b^4c^3$  per  $a^2bc^3$ .

El recíproc de  $a^2bc^3$  és  $\frac{1}{a^2bc^3}$

Multipliquem  $a^5b^4c^3$  per  $\frac{1}{a^2bc^3}$

$$a^5b^4c^3 \times \frac{1}{a^2bc^3} = \frac{a^5b^4c^3}{a^2bc^3} = a^3b^3$$

42) Per dividir un polinomi per un monomi se segueix la següent

#### REGLA

PER DIVIDIR UN POLINOMI PER UN MONOMI, CAL DIVIDIR CADA TERME DEL POLINOMI PEL MONOMI.

Per exemple, si tractem de dividir el polinomi

$4x^4 - 2ax^7 + 5a^2x^2 + a^4$  pel monomi  $5ax^2$ , tindrem

$$\frac{4x^4}{5ax^2} - \frac{2ax^7}{5ax^2} + \frac{5a^2x^2}{5ax^2} + \frac{a^4}{5ax^2} = \frac{4x^2}{5a} - \frac{2}{5}x^5 + a + \frac{a^3}{5x^2}$$

Es costum plantejar l'operació així:

$$4x^4 - 2ax^7 + 5a^2x^2 + a^4 \quad | \quad 5ax^2$$

$$\text{Quocient} \quad \frac{4x^2}{5a} - \frac{2}{5}x^5 + a + \frac{a^3}{5x^2}$$

EXERCICIS PER A PRÀCTIQUES

Dividir

- |    |  |     |                 |         |                                     |
|----|--|-----|-----------------|---------|-------------------------------------|
| 1. | $75ax^2y^3p^4$                                       | per | $75y^3$         | Solució | $ax^2p^4$                           |
| 2. | $30x^6y^3z^2$  | per | $-6x^5y^3z$     | »       | $-5xz$                              |
| 3. | $-105x^4yz^4$  | per | $21x^3y^2z^3$   | »       | $-5xy^{-1}z$                        |
| 4. | $-108x^3y^7z^5$                                      | per | $-6x^4y^7z^2$   | »       | $18x^{-1}z^3$                       |
| 5. | $10(x+y)^2 - 5a(x+y) + 5(x+y)$                       | per | $5(x+y)$        | Solució | $2(x+y) - a + 1$                    |
| 6. | $\frac{3}{7}ab^5 - \frac{1}{4}a^2b - \frac{1}{21}ab$ | per | $\frac{3}{7}ab$ | Solució | $b^4 - \frac{7}{12}a - \frac{1}{9}$ |

43) Per dividir un polinomi per un altre polinomi, és convenient ordenar-los tots dos segons les potències ascendents o descendents d'una mateixa lletra.

Suposem per exemple que és qüestió de dividir els dos polinomis següents:

$$57x + x^4 - 70 \quad \text{per} \quad 3x - 5 + x^2$$

Procedirem a ordenar-los i posar-los un en front de l'altre, procurant, com més avall indiquem, de deixar en el dividend tants espais com termes manquin de la potència de la lletra segons la qual ordenem.

El procediment que seguirem és el següent:

Dividend	$x^4$	$+57x - 70$	$x^2 + 3x - 5$	Divisor
	$-x^4 - 3x^3 + 5x^2$		$x^2 - 3x + 14$	Quocient
1. <sup>a</sup> resta	$-3x^3 + 5x^2 + 57x - 70$			
	$+3x^3 + 9x^2 - 15x$			
2. <sup>a</sup> resta	$+14x^2 + 42x - 70$			
	$-14x^2 - 42x + 70$			
Resta final	$0$			

Dividirem el primer terme  $x^4$  del dividend pel primer terme  $x^2$  del divisor, i així tindrem el primer terme  $x^2$  del quocient. Multiplicarem tot el divisor per  $x^2$ , i restarem el producte del dividend, i per això, escriurem desota del dividend els diferents termes d'aquest producte, amb els signes canviats i els sumarem, reduint els termes semblants, amb la qual cosa obtindrem la primera resta

$$-3x^3 + 5x^2 + 57x - 70$$

Dividirem el primer terme  $-3x^3$  d'aquesta resta pel primer terme  $x^2$  del divisor, ço que dóna el segon terme  $-3x$  del quocient. Multiplicarem tot el divisor per aquest segon terme i restarem aquest producte de la primera resta, com havem dit abans, i obtindrem així la segona resta

$$+14x^2 + 42x - 70$$

Dividirem el primer terme  $+14x^2$  d'aquesta segona resta pel primer terme  $x^2$  del divisor, ço que dóna el tercer terme  $+14$  del quocient. Multiplicarem tot el divisor per aquest tercer terme del quocient i restarem el producte de la segona resta, i la resta final és *zero*. La operació és acabada, i el quocient demanat és

$$x^2 - 3x + 14$$

També podem aquí fer, com férem en la divisió dels números, la prova, la qual és plantejada fent la multiplicació del quocient pel divisor, i ja sabem que en donar-nos com a producte el dividend ens assabentem que la divisió ha estat ben feta.

