

Mancomunitat de Catalunya

EXTENSIO  
D'ENSENYAMENT  
TÈCNIC



TEXT N.º 9

ALGEBRA

PART III

Carrer d'Urgell 187 Barcelona



# ÀLGEBRA

## 3.<sup>a</sup> PART

### EQUACIONS

#### GENERALITATS

- 1) *Identitat* és una igualtat evident per ella mateixa; així:

$$a=a, 5x=5x$$

són identitats.

La diferència entre igualtat i identitat consisteix en això: que la igualtat, cal demostrar-la, com per exemple

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

mentre que la identitat no necessita demostració, puix és evident.

2) *Equació* és tota igualtat que conté una o més quantitats desconegudes. Tota equació consta de dos membres separats pel signe =; ço que hi ha a l'esquerra és el *primer membre* i ço que és escrit a la dreta és el *segon membre*.

3) *Resoldre una equació* és trobar la valor o valors de les incògnites que *satisfan* l'equació proposta; és a dir, que fan iguals els seus dos membres. Si en lloc de les incògnites hi posem llurs valors, les equacions es transformen en identitats. Per exemple

equació.....	$2x+3=x+5$
valor de la incògnita que satisfà l'equació	2
substitució.....	$2 \times 2+3=2+5$
identitat resultant.....	$7=7$

4) Les equacions provenen d'escriure en llenguatge algèbric l'enunciat d'un problema o sigui de plantejar-lo per a la seva resolució.

Suposem per exemple el problema següent:

Un pare vol repartir 50 duros entre els seus fills, Joan, Pere i Francesc, fent que En Joan tingui 6 duros més que En Pere, i En Pere 4 més que En Francesc.

Representant per  $x$  la part més petita o sigui la d'En Francesc, la d'En Pere serà  $x+4$  (car En Pere tindrà 4 duros més que En Francesc); de la mateixa manera la part d'En Joan serà igual a la d'En Pere augmentada de 6 duros o sigui igual a  $x+4+6$ .



La suma d'aquestes quantitats valdrà

Francesc .....	$x$	
Pere .....	$x + 4$	
Joan .....	$x + 4 + 6$	
Suma total .....	$3x + 8 + 6$	

Segons l'enunciat, aquesta suma deu ésser igual a 50; tindrem doncs l'equació

$$3x + 8 + 6 = 50.$$

La valor de la incògnita (per trobar la qual exposarem més endavant els procediments) és  $x=12$ . En efecte, substituint en l'equació anterior tindrem

$$3 \times 12 + 8 + 6 = 50$$

i verificant les operacions

$$50 = 50$$

identitat que ens demostra que la valor donada a la incògnita satisfà l'equació.

El problema es resol al trobar la valor de la incògnita. (Aquesta valor és anomenada generalment **ARREL DE L'EQUACIÓ**.)

Substituint aquesta valor tindrem el problema resolt:

Francesc.....	$x$	$= 12$
Pere .....	$x + 4$	$= 12 + 4 = 16$
Joan .....	$x + 4 + 6 = 12 + 4 + 6 = 22$	$= 22$
		<hr style="width: 50%; margin-left: auto; margin-right: 0;"/> 50

5) GRAU d'una equació és la suma màxima dels exponents de totes les incògnites d'un mateix terme. Així, les equacions

$$5x - 7a^2 = 24 + 2x$$

$$7x + 6b = 40$$

en què  $x$  és la incògnita, són de *primer grau*, i les equacions

$$4x^2 - 7a^2y = 15$$

$$5x - 36^2y = 3xy - 36^2$$

en què les incògnites són  $x$  i  $y$ , són de *segon grau*; en aquesta última el terme  $3xy$  és de segon grau respecte de les incògnites  $x$  i  $y$ .

Les equacions es classifiquen segons el seu grau; així diem que una equació és de primer grau, de segon, de tercer..... etc.

Les equacions de primer grau són anomenades també **LINEALS**, les de segon **QUADRÀTIQUES**, les de tercer **CÚBIQUES**.

6) Dues equacions són **EQUIVALENTS** quan les valors de les incògnites que satisfan una d'elles satisfan l'altra i recíprocament.

7) La resolució d'una equació de primer grau amb una incògnita es basa en principis molt senzills que anem a exposar i que convé recordar.

Sabem que una equació, després d'haver substituït les valors de la incògnita que la satisfan, es transforma en una identitat o sia en dos números que són iguals. És evident que si a dos números són iguals, i els afegim o en traiem una mateixa quantitat, els números resultants també seran iguals.

Així doncs, de la mateixa manera que  
éssent  $7=7$

s'ha de verificar que  $7+5=7+5$

tindrem que si es verifica l'equació

$$2x+6=10$$

es verificarà per exemple la

$$2x+6+15=10+15$$

i també la

$$2x+6-15=10-15$$

Cal sols substituir per exemple  $x$  per la seva valor 2, que satisfà la primera, per veure que satisfà les altres, i reciprocament, la valor de  $x$  que satisfà les altres satisfarà la primera, és a dir, que sempre les igualtats es transformen en identitats; les equacions, doncs, són equivalents.

Direm doncs:

SI SUMEM O RESTEM UNA MATEIXA QUANTITAT ALS DOS MEMBRES D'UNA EQUACIÓ, L'EQUACIÓ RESULTANT ÉS EQUIVALENT A LA PRIMERA.

8) Si en una equació, com per exemple

$$8x-5=15+2x \quad (1)$$

afegim 5 als dos membres, l'equació es converteix en

$$8x-5+5=15+2x+5$$

o sigui

$$8x=15+2x+5 \quad (2)$$

Com veiem, entre les equacions (1) i (2) no hi ha altra diferencia sinó que el terme  $-5$  que apareix en el primer membre de la (1), apareix en la (2) en el segon membre i amb signe canviat.

De la mateixa manera si restem  $2x$  d'ambdós membres de la (2) arribarem a l'equació

$$8x-2x=15+5$$

que és diferencia de la (2) únicament en el terme  $2x$  del segon membre haver passat al primer, canviat el signe.

Direm doncs,

UN TERME QUALSEVOL D'UNA EQUACIÓ POT PASSAR D'UN MEMBRE A L'ALTRE CANVIANT SON SIGNE.

9) Considerem l'equació

$$8x+42=28x+2$$

Substituint en aquesta equació la valor de la incògnita (que és  $x=2$ ), tindrem la identitat

$$8 \times 2 + 42 = 28 \times 2 + 2 \quad (1)$$

ja que el primer terme val 56 i el segon també 56. Segons vam dir en aritmètica, una igualtat de dos números no s'altera quan multipliquem ambdós membres per un mateix número. Per tant podem multiplicar els membres de la igualtat (1) per un mateix número sense alterar-la.