La operació és plantejada així:

$x^2 + 3x - 5$	Divisor
$x^2 - 3x + 14$	Quocient
$x^4 + 3x^3 - 5x^2$	
$-3x^3 - 9x^2 + 15x$	
$+14x^2 + 42x - 70$	
$x^4$	$+57x - 70$ Dividend

De tot el que havem indicat deduirem per a la divisió de polinomis la següent

#### REGLA

1. ORDENAREM AMBDÓS POLINOMIS SEGONS LES POTÈNCIES ASCENDENTS O DESCENDENTS D'UNA MATEIXA LLETRA, tot procurant deixar en el dividend buits per als termes no existents.
2. DIVIDIREM EL PRIMER TERME DEL DIVIDEND PEL PRIMER DEL DIVISOR I TINDREM EL PRIMER TERME DEL QUOCIENT.
3. MULTIPLICAREM TOT EL DIVISOR PER AQUEST PRIMER TERME DEL QUOCIENT I RESTAREM EL PRODUCTE DEL DIVIDEND. Aquesta valor és anomenada *primera resta*.



## DESCOMPOSICIÓ FACTORIAL DE MONOMIS I POLINOMIS

44) Els monomis i polinomis, així com molts números, poden ésser descompostos en els seus factors.

El número 20 pot ésser descompost en els factors 5 i 4, així com el 75 podrà ésser-ho en 5 i 15.

Cal notar demés que moltes vegades entre els factors en què pot ésser descompost un número, n'hi ha que són comuns a aquest i a altres números. El 5 en aquest cas és comú a ambdós: al 20 i al 75.

Basant-nos en aquesta qualitat podem presentar la suma o resta de dos o més números com  $20 + 75$  en una altra forma que no altera per res sa valor, per exemple:  $5(4 + 15)$ .

D'aquesta operació, en diem *separar el factor comú*. El factor en l'exemple és el 5.

En altres operacions com per exemple  $40 - 16 + 32$  podrem separar el 8 de factor comú quedant-nos aquesta operació presentada en la forma següent:

$$8(5 - 2 + 4)$$

45) Això mateix que havem fet amb els números, ho podem fer també amb monomis i polinomis. Suposem per exemple el polinomi

$$ax - bx + cx - dx$$

Veiem aquí clarament que el factor  $x$  és comú a cada un dels sumands i per tant podem separar el factor comú  $x$  i plantejar la operació de la manera següent:

$$x(a - b + c - d)$$

No tots els polinomis presenten tan clarament el factor comú, però amb una mica de pràctica no és cap operació difícil veure quin factor pot ésser separat de cada un dels termes del polinomi. Suposem, per exemple, que sigui aquest el següent:

$$20a^4b^3 + 16a^2b^4 - 32a^5b$$

La qüestió en separar el factor comú és comunament veure quin és el *màxim* factor comú dels termes del polinomi. En aquest cas veiem clarament que aquest factor és el  $4a^2b$ , puix cada un dels factors pot ésser considerat de la manera següent:

$$20a^4b^3 = 4a^2b \times 5a^2b^2$$

$$16a^2b^4 = 4a^2b \times 4b^3$$

$$32a^5b = 4a^2b \times 8a^3$$

El factor comú, com veiem, és  $4a^2b$ , i la suma algebàrica anterior pot ésser expressada sota la forma

$$4a^2b(5a^2b^2 + 4b^3 - 8a^3)$$

46) Per trobar doncs el monomi factor comú d'un polinomi, cercarem primer el factor comú entre els coeficients numèrics de cada un dels termes del polinomi, i aquest serà el coeficient numèric del monomi. Per a això podem fer ús de la descomposició en *factors primers* explicada en la aritmètica, 1.<sup>a</sup> part, n.º 56.

Obtenim el factor comú de la part literal de cada un dels factors del polinomi prenent les lletres comunes a cada un dels termes amb l'exponent mínim de cada una d'elles en el terme en què sigui menor. Així, el factor comú del polinomi  $2ax^2 + 6a^3y^2x - 10a^2x^5y$  el trobarem de la manera següent:

El número més gran que divideix tots els coeficients numèrics és el 2; aquest serà, doncs, el coeficient del monomi factor comú. En la part literal veiem que les lletres  $a$  i  $x$  entren en tots els termes, per tant aquestes són les lletres que entraran en el monomi factor comú. L'exponent amb què hi entraran, el trobarem observant que, la  $a$  on té l'exponent més petit és en el primer terme, on és solament  $a$ , i la  $x$  on té l'exponent més petit és en el segon terme, on és  $x$ . Així doncs, el monomi factor comú serà  $2ax$ . Tindrem doncs

$$2ax^2 + 6a^3y^2x - 10a^2x^5y = 2ax(x + 3a^2y^2 - 5ax^4y)$$

En el polinomi  $12ab^2c^3 - 18a^3c^2y + 24a^2c^4 - 36a^4bc^5y^2$  veiem que el factor comú dels coeficients numèrics és el 6 i el de la part literal és  $ac^2$ , i quedarà el polinomi anterior, després d'haver tret el factor comú, en la forma següent:

$$6ac^2(2b^2c - 3a^2y + 4ac^2 - 6a^3bc^3y^2).$$

#### EXERCICIS PER A PRÀCTIQUES

Treure factors comuns en les expressions següents:

- |   |   |
|---|---|
| 1. $x^2 - 7x$                               | Solució $x(x - 7)$                            |
| 2. $12a^5 - 2a^3 + 4a^4$                    | » $2a^3(6a^2 - 1 + 2a)$                       |
| 3. $\frac{15}{4}ax^2y^2 + 40ay^3 + 5ay^2$   | » $5ay^2\left(\frac{3}{4}x^2 + 8y + 1\right)$ |
| 4. $49a^2b^3c^4 - 63a^3b^2c^4 + 7a^4b^2c^3$ | » $7a^2b^2c^3(7bc - 9ac + a^2)$               |
| 5. $x^2 - (a + b)x + ab$                    | » $(x - a)(x - b)$                            |

## QUADRATS I CUBS

47) Diem que dos factors són iguals quan tenen iguals la seva part numèrica, la seva part literal i el signe. Així seran factors iguals per exemple  $3a(3y-x^2)$  i  $3a(3y-x^2)$  però ja no ho seran els factors  $3a(3y-x^2)$  i  $-3a(3y-x^2)$ .