Per altra part l'equació proposada no és satisfeta, és a dir, no existeix l'igualtat sinó quan la valor de  $x$  és 2, o sigui quan té per valor la (1); així doncs és evident que podrem multiplicar els dos membres d'una equació per un mateix número sense que s'alteri la igualtat entre ambdós membres o sigui que:

SI MULTIPLIQUEM ELS DOS MEMBRES D'UNA EQUACIÓ PER UN MATEIX NÚMERO, AQUESTA ES TRANSFORMA EN UNA ALTRA D'EQUIVALENT.

10) Perquè el raonament anterior sigui rigorós, cal que els números pels quals multipliquem els membres d'una equació, no siguin ZERO NI INFINIT, com pot succeir si multipliquem per una quantitat que conté la incògnita, i donem a aquesta una certa valor.

Per exemple, suposem l'equació

$$2x=8$$

Aquesta equació es satisfà per la valor de  $x=4$ ,  $2 \times 4=8$ ; multiplicant ambdós membres per  $x-3$  tindrem

$$2x(x-3)=8(x-3)$$

Aquesta equació es satisfà per  $x=4$

$$2 \times 4 \times 1=8 \times 1$$

Però es satisfarà també per  $x=3$ ; en efecte:

$$2 \times 3 \times 0=8 \times 0, 0=0$$

Aquesta equació té dues solucions;  $x=4$  i  $x=3$ , o sigui una solució més que la primera, per tant no l'hi és equivalent.

VERITABLEMENT ÇO QUE HAVEM FET HA ESTAT MULTIPLICAR AMBDÓS MEMBRES PER 0 I ÈS CLAR QUE AIXÒ DONARÀ SEMPRE LA SOLUCIÓ  $0=0$ .

Del que havem dit abans deduïm que:

UNA EQUACIÓ, PROVINENT D'UNA ALTRA, PER HAVER MULTIPLICAT AMBDÓS MEMBRES D'AQUESTA PER UNA QUANTITAT QUE CONTÉ LA INCÒGNITA, TÉ GENERALMENT MÉS SOLUCIONS QUE LA PRIMERA.

11) Seguint raonaments semblants als anteriors, trobaríem que:

EN DIVIDIR ELS DOS MEMBRES D'UNA EQUACIÓ PER UN NÚMERO, AQUESTA ES TRANSFORMA EN UNA ALTRA D'EQUIVALENT.

i així mateix trobaríem que:

UNA EQUACIÓ, PROVINENT D'UNA ALTRA PER HAVER DIVIDIT ELS SEUS DOS MEMBRES PER UNA QUANTITAT QUE CONTÉ LA INCÒGNITA, TÉ GENERALMENT MENYS SOLUCIONS QUE LA PRIMERA.

12) Les regles donades en el n.º 9 són certes qualsevol que sigui el signe del número pel qual són multiplicats els membres d'una equació.

Així doncs, si una equació com per exemple la

$$5x - 7 = \frac{24}{5} - 2x$$

la multipliquem per  $-1$  tindrem

$$-5x + 7 = -\frac{24}{5} + 2x$$

que sols es diferencia de l'anterior per ésser els signes canviats, i que serà equivalent a la primera.

Direm doncs:

HOM POT CANVIAR TOTS ELS SIGNES D'UNA EQUACIÓ, SENSE ALTERAR SES SOLUCIONS.

13) Si tenim una equació qualsevulga com la

$$5 + 3x = \frac{x}{4}$$

i multipliquem ambdós membres per 4, tindrem

$$4(5 + 3x) = x$$

en la qual ha desaparegut el denominador.

Direm, doncs

PER FER DESAPARÈIXER EL DENOMINADOR D'UN TERME D'UNA EQUACIÓ, MULTIPLICAREM TOTA L'EQUACIÓ PER LA VALOR DEL DENOMINADOR.

Quan hi ha més d'un denominador, com per exemple en l'equació

$$\frac{8x}{3} + \frac{3}{4} = \frac{1}{6} + \frac{5x}{12} \quad (1)$$

i els volem fer desaparèixer tots, podem procedir com havem dit, per a cada un d'ells.

Multiplant per 3

$$8x - \frac{9}{4} = \frac{3}{6} + \frac{15x}{12}$$

Multiplant aquesta per 4, tindrem

$$32x - 9 = \frac{12}{6} + \frac{60x}{12}$$

Multiplant aquesta per 6, tindrem

$$192x - 54 = 12 + \frac{360x}{12}$$

i multiplicant aquesta per 12, tindrem

$$2304x - 648 = 144 + 360x$$

però resulta més senzill multiplicar tota l'equació pel mínim comú múltiple de tots els denominadors.

El m.c.m. de 8, 4, 6, 12, és 24.

Multiplicant, doncs, tota l'equació (1) per 24, tindrem

$$\frac{24 \times 8}{3}x + \frac{24 \times 3}{4} = \frac{24}{6} + \frac{24 \times 5}{12}x$$

o sigui

$$64x + 18 = 4 + 10x$$

o bé

$$32x + 9 = 2 + 5x$$

Direm doncs:

PER TREURE ELS DENOMINADORS D'UNA EQUACIÓ, MULTIPLICAREM TOTA L'EQUACIÓ PEL MÍNIM COMÚ MÚLTIPLE DELS DENOMINADORS.

## TRANSFORMACIONS

14) Per resoldre una equació cal *preparar-la*, és a dir, sotmetre-la a una sèrie d'operacions que la transformin en una altra d'equivalent i de solució més fàcil.

Les operacions de transformació són les següents:

- 1.<sup>a</sup> Passar termes d'un membre a l'altre;
- 2.<sup>a</sup> Treure denominadors;
- 3.<sup>a</sup> Verificar les operacions indicades, i
- 4.<sup>a</sup> Associar els termes en què aparegui la incògnita elevada a una mateixa potència, ordenant al mateix temps els termes que resultin.

15) Podem traslladar un terme d'una equació de l'un membre a l'altre canviant-lo de signe.

Això és usat freqüentment quan hom vol deixar separada en un dels dos membres una valor.

Per exemple, suposem l'equació

$$x + 27 - 7 = 42$$

en la qual desitgem tenir la valor  $x$  sola en el primer membre.

Per a això passarem el 27 i el 7 al segon membre canviant sos signes, i tindrem:

$$x = 42 - 27 + 7$$

16) Si en una equació com per exemple la  $4x + a = 8 + a$ , traslladem el

terme  $a$  del primer membre al segon,  $4x=8+a-a$ , quedarà  $4x=8$ . Direm, doncs, que SI UN TERME FIGURA EN ELS DOS MEMBRES D'UNA EQUACIÓ, AMB EL MATEIX SIGNE, EL PODEM SUPRIMIR D'AMB DÓS MEMBRES SENSE ALTERAR LA IGUALTAT.

Usant d'aquesta propietat simplifiquem a voltes d'una manera molt notable les equacions. Sigui per exemple:

$$2x+7y-27+x^2=2x+7y+5$$

Suprimim de tots dos membres els termes iguals amb els mateixos signes i tindrem:

$$-27+x^2=5$$

17) Sovint és convenient canviar el signe d'una quantitat o incògnita que figura en una equació. Aconseguim això canviant de signe tots els termes dels dos membres de l'equació. Així  $-x^2+a=10$  és equivalent a  $x^2-a=-10$  (n.º 12), o, ço que és la mateixa cosa, a  $x^2-a+10=0$ .

18) Com ja havem dit, podem multiplicar els dos membres d'una equació per una mateixa quantitat sense alterar-la, i això és usat per deixar l'equació sense trencats.

Per exemple 
$$\frac{a}{x} + 27y + \frac{1}{xy} = 52 \frac{x}{y}$$

multiplicant per  $x$  ambdós membres

$$a \frac{x}{x} + 27xy + \frac{x}{xy} = 52 \frac{x^2}{y}; \quad a + 27xy + \frac{1}{y} = 52 \frac{x^2}{y}$$

multiplicant per  $y$

$$ay + 27xy^2 + 1 = 52x^2$$

Per treure denominadors numèrics, multiplicarem els dos membres de l'equació pel mínim comú múltiple dels denominadors.

Així en l'equació

$$\frac{2x}{3} - \frac{1}{6} + x = \frac{x}{4} - 5 + \frac{x}{2}$$

si multipliquem tots dos membres per 12 (m.c.m. de 2, 3, 4 i 6), obtindrem l'equació

$$8x - 2 + 12x = 3x - 60 + 6x$$

que serà equivalent a la donada i amb termes enters.

19) En tota expressió algebàrica podem isolar en un dels seus membres, una de les quantitats que hi figuren; sotmetent l'expressió a una sèrie de transformacions com les explicades abans.

Així per exemple, volem separar la  $x$  de

$$\frac{x^3}{y} - 5m \frac{x}{y} + 7xy = x + 2axy$$

Dividint per  $x$  ambdós membres, queda

$$\frac{x^2}{y} - 5 \frac{m}{y} + 7y = 1 + 2ay$$

Passant al 2.<sup>on</sup> membre els termes independents de  $x$

$$\frac{x^2}{y} = 5 \frac{m}{y} - 7y + 2ay + 1$$

multiplicant per  $y$

$$x^2 = 5m - 7y^2 + 2ay^2 + y$$

extraient l'arrel quadrada

$$x = \sqrt{5m - 7y^2 + 2ay^2 + y}$$

Havem, doncs, separat la  $x$ .

20) En tota equació podem fer igual a zero un membre, o sigui que podem deixar l'equació en la forma

$$A = 0$$

en la qual  $A$ , si la sotmetem a les transformacions necessàries per aconseguir-ho, representarà un polinomi enter respecte d'aquesta incògnita o incògnites. L'equació posada en aquesta forma és anomenada ENTERA.

Així, per exemple, l'equació

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{x} + \frac{1}{6}$$

pot ésser reduïda a la forma  $A=0$ , traient denominadors i traslladant al primer membre tots els termes que figuren en el segon.

Multiplicant ambdós membres per  $12x$  (m.c.m. dels denominadors), tindrem

$$4x^2 - 3x = 96 + 2x$$

i traslladant al primer membre els termes  $96$  i  $2x$  del segon (canviant els seus signes) i reduint els termes semblants, obtindrem finalment l'equació

$$4x^2 - 5x - 96 = 0$$

el primer membre de la qual és un polinomi enter [de segon grau que és el que havem anomenat  $A$ ].

21) En general una EQUACIÓ SERÀ DE GRAU  $n$  amb relació a una incògnita, si reduïda a la forma  $A=0$ , és  $n$  el major exponent amb què hi figura la incògnita. Si falta algun terme, l'equació és anomenada *incom-*

pleta. La suma dels termes que no tenen incògnita o que la tenen amb exponent zero, és anomenada terme ABSOLUT O INDEPENDENT.

Mai no havem de jutjar sobre el grau d'una equació sense haver-la prèviament reduïda a la forma  $A=0$ , puix podríem ésser induïts fàcilment a un error.

Així, l'equació  $(x+3)^2-3x(4x+1)=5x^2-(4x-5)^2$

sembla ésser quadràtica o de segon grau. No obstant, reduïda a la forma  $A=0$ , un cop verificades les operacions indicades i sotmesa a les reduccions necessàries tindrem:

$$x^2+9+6x-12x^2-3x=5x^2-16x^2-25+40x$$

$$11x^2-11x^2-37x+34=0$$

$$37x-34=0$$

L'equació serà, doncs, *lineal* (de primer grau respecte de  $x$ ).

22) Anomenarem EQUACIÓ PURA, respecte d'una incògnita, l'equació en la qual tots els exponents de la incògnita siguin iguals; en cas contrari és anomenada MIXTA. Així, l'equació  $x^2-4=0$ , és una equació QUADRÀTICA PURA, i l'equació  $x^3+2x+6=0$ , és una equació CÚBICA i MIXTA.

EXERCICIS

Treure els denominadors en les equacions següents:

1.  $x + \frac{3x}{4} + \frac{8}{6} = 12 - \frac{4}{x}$  Solució  $12x^2+9x^2+16x=144x-48$

2.  $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x-2}{5} = \frac{y}{6}$  »  $10x-15x+6x-12=5y$

3.  $\frac{1}{a-b} = \frac{x}{a-b} - \frac{a+b}{x}$  »  $x=x^2-a^2+b^2$

Reduir a 0 el segon membre de les equacions:

4.  $12x^2+9x^2+16x=144x-48$  Solució  $12x^2+9x^2+16x-144x+48=0$

5.  $10x-15x+6x-12=5y$  »  $10x-15x+6x-12-5y=0$

6.  $x=x^2-a^2+b^2$  »  $x^2-a^2+b^2-x=0$

Simplificar les equacions següents:

7.  $12x^2+9x^2+16x-144x+48=0$  Solució  $21x^2-128x+48=0$

8.  $10x-15x+6x-12-5y=0$  »  $x-5y-12=0$

Isolar el valor de  $I$ , en la primer membre, en les següents expressions algèbriques:

$$10. V=RI$$

$$\text{Solució } I = \frac{V}{R}$$

$$11. W=RI^2$$

$$» \quad I = \sqrt{\frac{W}{R}}$$

$$12. EI t = RI^2 t + e I t$$

$$» \quad I = \frac{E-e}{R}$$

### RESOLUCIÓ DE LES EQUACIONS LINEALS AMB UNA INCÒGNITA

**23)** Segons havem dit, podem posar (n.º **20**) tota equació en tal forma que el segon membre sigui zero.

La forma típica de l'equació de primer grau amb una incògnita serà, doncs

$$ax + b = 0$$

en què l'incògnita es presenta sense exponent o sigui amb exponent unitat i en què  $a$  i  $b$  representen quantitats conegudes.

**24)** En les equacions LINEALS amb una incògnita, la quantitat desconeguda (incògnita) és representada generalment per la lletra  $x$ . Les quantitats conegudes són representades per guarismes o per les primeres lletres de l'alfabet. En aquest darrer cas l'equació és anomenada *literal*.