48) Així com el producte de dos números és el seu quadrat, el producte de dos factors iguals serà el quadrat d'un d'aquests factors. Així  $(x-y)(x-y)$  és igual a  $(x-y)^2$  o sigui el quadrat de  $x-y$ .

49) Així direm també que l'arrel quadrada d'una quantitat és un dels factors iguals en què pot ésser descomposta aquesta quantitat.

50) Direm també que un cub perfecte és el producte de 3 factors iguals i que l'arrel cúbica és un dels 3 factors iguals en què pot ésser descomposta una quantitat.

51) És convenient saber de memòria les definicions que anem a deduir.

UN MONOMI ÉS UN QUADRAT PERFECTE QUAN EL SEU COEFICIENT NUMÈRIC ÉS QUADRAT PERFECTE D'ALGUN NÚMERO I QUAN ELS EXPONENTS DE LES LLETRES QUE FORMEN LA PART LITERAL SÓN DIVISIBLES PER 2.

Segons aquesta definició, doncs, seran quadrats perfectes monomis tals com  $25a^4$ ;  $36x^2b^6$ ;  $64x^{10}b^4$ ; essent les seves arrels respectivament els monomis  $5a^2$ ;  $6xb^3$ ;  $8x^5b^2$

52) Com ja havem dit en el primer quadern de l'Àlgebra, n.º 34, els quadrats de números positius o negatius sempre són positius, per exemple

$$\begin{aligned}(-x) \times (-x) &= +x^2 \\ (+x) \times (+x) &= +x^2\end{aligned}$$

Com veiem doncs,  $x^2$  és el quadrat tant de  $-x$  com de  $+x$ ; per tant l'arrel quadrada de  $x^2$  tant pot ésser  $+x$  com  $-x$  i per això havem de tenir present que l'arrel quadrada d'un número té sempre dues valors, una de positiva i una de negativa i així representarem les valors dient:  $\sqrt{x^2} = \pm x$ .

53) Semblantment al que havem dit abans, direm que UN MONOMI ÉS UN CUB PERFECTE QUAN SON COEFICIENT NUMÈRIC ÉS EL CUB EXACTE D'ALGUN NÚMERO I QUAN ELS EXPONENTS DE LA PART LITERAL SÓN DIVISIBLES PER 3.

Així els monomis  $8x^3y^6$ ;  $216x^9y^3z^6$ ;  $729b^3c^9d^6$  són cubs perfectes dels monomis  $2xy^2$ ;  $6x^3yz^2$ ;  $9bc^3d^2$

54) Quan un dels factors iguals és un binomi, com per exemple  $a+b$  o  $a-b$ , son quadrat tindrà la forma següent:

$$\begin{array}{r}
 a + b \\
 \hline
 a + b \\
 a^2 + ab \\
 + ab + b^2 \\
 \hline
 a^2 + 2ab + b^2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 a - b \\
 \hline
 a - b \\
 a^2 - ab \\
 - ab + b^2 \\
 \hline
 a^2 - 2ab + b^2
 \end{array}$$

o sigui:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2)$$

D'aquí deduirem les regles següents que cal saber de memòria:

EL QUADRAT DE LA SUMA DE DUES QUANTITATS ÉS IGUAL AL QUADRAT DE LA PRIMERA, MÉS EL DOBLE DE LA PRIMERA PER LA SEGONA, MÉS EL QUADRAT DE LA SEGONA.

EL QUADRAT DE LA DIFERÈNCIA DE DUES QUANTITATS ÉS IGUAL AL QUADRAT DE LA PRIMERA, MENYS EL DOBLE DE LA PRIMERA PER LA SEGONA, MÉS EL QUADRAT DE LA SEGONA.

*Exemple.* Quadrat de  $(a + 2y)^2 = a^2 + 4ay + 4y^2$  trobat de la manera següent:

$$\begin{array}{r}
 \text{Quadrat del primer terme } a \dots\dots\dots = a^2 \\
 \text{Doble del primer pel segon } 2(a \times 2y) \dots = 4ay \\
 \text{Quadrat del segon terme } 2y \dots\dots\dots = 4y^2
 \end{array}$$

*Exemple (Invers).* Quina suma o diferència en ésser elevada al quadrat ens ha donat el següent trinomi:  $25a^2 + 49x^2y^2 - 70axy^2$ ?

Veiem fàcilment que els dos primers termes són quadrats perfectes per ésser sos coeficients numèrics quadrats perfectes i per ésser els exponents de la seva part literal divisibles per 2. Les arrels seran respectivament  $5a$  i  $7xy$ .

Respecte del tercer terme, veiem que son coeficient 70 és el doble del producte dels coeficients 5 i 7, i veiem també que la seva part literal és el producte de les parts literals.

Demés, per ésser afectat aquest últim terme del signe —, veiem clarament que és qüestió d'una *diferència* que ha estat elevada al quadrat.

Podem, doncs, establir:

$$25a^2 + 49x^2y^2 - 70axy = (5a - 7xy)^2$$

Això que havem fet últimament és anomenat en llenguatge algèbric, *descompondre un trinomi en factors* o també *descompondre factorialment un trinomi*.

55) Moltes vegades els trinomis que són quadrats perfectes es presenten amb els signes canviats o contraris als indicats en les formes típiques estudiades en els números anteriors, com per exemple  $-a^2 - b^2 - 2ab$ . En aquest cas, (Àlgebra I, n.º 14), podem canviar els signes de cada un dels termes afectant el total del signe menys. Així,

$$-a^2 - b^2 - 2ab = -(a^2 + b^2 + 2ab) = -(a + b)^2$$

*Exemple.* Descompondre factorialment el trinomi

$$-25x^2y^2 - 16p^4q^2 + 40p^2qxy$$

Canviant els signes veurem que

$$-(25x^2y^2 + 16p^4q^2 - 40p^2qxy) = -(5xy - 4p^2q)^2$$

56) Si tinguéssim d'elevat al quadrat un trinomi, podríem posar-lo en forma de binomi agrupant dos dels seus termes i procediríem a l'elevació al quadrat com si fos qüestió d'un binomi.

Proposem-nos elevar al cub el trinomi  $m - b + x$

Evidentment,  $m - b + x = (m - b) + x$  i per tant,

$$(m - b + x)^2 = [(m - b) + x]^2 = (m - b)^2 + 2(m - b)x + x^2$$

Desenrotllant el quadrat del binomi  $m - b$  i efectuant la multiplicació  $2(m - b)x$  tindrem

$$\begin{aligned} (m - b + x)^2 &= m^2 - 2mb + b^2 + x^2 + 2mx - 2bx \\ &= m^2 + b^2 + x^2 - 2mb + 2mx - 2bx \end{aligned}$$

Així veiem que

EL QUADRAT D'UN TRINOMI ÉS IGUAL AL QUADRAT DEL PRIMER TERME, MÉS EL QUADRAT DEL SEGON, MÉS EL QUADRAT DEL TERCER, MÉS O MENYS EL DOBLE DEL PRIMER PEL SEGON, MÉS O MENYS EL DOBLE DEL PRIMER PEL TERCER, MÉS O MENYS EL DOBLE DEL SEGON PEL TERCER.

Seguint un procediment en tot semblant a l'anterior, podrem trobar el quadrat d'un polinomi d'un número qualsevol de termes.

57) El cub d'un binomi l'obtidrem de la manera següent:

$(a+b)^3$ $\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$	$(a-b)^3$ $\begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \\ a-b \\ \hline a^3-2a^2b+ab^2 \\ -a^2b+2ab^2-b^3 \\ \hline a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{array}$
---	--

D'aquí deduirem les regles següents, que és convenient saber de memòria:

1.<sup>a</sup> EL CUB DE LA SUMA DE DUES QUANTITATS ÉS IGUAL AL CUB DE LA PRIMERA, MÉS EL TRIPLE DEL QUADRAT DE LA PRIMERA PER LA SEGONA, MÉS EL TRIPLE DEL QUADRAT DE LA SEGONA PER LA PRIMERA, MÉS EL CUB DE LA SEGONA.

EL CUB DE LA DIFERÈNCIA DE DUES QUANTITATS ÉS IGUAL AL CUB DE LA PRIMERA, MENYS EL TRIPLE DEL QUADRAT DE LA PRIMERA PER LA SEGONA, MÉS EL TRIPLE DEL QUADRAT DE LA SEGONA PER LA PRIMERA, MENYS EL CUB DE LA SEGONA.

Noteu en aquest segon cas com els termes que tenen potència parella del terme negatiu, són positives i les que tenen potències imparelles són negatives.

58) Seguint procediments semblants als indicats abans, aniríem trobant les potències quarta, quinta, sisena..... enèsima d'un binomi.

La fórmula següent, nomenada BINOMI DE NEWTON (1), ens dóna la llei a seguir per a la potència d'un grau qualsevol d'un binomi:

Termes... 1.<sup>er</sup> 2.<sup>on</sup> 3.<sup>er</sup> 4.<sup>rt</sup>

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3}b^3 + \dots$$

Termes  $\frac{m+1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times m}$   $a^{n-m}b^m$  + .....  $\frac{n}{n} a b^{n-1}$  +  $\frac{n+1}{n+1} b^n$

Com veiem, el número de termes és  $n + 1$  o sigui un més que el grau de la potència.

---

(1) NEWTON (que és pronunciat *Niuton*): nom del cèlebre matemàtic anglès que trobà aquesta fórmula.

Utilitzant aquesta fórmula, podem cercar la valor ja trobada, per a les potències 2 i 3 d'un binomi.

Anem a trobar el quadrat o sigui la potència de grau 2 del binomi  $a + b$ ; per això caldrà sols aplicar la *fórmula del binomi*, en la qual substituïm  $n$  per la valor 2 i tindrem

$$(a+b)^2 = a^2 + \frac{2}{1} a^{2-1}b + \frac{2(2-1)}{1 \times 2} a^{2-2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(ja que  $a^{2-2} = a^0 = 1$ ).

El terme quart, així com els següents, són nuls per ésser-ho els seus coeficients numèrics, tota vegada que és zero el seu numerador, format per un producte un dels factors del qual és  $n-2=2-2=0$ .