**25)** Per resoldre una equació lineal amb una incògnita, cal procedir amb ordre.

$$\text{Suposem l'equació} \quad \frac{x}{3} - \frac{1}{4} = \frac{x}{8} + \frac{1}{6}$$

1.º Fem desaparèixer els denominadors, multiplicant per 24 que és el m.c.m. dels denominadors.

$$\frac{24}{3}x - \frac{24}{4} = \frac{24}{8}x + \frac{24}{6}$$

(Com podem veure, havem multiplicit els numeradors i havem separat el factor  $x$  per a deixar únicament els trencats numèrics.)

Els denominadors desapareixen després desenrotllant els càlculs indicats quedant:

$$8x - 6 = 3x + 4$$

2.ºn Traslladem els termes amb incògnita al primer membre i els independents al segon:

$$8x - 3x = 6 + 4$$

3.<sup>er</sup> Reduïm els termes semblants:

$$5x=10$$

4.<sup>t</sup> Separem la incògnita dividint l'equació pel seu coeficient per a trobar sa valor o sia l'arrel de l'equació

$$x = \frac{10}{5} = 2$$

És convenient sempre fer la comprovació, substituint la valor de l'arrel en l'equació primitiva:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{8} + \frac{1}{6}, \quad \frac{8-3}{12} = \frac{12+8}{48}, \quad \frac{5}{12} = \frac{20}{48}, \quad \frac{20}{48} = \frac{5 \times 4}{12 \times 4} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{5}{12}$$

No cal seguir sempre en absolut el procés indicat, puix és possible abreujar alguna operació. En el segon exemple veurem com ho podem fer.

Exemple 2.<sup>on</sup> Resoldre l'equació

$$(x-1)(x-2)=x^2$$

Comencem efectuant les operacions indicades:

1.<sup>a</sup> operació:  $x^2 - 2x - x + 2 = x^2$

2.<sup>a</sup> operació:  $x^2 - x^2 - 2x - x = -2$

3.<sup>a</sup> operació:  $-3x = -2$

4.<sup>a</sup> operació:  $x = \frac{2}{3}$

Comprovació:

$$\left(\frac{2}{3} - 1\right)\left(\frac{2}{3} - 2\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$-\frac{1}{3} \times -\frac{4}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

26) Si l'equació té termes fraccionaris i alguns dels denominadors són monomis i altres polinomis, traurem prèviament els denominadors monomis, multiplicant les fraccions pel m.c.m. dels dits denominadors: després traurem els denominadors polinomis. Així queden reduïdes a equacions lineals algunes equacions que a primera vista semblen de grau superior.

Exemple: Resoldre l'equació

$$\frac{4x+2}{6} = \frac{2x}{3} + \frac{x+2}{2(3x+1)}$$

Traiem els denominadors monomis multiplicant pel m.c.m., que és 6.

$$4x+2=4x+\frac{6(x+2)}{2(3x+1)}$$

Suprimint els termes semblants i traient després el denominador polinomi, multiplicant ambdós membres de l'equació per  $2(3x+1)$ ,

$$4(3x+1)=6(x+2); \text{ d'on } 12x+4=6x+12$$

passant els termes amb  $x$  al 1.<sup>er</sup> membre i els altres al segon:

$$12x-6x=12-4 \text{ d'on } 6x=8$$

per tant l'arrel de l'equació serà

$$x=\frac{8}{6}$$

### EXERCICIS

Resoldre les equacions següents:

$$1. \frac{5x-2}{4} - \frac{x-8}{3} = \frac{x-1}{2} + 5$$

$$\text{Solució } x = \frac{28}{5}$$

$$2. \frac{4x}{3} - \frac{10x}{7} = -\frac{2x+20}{4}$$

$$\text{» } x = -\frac{210}{17}$$

$$3. \frac{3-2x}{1-x} = \frac{5-8x}{3-4x}$$

$$\text{» } x = \frac{4}{5}$$

$$4. \frac{x+1}{3} - \frac{x+4}{5} = 16 - \frac{x+3}{4}$$

$$\text{» } x = 41$$

$$5. 2x-4a=3ax+a^2-a^2x$$

$$\text{» } x = \frac{a^2+4a}{a^2-3a+2}$$

$$6. \frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{» } x = 3$$

Resolució de l'equació 6:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{4x}{(x-1)(x+1)}$$

$$1 + \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+(x+1)}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$$

doncs

$$\frac{\frac{4x}{(x-1)(x+1)}}{\frac{2x}{x-1}} = \frac{1}{2}$$

i traiem el denominador del primer terme,

$$\frac{4x}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x-1} = \frac{x}{x-1}$$

$$4x(x-1) = x(x-1)(x+1)$$

o ço que és igual

$$4 = x+1$$

Solució  $x=3$

### EQUACIONS DE PRIMER GRAU

27) La resolució d'un problema comprèn dues parts: 1.<sup>a</sup> PLANTEJAMENT DEL PROBLEMA, és a dir, establiment de les equacions que defineixen les relacions existents entre les quantitats conegudes i les desconegudes; 2.<sup>a</sup> RESOLUCIÓ DE L'EQUACIÓ, o sigui la cerca de les valors de les incògnites que satisfan les equacions.

Havem indicat les regles per resoldre les equacions amb una incògnita, però la marxa que havem de seguir per posar un problema en equació, no és susceptible d'esser formulada d'una manera tan precisa. En molts casos senzills, n'hi ha prou (després d'haver representat les incògnites per lletres) escrivint textualment l'enunciat del problema, bo i servint-se dels signes de l'àlgebra. Però generalment l'enunciat del problema no es presta a aquesta traducció immediata en llenguatge algèbric; en aquests casos la regla millor que podem seguir, és, després d'examinar atentament les condicions de l'enunciat i de representar les incògnites per lletres, raonar com si aquestes lletres representessin quantitats conegudes, i escriure les operacions que caldria fer per expressar que aquestes valors de les incògnites satisfan efectivament l'enunciat. D'aquesta manera s'arriba sense gran dificultat a les equacions del problema.

28) Alguns exemples faran comprendre clarament el precepte anterior.

Problema 1.<sup>er</sup> Dues aixetes ragen en un dipòsit; la primera pot omplir-lo en 4 hores i la segona en 6 hores. Quant temps hauran de rajar juntes per omplir-lo?

Designem per  $x$  el nombre d'hores que hauran de rajar juntes les aixetes per omplir el dipòsit i raonem com si volguéssim assegurar-nos que en aquest temps, suposat conegut, les dues aixetes omplen efectivament el dipòsit. La primera aixeta rajant sola, omple el dipòsit en 4 hores, doncs en una hora omplirà  $\frac{1}{4}$  del dipòsit; en  $x$  hores donarà una quantitat d'aigua  $x$  vegades aquesta, o sigui  $\frac{x}{4}$ . La segona aixeta, rajant sola, omple el dipòsit en 6 hores; en una hora omplirà  $\frac{1}{6}$  del dipòsit, i en  $x$  hores om-

plirà  $\frac{x}{6}$ . En el temps  $x$  les dues aixetes ragen juntes, per tant, la quantitat d'aigua que donen serà  $\frac{x}{4} + \frac{x}{6}$ . Però en aquest temps les dues aixetes omplen el dipòsit, i prenent la capacitat del dipòsit igual a l'unitat tindrem

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 1 \quad (1)$$

que és l'equació del problema.