Anem ara a buscar el cub del binomi, o sigui, anem a substituir la  $n$  per 3; tindrem:

$$(a+b)^3 = a^3 + \frac{3}{1} a^{3-1}b + \frac{3 \times (3-1)}{1 \times 2} a^{3-2}b^2 + \frac{3 \times (3-1)(3-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{3-3}b^3 = \\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Així mateix podem obtenir totes les potències, i com exemple posem la següent, que és del grau 5.

$$(a+b)^5 = a^5 + \frac{5}{1} a^4b + \frac{5 \times 4}{1 \times 2} a^3b^2 + \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} a^2b^3 + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} ab^4 + b^5 = \\ = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

59) Ens caldrà remarcar que

1.<sup>er</sup> Els exponents de  $a$  augmenten gradualment d'una unitat, mentre que els de  $b$  hi van disminuint; de manera que LA SUMA DELS EXPONENTS DE  $a$  I  $b$  DE CADA TERME ÉS CONSTANTMENT IGUAL AL GRAU DE LA POTÈNCIA.

2.<sup>on</sup> ELS COEFICIENTS NUMÈRICS DELS TERMES IGUALMENT DISTANTS DELS EXTREMS SÓN IGUALS.

Així veiem que aquests coeficients són

per a la segona potència	1, 2, 1
» » tercera »	1, 3, 3, 1
» » quarta »	1, 4, 6, 4, 1
» » cinquena »	1, 5, 10, 10, 5, 1
» » sisena »	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1
.....	.....
.....	.....

3.<sup>er</sup> Els coeficients van augmentant des dels extrems cap al mig.

4.<sup>rt</sup> Quan el binomi és de la forma  $a-b$ , diferència de dues quantitats, els termes del seu desenrotllament són afectats de signes alternativament positius i negatius, per ésser negatius tots els termes que contenen potència de grau imparell del terme negatiu del binomi.

Així, per exemple, els coeficients anteriors serien

per a la segona potència	+ 1 - 2 + 1
» » tercera »	+ 1 - 3 + 3 - 1
» » quarta »	+ 1 - 4 + 6 - 4 + 1
» » cinquena »	+ 1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1
» » sisena »	+ 1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 etc.

Com veiem, l'últim terme serà positiu o negatiu, segons sigui parell o imparell el grau de la potència.

EXERCICIS

Descompondre factorialment els trinomis:

1. $x^2 - 8x + 16$	Solució $(x - 4)^2$
2. $36x^2 + 60x + 25$	» $(6x + 5)^2$
3. $3x^2 - 4x\sqrt{3} + 4$	» $(x\sqrt{3} - 2)^2$
4. $a^4b^4c^6 - 2ab^2c^3 + 1$	» $(ab^2c^3 - 1)^2$

Desentrotllar els següents quadrats:

5. $(a+1)^2$	» $a^2 + 2a + 1$
6. $\left(\frac{x}{4} - 3y\right)^2$	» $\frac{x^2}{16} - \frac{3}{2}xy + 9y^2$
7. $[(x+y) + (a-b)]^2$	Solució $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + a^2 + b^2 + 2xy + 2xa - 2xb \\ + 2ya - 2yb - 2ab \end{array} \right.$

Eleva al cub les expressions:

8. $ax + by$	Solució $a^3x^3 + 3a^2x^2by + 3axb^2y^2 + b^3y^3$
9. $3a^2 + 4b^2$	» $27a^6 + 108a^4b^2 + 144a^2b^4 + 64b^6$

60) Hi ha alguns productes de binomis que, per la freqüència amb què es presenten en les fórmules algèbriques, és convenient saber de memòria.

Tal és, per exemple, el producte de la suma per la diferència de dues quantitats. Suposem que siguin aquestes  $x+y$  i  $x-y$ ; llur producte és

$$(x+y) \times (x-y) = x^2 + xy - xy - y^2 = x^2 - y^2$$

de la qual cosa deduïm la següent regla:

EL PRODUCTE DE LA SUMA DE DUES QUANTITATS PER LA DIFERÈNCIA LLUR ÉS IGUAL A LA DIFERÈNCIA DELS QUADRATS D'AQUESTES DUES QUANTITATS.

De vegades convé descompondre la diferència dels quadrats de dues quantitats en sos factors, suma i diferència de les dites quantitats.

Exemples. Suposem la diferència  $25x^2z^4 - 16y^4z^2$ .

Veiem que ambdós termes són quadrats perfectes i que ses arrels respectives són:  $5xz^2$  i  $4y^2z$ . Tindrem, doncs

$$25x^2z^4 - 16y^4z^2 = (5xz^2 + 4y^2z)(5xz^2 - 4y^2z)$$

### EXERCICIS

Descompondre en dos factors les expressions:

1.  $25x^2 - 9a^2$

Solució  $(5x+3a)(5x-3a)$

2.  $x^4 - 1$

»  $(x^2+1)(x^2-1)$

61) Es usat en àlgebra, per estalviar d'escriure moltes vegades una fórmula o expressió llarga, representar-la per una sola lletra.

Suposem que tractem d'elevat al quadrat el trinomi següent:

$$(a^2xy + a^4b^2c + abm)^2$$

Representarem la suma dels dos primers termes per P i el segon per Q.  
Així:

$$P = a^2xy + a^4b^2c; \quad Q = abm$$

i tindrem

$$(P+Q)^2 = P^2 + 2PQ + Q^2 \quad (1)$$

Desenrotllant els quadrats de P i de Q tenim

$$P^2 = a^4x^2y^2 + a^8b^4c^2 + 2a^2xya^4b^2c = a^4x^2y^2 + a^8b^4c^2 + 2a^6b^2cxy; \quad Q^2 = a^2b^2m^2$$

Substituint ara les valors de P, P<sup>2</sup>, Q i Q<sup>2</sup> en la (1) tenim:

$$(P+Q)^2 = (a^2xy + a^4b^2c + abm)^2 = a^4x^2y^2 + a^8b^4c^2 + 2a^6b^2cxy + a^2b^2m^2 + 2(a^2xy + a^4b^2c)abm$$

que és el desenrotllament del quadrat demanat, el qual havem obtingut d'una manera la més senzilla i menys susceptible de cometre equivocacions.

## REDUCCIÓ DE FRACCIONS

62) Reduir una fracció és transformar-la en una altra fracció equivalent (que tingui la mateixa valor) i els termes de la qual, numerador i denominador, siguin més senzills. L'aventatge de la reducció consisteix en la major facilitat que presenten les operacions. Així, per exemple, si les fraccions  $\frac{5024}{6280}$  i  $\frac{3768}{6280}$  equivalen a  $\frac{4}{5}$  i  $\frac{3}{5}$  respectivament és evident que operarem més ràpidament amb les segones que amb les primeres. Les fraccions reduïdes a sa EXPRESSIÓ MÉS SIMPLE, són anomenades IRREDUCTIBLES, això és, que ja no es poden reduir.

La reducció de fraccions es fonamenta en el principi que diu: Si multipliquem o dividim els termes d'una fracció per una mateixa quantitat (positiva o negativa), la fracció no canvia de valor, (Q. I, n.ºs 27 a 29).

63) Per reduir una fracció a sa expressió més simple, SUPRIMIREM EN TOTS DOS TERMES ELS FACTORS COMUNS.

Exemple 1.<sup>er</sup> Reduir la fracció  $\frac{7ax^3y^2}{21a^2xy^4}$

tindrem 
$$\frac{7ax^3y^2}{21a^2xy^4} = \frac{\cancel{7} \cancel{a} \cancel{a} \cdot x \cdot x \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y}}{3 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot y \cdot y} = \frac{x^2}{3ay^2}$$

obtinguda, com veiem, suprimint d'ambdós termes el factor comú  $7axy^2$ .

Exemple 2.<sup>on</sup> Reduir la fracció  $\frac{6ax^3+6axy^2+12ax^2y}{6ax^3+6axy^2-12ax^2y}$

El numerador  $6ax^3 + 6axy^2 + 12ax^2y = 6ax(x^2 + y^2 + 2xy) = 6ax(x+y)^2$   
i el denominador  $6ax^3 + 6axy^2 - 12ax^2y = 6ax(x^2 + y^2 - 2xy) = 6ax(x-y)^2$

i aleshores:

$$\frac{6ax^3 + 6axy^2 + 12ax^2y}{6ax^3 + 6axy^2 - 12ax^2y} = \frac{\cancel{6ax}(x+y)^2}{\cancel{6ax}(x-y)^2} = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$$

64) Algunes vegades el denominador és un factor del numerador. En aquest cas, el trencat es transforma en una quantitat entera.

Per exemple: 
$$\frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{\cancel{(x+y)}(x-y)}{\cancel{x+y}} = x - y.$$

En altres, al contrari, el numerador és contingut en el denominador; aleshores la fracció irreductible té per numerador la unitat. Així la fracció

$$\frac{x+y}{x^2+y^2+2xy} = \frac{\cancel{x+y}}{(x+y)(x+y)} = \frac{1}{x+y}$$

HAVEM DE TENIR BEN PRESENT QUE PER A SUPRIMIR UN FACTOR DEL NUMERADOR I DEL DENOMINADOR, TÉ D'ÉSSER QUESTIÓ D'UN FACTOR COMÚ DE *tots* ELS TERMES.

Així,  $\frac{3ax}{9ay-8bx}$  no té reducció possible, puix ni 3, ni  $a$ ,  $b$ ,  $x$ ,  $y$ , són factors de tots els termes del numerador i del denominador.

## OPERACIONS AMB FRACCIONS

65) Les fraccions algèbriques gaudeixen de les mateixes propietats que les fraccions aritmètiques.

### SUMA I RESTA DE FRACCIONS

66) PER SUMAR O RESTAR DIVERSES FRACCIONS, QUE TENEN UN MATEIX DENOMINADOR, SUMAREM O RESTAREM ELS NUMERADORS, I A LA SUMA O RESTA, LI POSAREM EL DENOMINADOR COMÚ.

Exemples:

$$\frac{x}{y} + \frac{a^2}{y} + \frac{a}{y} = \frac{x+a^2+a}{y} = \frac{x+a(a+1)}{y}$$

$$\frac{x}{y} - \frac{a^2}{y} - \frac{a}{y} = \frac{x-a^2-a}{y} = \frac{x-a(a+1)}{y}$$

67) Si tenen distint denominador, caldrà reduir-les abans a un denominador comú, i després les sumarem com havem dit abans.