Per resoldre-la treurem primerament els denominadors; en aquest cas el mínim comú múltiple de 4 i 6 és 12. Multiplicarem, doncs, per 12 tots els termes de l'equació i tindrem

$$\frac{12x}{4} + \frac{12x}{6} = 12$$

o bé

$$3x + 2x = 12$$

$$5x = 12$$

d'on

$$x = \frac{12}{5} = 2^h + \frac{2}{5} = 2^h 24^m$$

Així les dues aixetes hauran de rajar juntes durant 2 hores i 24 minuts per a omplir el dipòsit.

Verificació: substituïnt  $x$  per la seva valor  $\frac{12}{5}$  en l'equació (1) resulta

$$\frac{12}{5 \times 4} + \frac{12}{5 \times 6} = 1$$

o sigui, simplificant,

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

ço que és evident.

**Problema 2.<sup>on</sup>** Un pare té 40 anys i el seu fill en té 10. Quants anys hauran de passar perquè l'edat del pare sigui tripla de la del fill?

Sigui  $x$  el número d'anys buscat. Transcorregut aquest temps, l'edat del pare serà  $40+x$ , i la del fill serà  $10+x$ . Com que en aquesta època l'edat del pare deu ésser tripla de la del fill, tindrem l'equació

$$40+x = 3(10+x)$$

de la qual resulta

$$40+x = 30+3x$$

$$40-30 = 3x-x$$

$$10 = 2x$$

$$x = \frac{10}{2} = 5$$

De manera que transcorreguts 5 anys l'edat del pare serà tripla de la del fill; i en efecte, llavors el pare tindrà 45 anys i el fill 15, i 45 és efectivament el triple de 15.

**Problema 3.<sup>er</sup>** Dos homes surten al mateix temps de dos pobles que disten l'un de l'altre 63 km. i es dirigeixen l'un envers l'altre. El primer fa 4 km. per hora i el segon en fa 3. Quins camins hauran recorregut al moment de trobar-se?

Anomenant  $x$  el membre d'hores que hauran caminat fins a trobar-se, podem plantejar l'equació

$$4x + 3x = 63$$

ço que ens donarà

$$x = 9$$

**29)** Els problemes poden ésser DETERMINATS, IMPOSSIBLES O INDETERMINATS. Són DETERMINATS, si tenen una solució o un nombre limitat de solucions: IMPOSSIBLES, quan no tenen cap solució; i INDETERMINATS, quan tenen infinites solucions.

**30)** La major o menor facilitat de la resolució d'un problema depèn de la forma en què ha estat plantejat, i aquesta així mateix depèn de la major o menor facultat de raonar, és a dir, de l'habilitat de l'operador. És essencialment una qüestió de perícia personal que s'acreix, naturalment, resolent molts problemes.

**31)** Problema determinat. Un client proposa a la Companyia que l'assorteix d'electricitat, pagar-li els 100 kw. que gasta al mes a raó de 0,25 pts. en lloc de pagar-li el kw. de llum a 0,60 pts. i el de força a 0,20 pts. En quina proporció haurà de gastar el llum i la força perquè la Companyia no perdi ni guanyi?

Sigui  $x$  el número de kw. de llum, el de força serà  $100 - x$ ; si 1 kw. de llum val 0,60 pts. el que hauria hagut de pagar per llum seria  $0,6x$ , i per força  $(100 - x)0,2$ . Perquè la Companyia pugui acceptar aquest canvi és precis que la suma de les anteriors quantitats sigui igual a  $100 \times 0,25$ .

L'equació serà doncs

$$0,6x + (100 - x)0,2 = 100 \times 0,25$$

verificant les operacions i reduint tindrem

$$0,4x = 5$$

d'on

$$x = \frac{5}{0,4} = 12,5$$

de manera que haurà de gastar 12,5 kw. de llum i  $100 - 12,5 = 87,5$  kw. de força.

La proporció serà doncs

$$\frac{87,5}{12,5} = 7$$

o sigui 7 vegades més de força que de llum

Comprovació:

12,5 kw. de llum a 0,60 pts. són 7,5 pts.

87,5 » » força a 0,20 » » 17,5 »

total 25,0 pts.

100 kw. a 0,25 pts. són 25 pts.

32) CASOS D'IMPOSSIBILITAT. Un problema pot ésser IMPOSSIBLE:

1. PERQUÈ L'EQUACIÓ QUE RESULTI DE PLANTEJAR-LO NO TINGUI RESOLUCIÓ.

2. PERQUÈ TOT I TENINT SOLUCIÓ, AQUESTA SOLUCIÓ NO COMPLEIXI LES CONDICIONS IMPOSADES PER L'ENUNCIAT.

Exemple 1.<sup>er</sup>

Problema: Un estany té dues aixetes d'entrada i una de sortida; la primera el pot omplir en 3 hores i 20 minuts o sigui  $3 + \frac{1}{3}$  hores, si es troben tancades les altres dues; la segona el pot omplir per ella sola en 5 hores i la tercera el pot buidar en 2 hores. Si obrim totes tres aixetes a la vegada, quant temps tardarà a omplir-se?

Representem per  $x$  el temps (en hores) cercat i per 1 la capacitat de l'estany. La quantitat d'aigua que sortirà per la primera aixeta per hora serà  $\frac{1}{3 + \frac{1}{3}}$ ; doncs en  $x$  hores en sortirà  $\frac{1}{3 + \frac{1}{3}}x$ .

La que sortirà en  $x$  hores per la segona aixeta serà  $\frac{1}{5}x$  i la que sortirà per la tercera aixeta també en  $x$  hores, serà  $\frac{1}{2}x$ .

Segons l'enunciat, l'estany s'haurà d'omplir d'una quantitat 1 d'aigua, aleshores la diferència entre l'aigua que ha entrat i la que ha sortit durant el temps  $x$  serà 1.

L'equació de condició serà doncs

$$\frac{1x}{3 + \frac{1}{3}} + \frac{1x}{5} - \frac{1x}{2} = 1$$

o sigui

$$\frac{x}{3+\frac{1}{3}} + \frac{x}{5} - \frac{x}{2} = \frac{3x}{10} + \frac{x}{5} - \frac{x}{2} = \frac{30x+20x-50x}{100} = 1$$

d'on

$$\begin{aligned} 30x+20x-50x &= 100 \\ 3x+2x-5x &= 10 \quad (3+2-5)x=10 \end{aligned}$$

o sigui

$$0 \times x = 10$$

No hi ha cap número que multiplicat per 0 dongui 10, per tant el problema és *impossible*. Aquesta solució indica que és IMPOSSIBLE que l'estany s'ompli.