PER REDUIR DIVERSES FRACCIONS A UN MATEIX DENOMINADOR, MULTIPLICAREM ELS DOS TERMES DE CADA UNA D'ELLES PEL PRODUCTE DELS DENOMINADORS DE TOTES LES ALTRES.

Per exemple, les fraccions

$$\frac{a}{x}, \quad \frac{b}{y} \quad \text{i} \quad \frac{c}{z}$$

es convertiran en

$$\frac{ayz}{xyz}, \quad \frac{bxz}{xyz}, \quad \frac{cxy}{xyz}$$

i la suma llur serà

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{ayz}{xyz} + \frac{bxz}{xyz} + \frac{cxy}{xyz} = \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz}$$

Tindriem també

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{y} - \frac{c}{z} = \frac{ayz}{xyz} - \frac{bxz}{xyz} - \frac{cxy}{xyz} = \frac{ayz - bxz - cxy}{xyz}$$

69) És molt freqüent en àlgebra tenir d'efectuar la suma o diferència d'una quantitat entera i una de trencada com per exemple:

$$3a + \frac{x}{b}$$

Aquests casos poden ésser considerats com la suma de dos trencats, un dels quals (l'enter), té per denominador la unitat. Així la suma anterior serà

$$\frac{3a}{1} + \frac{x}{b} = \frac{3a \cdot b}{1 \cdot b} + \frac{x \cdot 1}{1 \cdot b} = \frac{3ab}{b} + \frac{x}{b} = \frac{3ab + x}{b}$$

Com veiem, podem obtenir el resultat estalviant-nos de fer la operació de reduir els trencats a un comú denominador, si seguim la regla següent, semblant a la donada en aritmètica en tractar de convertir un número mixt a trencat.

PER SUMAR UN ENTER I UN TRENCAT MULTIPLICAREM L'ENTER PEL DENOMINADOR DEL TRENCAT. LA SUMA D'AQUEST PRODUCTE AMB EL NUMERADOR, DIVIDIDA PEL DENOMINADOR ÉS EL RESULTAT DE L'OPERACIÓ.

68) Seguint raonaments semblants als del cas anterior, trobarem la regla per obtenir la diferència entre una quantitat entera i una de fraccionària.

PER RESTAR UN TRENCAT D'UN ENTER MULTIPLICAREM L'ENTER PEL DENOMINADOR DEL TRENCAT, RESTAREM D'AQUEST PRODUCTE EL NUMERADOR DEL TRENCAT, I AQUESTA DIFERÈNCIA PARTIDA PEL DENOMINADOR ÉS EL RESULTAT DE LA OPERACIÓ.

Així tindrem

$$3a - \frac{x}{b} = \frac{3ab - x}{b}$$

## EXERCICIS PER A PRÀCTIQUES

Efectuar les operacions indicades:

$$1. \quad \frac{a}{3} + \frac{a}{8} + \frac{a}{12}$$

$$\text{Solució } \frac{13a}{24}$$

$$2. \quad \frac{2}{a^3x^3} + \frac{3}{ax^3} + \frac{4}{a^2x}$$

$$» \quad \frac{2+a(3a+4x^2)}{a^3x^3}$$

$$3. \quad \frac{x^2+y^2}{8} - \frac{(x+y)^2}{16}$$

$$» \quad \left(\frac{x-y}{4}\right)^2$$

$$4. \quad \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}$$

$$» \quad \frac{4xy}{x^2-y^2}$$

## PRODUCTE I QUOCIENT DE FRACCIONS

70) Per multiplicar dues o més fraccions dividirem el producte dels numeradors pel producte dels denominadors

Exemple 1.<sup>er</sup> Multiplicar les fraccions  $\frac{4x^2}{6z}$ ,  $\frac{7xy}{8}$  i  $\frac{z^2}{3xy}$

El producte dels numeradors és  $4x^2 \times 7xy \times z^2 = 28x^3yz^2$  i el dels denominadors és  $6z \times 8 \times 3xy = 144xyz$ .

El producte serà

$$\frac{28x^3yz^2}{144xyz} = \frac{7x^2z}{36}$$

Exemple 2.<sup>on</sup> Multiplicar les fraccions:

$$\frac{xz+2z}{x-1}, \quad y+4 \quad \text{i} \quad \frac{x^2-1}{(x+2)^2}$$

El producte dels numeradors serà  $(xz+2z)(y+4)(x^2-1)$  i el dels denominadors  $(x-1) \times 1 \times (x+2)^2$ .

El trencat producte serà:

$$\frac{(xz+2z)(y+4)(x^2-1)}{(x-1)(x+2)^2}$$

simplificant;

$$\frac{(xz+2z)(y+4)(x^2-1)}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{z(x+2)(y+4)(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+2)} = \frac{z(y+4)(x+1)}{x+2}$$

71) PER DIVIDIR UNA QUANTITAT PER UNA FRACCIÓ MULTIPLICAREM LA QUANTITAT PER LA FRACCIÓ INVERTIDA. (De la mateixa manera que vam veure en Aritmètica, part 2.<sup>a</sup>, número 38).

Així el quocient de la fracció  $\frac{a}{b}$  per  $\frac{c}{d}$  és  $\frac{ad}{bc}$ , perquè si multipliquem aquesta fracció pel divisor, i la reduïm, obtindrem el dividend

$$\frac{ad}{bc} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

Segons això, dividir per  $\frac{1}{2}$  és igual que multiplicar per 2; dividir per  $\frac{8}{y}$  equival a multiplicar per  $\frac{y}{8}$ , etc.