Fixem-nos en l'enunciat i comprovarem que l'estany s'ompliria, si fossin obertes les dues primeres aixetes, en un temps  $x$ , per la qual cosa tindríem

$$\frac{3x}{10} + \frac{x}{5} = 1, \quad x = \frac{10}{5} = 2$$

i com que precisament la tercera aixeta buidarà l'estany en dues hores, tota l'aigua que entraria per les dues primeres aixetes sortiria per la tercera.

Exemple 2.<sup>on</sup>

Problema: Una persona vol pagar 50 pessetes amb peces de 5 pessetes i 2 pessetes, i amb un total de 12 peces. Quantes monedes ha de donar de duro i quantes de dues pessetes?

Si representem per  $x$  el nombre de monedes de 5 pessetes, el nombre de monedes de dues pessetes deurà ésser  $12-x$ .

La suma pagada serà  $5x+2(12-x)$  que, segons l'enunciat haurà d'ésser igual a 50 pessetes.

$$5x + 2(12-x) = 50$$

$$5x + 24 - 2x = 50$$

$$3x = 50 - 24 = 26$$

$$x = \frac{26}{3}$$

El nombre de monedes de 5 pessetes serà  $\frac{26}{3}$ , nombre fraccionari irreductible.

i 
$$12 - \frac{34}{3} = \frac{10}{3}$$

el nombre de monedes de 2 pessetes és també fraccionari.

L'equació té solució, però aquesta solució no satisfà l'enunciat del problema, és a dir, no és possible pagar 50 pessetes amb 12 peces, de duro i 2 pessetes.

El problema és *impossible*.

33) *En resoldre l'equació pot succeir que la solució sigui negativa; i si l'enunciat del problema exigeix una solució positiva el problema serà impossible.*

Si la incògnita és una magnitud susceptible d'ésser comptada en dos sentits oposats (un temps, una distància, una quantitat de diner que pugui ésser guanyada o perduda, etc.), podrà admetre el problema la solució negativa. El signe — que precedeix la incògnita indica que caldrà prendre-la en sentit oposat a aquell que li ha estat assignat en l'enunciat.

Problema: Un industrial ven ferro a 117 pessetes per 100 quilos, i realitza un guany net del 8 % d'aquesta quantitat. Si vengués a 104 pessetes, quin tant per cent d'aquesta quantitat seria el seu guany?

Si quan ven a 117 pessetes, guanya el 8 %, el preu de cost, igual al preu de venda menys la ganància, serà:

$$117 - 117 \times 0,08$$

El guany que faria si venia el mateix ferro a 104 pessetes, pot posar-se sota la forma  $104 \times \frac{x}{100}$ , en què  $x$  és el tant per cent: aquest guany ha d'ésser evidentment igual a la diferència entre el preu de venda i el preu de cost; per tant:

$$104 \times \frac{x}{100} = 104 - (117 - 117 \times 0,08)$$

$$x = 100 \frac{104 - (117 - 117 \times 0,08)}{104}$$

$$x = 100 \frac{104 - 117 + 117 \times 0,08}{104}$$

$$x = 100 \frac{104 - 107,64}{104} \quad x = -3,50$$

La solució no convé al problema per ésser negativa.

Per comprovar si és exacta aquesta interpretació, MODIFIQUEM L'ENUNCIAT CANVIANT EL SENTIT EN QUÈ CAL PENDRE LA INCÒGNITA I TORNEM A PLANTEJAR EL PROBLEMA.

L'EQUACIÓ NOVA ES DEDUIRÀ DE L'EQUACIÓ PRIMITIVA SUBSTITUINT-HI  $x$  PER  $-x$ .

Canviem l'enunciat i diguem: Quin % haurà perdut en vendre a 104 pessetes?...

L'equació de condició seria

$$104 + \frac{-x}{100} = 104 - (117 - 117 \times 0,08)$$

la solució:  $x = 3,50 \%$

satisfà l'enunciat corregit, i la obtenim en canviar en l'equació de condició  $x$  per  $-x$ .

La solució és correcta.

**34)** En alguns problemes, la solució pot ésser indistintament positiva o negativa; en aquest cas plantejarem el problema com si la valor hagués d'ésser positiva, i del resultat obtingut deduirem quin signe ha de tenir.

Problema: De quin número caldrà augmentar o disminuir les quatre parts dels dos productes  $72 \times 43$  i  $124 \times 27$  perquè els dits productes siguin iguals?...

Representem per  $x$  el número que suposem que cal afegir a les quatre parts.

L'equació serà:

$$(72+x)(43+x) = (124+x)(27+x)$$

d'on

$$72 \times 43 + 43x + 72x + x^2 = 124 \times 27 + 27x + 124x + x^2$$

$$(43 + 72 - 27 - 124)x = 124 \times 27 - 72 \times 43$$

$$-36x = 252 \quad x = -\frac{252}{36} = -7$$

Caldrà, doncs, restar (no afegir) de cada part, el número 7.

**35) CASOS D'INDETERMINACIÓ.** Hi ha indeterminació quan el nombre de solucions de l'equació és infinit, és a dir, quan el nombre de valors de la incògnita que satisfan l'equació és infinit.

Sabem que tota equació de primer grau amb una incògnita pot ésser escrita en la forma

$$ax = b$$

Si es verifica a la vegada que  $a=0$  i  $b=0$  l'equació queda convertida en

$$0x = 0$$

i és evident que el nombre de solucions d'aquesta equació és infinit ja que qualsevol número multiplicat per zero dóna zero per resultat; per tant, la valor de la incògnita és indeterminada. En el cas anterior la incògnita té per expressió

$$x = \frac{0}{0}$$

que és el símbol de la indeterminació.

36) Un exemple farà comprendre com un problema pot ésser indeterminat, ço es, tenir un nombre infinit de solucions.

Trobar un número que augmentat del seu sisè i de 10, i disminuït de la seva meitat sigui igual al doble del seu terç augmentat de 5.

Designant per  $x$  el número cercat, tindrem l'equació

$$x + \frac{x}{6} + 10 - \frac{x}{2} = 2\left(\frac{x}{3} + 5\right)$$

que simplificada es redueix a

$$\frac{2x}{3} + 10 = \frac{2x}{3} + 10 \quad \text{d'on} \quad \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)x = 10 - 10$$

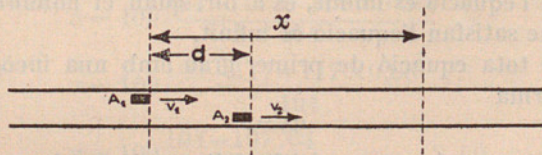
o bé

$$0x = 0$$

Tots els números satisfan el problema. Hi ha indeterminació.

37) Fins ara, havem donat sempre valors concretes a les dades dels problemes però la cosa més general en àlgebra és representar totes les quantitats per lletres, tant les dades com la incògnita. L'expressió final, en què un dels membres és la incògnita, rep el nom de *fórmula*. La valor de la incògnita es troba substituint les dades per les valors numèriques que els corresponen en cada cas particular.

Exemple: Suposem dos automòbils  $A_1$  i  $A_2$  que corren per una carretera a  $v_1$  i  $v_2$  km. per hora respectivament (vegeu la figura). En un moment donat es troben a una distància  $d$  l'un de l'altre, anant ambdós en el sentit indicat. Volem saber a quina distància de la posició en què es troba el primer automòbil es creuraran.



Designem per  $x$  la distància cercada. El temps que l'automòbil  $A_1$  trigarà a recórrer aquesta distància serà  $\frac{x}{v_1}$ ; el temps en què l'automòbil  $A_2$  recorrerà la distància  $x - d$  que li falta per a arribar al mateix punt serà  $\frac{x-d}{v_2}$ . Perquè els dos automòbils es trobin cal que aquests temps siguin iguals; per tant tindrem l'equació

$$\frac{x}{v_1} = \frac{x-d}{v_2}$$

que, resolta, dóna

$$x = \frac{v_1 d}{v_1 - v_2}$$

que és la fórmula que resol el problema general.

38) DISCUSSIÓ DE LA FÓRMULA  $x = \frac{v_1 d}{v_1 - v_2}$ .

Discutir una fórmula és trobar quina mena de valors pren la incògnita quan donem diverses valors a les quantitats conegudes:

Així si en la fórmula  $x = \frac{v_1 d}{v_1 - v_2}$  suposem que  $d = 2$  qm.,  $v_1 = 40$  i  $v_2 = 30$  o sigui que l'automòbil  $A_1$  va a 40 qm. per hora i el  $A_2$  a 30 qm. per hora, tindrem per a valor de la incògnita

$$x = \frac{40 \times 2}{40 - 30} = 8$$

ço que vol dir que els dos automòbils es trobaran a una distància de 8 quilòmetres de la posició  $A_1$  o sigui de 6 qm. de la posició  $A_2$  i en efecte, per recórrer 8 quilòmetres el primer automòbil emprarà  $\frac{8}{40} = 0,2$  hores, i el segon emprarà  $\frac{6}{30} = 0,2$  hores per recórrer els 6 quilòmetres fins arribar al punt on se creuen.

Si suposem que l'automòbil  $A_1$  marxa a 30 qm. per hora i el  $A_2$  a 40, la valor de  $x$  serà

$$x = \frac{30 \times 2}{30 - 40} = -6$$

Això pot fer creure que el problema és impossible, però si suposem positives les distàncies comptades d'esquerra a dreta, les negatives hauran d'ésser comptades de dreta a esquerra i la valor trobada,  $-6$  km., voldrà dir que els automòbils ja s'havien creuat en un punt que dista 6 km. del punt  $A_1$  i està situat a l'esquerra de dit punt.

Si les velocitats amb què marxen els dos automòbils fossin iguals, qualsevol que fossin, la valor de  $x$  vindria representada per

$$x = \frac{v_1 d}{0} = \text{infinít}$$

és a dir, que el punt en què es trobarien està a una distància infinita i per tant tardarien un temps infinit a creuar-se. Tot això és una manera de dir que no es trobarien mai i en efecte, marxant a la mateixa velocitat conservarien sempre la seva distància  $d$ .

39) Per comprendre què vol dir una quantitat infinita, fixem-nos en l'equació general

$$ax = b$$

Si suposem que la valor absoluta del coeficient  $a$  és molt petita, la incògnita, donada per la fórmula

$$x = \frac{b}{a}$$

serà molt gran en valor absoluta i si concebem que la valor absoluta del coeficient  $a$  disminueix fins a reduir-se a zero, la valor absoluta de  $x$  augmentarà de manera a arribar a ésser més gran que tota quantitat donada.

Per exemple, si la valor de  $b$  és positiva i donem al coeficient  $a$  les valors successives

$$\frac{1}{10} \quad \frac{1}{100} \quad \frac{1}{1000}$$

el quocient  $x$  pendrà les valors més i més grans

$$10b \quad 100b \quad 1000b$$

Quan una quantitat augmenta així, fins arribar a ésser més gran que tota quantitat donada, es diu que esdevé *infinita* i la representem pel signe  $\infty$ : així la fórmula últimament trobada en el número anterior és escrita

$$x = \frac{v.d}{0} = \infty$$

### RESOLUCIÓ DE DUES EQUACIONS LINEALS AMB DUES INCÒGNITES

40) Moltes vegades els problemes se'ns presenten no amb una sola quantitat desconeguda, sinó amb dues o més, donant lloc a les equacions amb dues o més incògnites.

Sigui, per exemple, el problema següent:

En Xavier té un nombre de cavalls tal, que si en dóna un a En Joan, ambdós en tenen igual. Quin nombre de cavalls tenen l'un i l'altre?

Si anomenem  $x$  el nombre de cavalls que té En Xavier i  $y$  el dels que té En Joan, tindrem l'equació

$$x - 1 = y + 1$$

d'on resulta

$$x = y + 2$$

Palesament es veu que hi ha infinites valors que poden satisfer

aquesta equació, ja que donant a  $y$  una valor qualsevol, s'obté per a  $x$  una valor que satisfà l'equació.

Així, si  $y$  igual a  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$   
obtenim valors de  $x$  iguals a  $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$

Veiem, doncs, que aquest problema admet infinites solucions.

Però si en el problema, demés de la condició expressada, hi posem aquesta: si En Xavier en lloc de donar-ne un a En Joan en rebés un d'aquest, en tindrà el doble que En Joan, podríem plantejar l'equació

$$x+1=2(y-1)$$

d'on resulta

$$x=2y-3$$

i donant diferents valors a  $y$ , com hem fet abans, tindrem

per a  $y=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$   
 $x=1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots$

Comparant aquests grups de valors amb els anteriorment trobats, veiem que n'hi ha sols un, el  $y=5, x=7$  que satisfà a la vegada les dues equacions. Així doncs, el problema és perfectament determinat, puix que sols una valor de  $x$  i una altra de  $y$  satisfan les equacions proposades.

Segons hem vist doncs, UN PROBLEMA QUE CONDUUEIX A UNA EQUACIÓ LINEAL AMB DUES INCÒGNITES, ÉS SEMPRE INDETERMINAT, i també que LA INDETERMINACIÓ DESAPAREIX QUAN DÓNA LLOC A DUES EQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES.

41) Anomenem sistema d'equacions el grup d'aquestes que, derivades d'un mateix problema, són satisfetes simultàniament per unes mateixes valors de les incògnites.

El procediment que havem seguit per trobar les valors de les incògnites que satisfieien les equacions, seria enfadós en la pràctica, i així procedim d'una altra manera que permet trobar més fàcilment i amb més rapidesa les valors de les incògnites.