Exemple: Dividir  $\frac{x^6-y^6}{x+1}$  per  $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$ .

Multipliquem el dividend  $\frac{x^6-y^6}{x+1}$  per la recíproca del divisor, és a dir, per  $\frac{x^2-y^2}{x^3+y^3}$ . Així:

$$\begin{aligned} \frac{x^6-y^6}{x+1} : \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} &= \frac{x^6-y^6}{x+1} \times \frac{x^2-y^2}{x^3+y^3} = \frac{(x^3+y^3)(x^3-y^3)(x^2-y^2)}{(x+1)(x^3+y^3)} = \\ &= \frac{(x^3-y^3)(x^2-y^2)}{(x+1)} \end{aligned}$$

72) En àlgebra, les més de les vegades no es presenta la divisió indicada pel signe :, sinó en forma de trencat, donant lloc, quan es tracta de divisió de fraccions, a l'anomenada *fracció de fracció* o *fracció complexa*, que és aquella fracció en què un o els dos termes són fraccionaris.

Així:  $\frac{5}{7}$ ,  $\frac{\frac{x^2}{y}}{z}$ ,  $\frac{a + \frac{b}{x}}{c}$ ,  $\frac{a}{t + \frac{y}{c}}$  etc.

són fraccions complexes.

Per reduir les fraccions complexes procedirem com en el cas anterior.

Exemple 1. Reduir la fracció:  $\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y}}$

Tindrem:

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y}} = \frac{x}{y} \times \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x}$$

#### EXERCICIS PER A PRÀCTIQUES

Efectuar les operacions indicades:

- |  |                         |
|--|-------------------------|
| 1. $\frac{a+1}{a-1} \times \frac{1}{a+1}$          | Solució $\frac{1}{a-1}$ |
| 2. $\frac{5x^2y}{7x} \times 21xy$                  | » $15x^2y^2$            |
| 3. $\frac{ab}{a^2-1} : \frac{a}{a+1}$              | » $\frac{b}{a-1}$       |
| 4. $\frac{a^4-b^2}{1+2a+a^2} : \frac{a^2+b}{1+a}$  | » $\frac{a^2-b}{1+a}$   |
| 5. $\frac{1-8b^2+16b^4}{1+2b} : \frac{1-4b^2}{3a}$ | » $3a(1-2b)$            |

# ALGEBRA

## SEGONA PART

### PROBLEMES

1. Efectuar la multiplicació  $(a^2 + a b + b^2) (a - b)$ .
2. Efectuar la multiplicació  $(a^2 - a b + b^2) (a + b)$ .
3. Efectuar la multiplicació

$$(a^m + a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 + \dots + a b^{m-1} + b^m) \cdot (a - b)$$

4. Fer la divisió

$$\frac{2 a^4 - 13 a^3 b + 31 a^2 b^2 - 38 a b^3 + 24 b^4}{2 a^2 - 3 a b + 4 b^2}$$

5. Trobar la valor de

$$\frac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2}$$

6. Simplificar l'expressió

$$\frac{6 a b}{3 c - d} \left( \frac{c + d}{4} - \frac{d}{3} \right)$$

7. Simplificar l'expressió

$$a - \frac{a - b}{1 + a b} \\ 1 + \frac{a(a - b)}{1 + a b}$$

8. Fer el desenrotllament de  $(x + y)^6$  i de  $(x - y)^6$ .
9. Fer desaparèixer els exponents negatius de les expressions

$$\frac{x^{-1}}{a^{-3}}, \frac{a y^{-3}}{b^{-1}}, \frac{(a + b)^{-2}}{c^{-2}}$$

10. Descompondre en els seus factors l'expressió  $4x^3 + 20x - 7x^2 - 35$   
 11. Descompondre en factors les expressions

$$18a^4b^2 - 9a^3b; 21x^6y + 14x^3y^2 - 7x^2y^3; 2x^3y^3 + 4xy^4 - 2xy^3$$

12. Trobar les valors de les sumes

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$i \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

Fixeu-vos, per a la major simplicitat del càlcul, que, per exemple, una expressió com  $b - a$  és igual a l'altra  $a - b$  canviada de signe.

13. Trobar de quina quantitat és el quadrat, l'expressió

$$4x^2 - 12xy + 9y^2$$

14. Cercar la valor de  $(5ax^2 + 3by - 2)^3$ .  
 15. Fer la multiplicació  $(x^2 + x + c - 1)(x - a)$ .  
 16. Elevar al cub les expressions següents  $-3x^2b^2y; 4y^2ax; -5bx^2$ .

17. Trobar la valor de l'expressió  $\sqrt[3]{27x^6y^3z^9}$

18. Trobar les valors de les expressions  $(a^2x^4y^6)^{\frac{1}{2}}; (b^6xy^4)^{\frac{3}{2}}$ .

19. Demostrar que

$$(a^2 + b^2)(m^2 + n^2) - (am + bn)^2 = (an - bm)^2$$

20. Calcular  $\frac{125a^3 - 8b^3}{5a - 2b}$ .

21. Multiplicar  $(a - b)x^2 + a(a - b)x - ab^2$  per  $(a + b)x - a^2$ , i ordenar el resultat segons les potències decreixents de  $x$ .

22. Fer la multiplicació  $(5ab + 3ac - c^2)(-5ab + 3ac - c^2)$ .

R. 290 80  
06 (46.71 Bar) Ext

RF-7-51