Les dues equacions abans trobades

$$\begin{cases} x-1=y+1 \\ x+1=2(y-1) \end{cases}$$

formen el sistema d'equacions simultànies del problema. Si de la primera de dites equacions traiem la valor de  $x$ , resulta

$$x=y+2$$

Substituint aquesta valor en la segona equació tindrem la nova equació

$$y+2+1=2(y-1)$$

equivalent a ella, puix que la valor de  $x$  ha estat substituïda per la valor  $y+2$  que sabem que dintre del problema li ha d'ésser igual.

El nou sistema d'equacions serà, doncs, ara

$$\begin{cases} x=y+2 \\ y+2+1=2(y-1) \end{cases}$$

però la segona equació conté sols una incògnita, és a dir, que n'havem ELIMINAT la incògnita  $x$ . La resolució d'aquesta equació ens dona

$$y=5$$

la valor de la qual, substituïda en la primera equació  $x=y+2$ , ens dona la valor

$$x=7$$

Les valors  $y=5$ ,  $x=7$  són les que solucionen el problema; valors que, com era d'esperar, són iguals a les trobades primerament.

**42) MÈTODE D'ELIMINACIÓ PER SUBSTITUCIÓ.** El procediment que hem seguit per eliminar una incògnita és anomenat d'ELIMINACIÓ PER SUBSTITUCIÓ, i consisteix en això:

TREURE D'UNA DE LES DUES EQUACIONS PROPOSTES, LA VALOR D'UNA DE LES INCÒGNITES I SUBSTITUIR-LA EN L'ALTRA EQUACIÓ; amb la qual cosa obtenim una equació amb una incògnita que resollem pels procediments ordinaris. La valor així trobada és substituïda en la primera equació i obtenim una altra equació amb una sola incògnita, que, resolta, donarà la valor de l'altra incògnita.

**43) MÈTODE D'ELIMINACIÓ PER IGUALACIÓ.** Un sistema d'equacions pot ésser també resolt SEPARANT DE CADA UNA D'ELLES UNA MATEIXA INCÒGNITA, I IGUALANT LLURS VALORS, amb la qual cosa s'obté, com en el cas anterior, una equació amb una sola incògnita; la valor de la incògnita treta d'aquesta equació, substituïda en qualsevol de les anteriors, ens fa conèixer la valor de l'altra incògnita.

Suposem el sistema anterior:

$$\begin{cases} x-1=y+1 \\ x+1=2(y-1) \end{cases}$$

que s'esdevindrà

$$(1) \quad \begin{cases} x=y+2 \\ x=2(y-1)-1 \end{cases}$$

d'on, igualant les valors de  $x$

$$y+2=2(y-1)-1$$

i d'aquí

$$y=5$$

Substituint aquesta valor en qualsevol de les equacions del sistema (1) ens donarà

$$\begin{cases} x=5+2=7 \\ x=2(5-1)-1=7 \end{cases}$$

**44) MÈTODE D'ELIMINACIÓ PER REDUCCIÓ.** Aquest procediment que és anomenat també d'ADDICIÓ o SOSTRACCIÓ, consisteix a transformar una de les equacions en una altra en què una de les incògnites tingui el mateix coeficient que té en l'altra equació; segons els signes del terme d'aquesta incògnita siguin iguals o diferents, seran restades o sumades ambdues equacions, i amb això resultarà, com abans, una equació amb una sola incògnita.

Si les equacions es presenten ja en aquesta forma, procedirem directament a llur suma o resta.

Així, si en el sistema anterior

$$\begin{cases} x-1=y+1 \\ x+1=2(y-1) \end{cases}$$

verifiquem les operacions indicades, i procedim a la resta d'ambdues equacions, tindrem

$$\begin{cases} x-1=y+1 \\ x+1=2y-2 \\ \hline -2=-y+3 \end{cases}$$

d'on  $-5=-y$  o sigui  $y=5$ , i substituint aquesta valor en qualsevolga de les equacions primitives, tindrem la valor de l'altra incògnita

$$x=7$$

Sigui, per exemple, un altre sistema tal com

$$\begin{cases} 3x+6=12y-3 \\ x+1=y+7 \end{cases}$$

Multiplicant la segona equació per  $-3$ , i sumant-la amb la primera, tindrem

$$\begin{aligned} 3x+6 &= 12y-3 \\ -3x-3 &= -3y-21 \\ \hline 3 &= 9y-24 \end{aligned}$$

d'on

$$y = \frac{3+24}{9} = 3$$

substituint aquesta valor de  $y$  en les dues equacions primitives, tindrem

$$\begin{cases} 3x+6=12 \times 3-3 \\ x+1=3+7 \end{cases}$$

i així obtenim la valor

$$x=9$$

45) Hom no té d'aplicar els procediments anteriors a caprici sinó que cal escollir en cada cas el procediment que ens condueixi amb una major facilitat a la resolució del sistema proposat.

Exemple 1.<sup>er</sup> Resoldre el sistema

$$\begin{cases} y=2x-13 \\ 3x-2y=17 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Com que una de les equacions és resolta en relació amb una de les incògnites, aplicarem el mètode de *substitució*.

Substituint en l'equació (2) la valor de  $y$  expressat en la (1), tindrem

$$3x-2(2x-13)=17$$

d'on resulta  $x=9$  i portant aquesta valor de  $x$  en l'equació (1)

$$y=2 \times 9-13=18-13=5$$

Exemple 2.<sup>on</sup> Resoldre el sistema

$$\begin{cases} 2x+4y=26 \\ 3x+5y=34 \end{cases}$$

En aquest cas el procediment d'eliminació més senzill és el d'igualació. Traient d'ambdues equacions la valor de  $x$  tenim

de la primera  $x = \frac{26-4y}{2}$

i de la segona  $x = \frac{34-5y}{3}$

Igualant aquestes valors tindrem

$$\frac{26-4y}{2} = \frac{34-5y}{3}$$

d'on  $78-12y=68-10y$

que, resolta, dóna  $y = \frac{10}{2} = 5$

Portant aquesta valor en la primera, per exemple, de les equacions proposades, tindrem

$$x=3$$

Exemple 3.<sup>er</sup> Resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 17x-10y=11 \\ 13x-5y=19 \end{cases}$$

Com que el coeficient de  $y$  de la primera equació és un múltiple del de la segona, podrem emprar el procediment de reducció multiplicant l'equació segona per  $-2$ , i sumar-les després, i tindrem

$$\begin{cases} 17x - 10y = 11 \\ -26x + 10y = -38 \end{cases}$$


---


$$-9x = -27$$

$$x = \frac{27}{9} = 3$$

Substituint aquesta valor en la primera equació, per exemple, trobarem

$$y = 4$$

### RESOLUCIÓ D'UN NOMBRE QUALSEVOL D'EQUACIONS AMB IGUAL NOMBRE D'INCÒGNITES

46) Els problemes poden donar lloc en llur resolució, a un nombre d'incògnites superior a dos.

Sigui per exemple el problema següent: Tres germans volen comprar una vinya que val 100 duros; el mitjà diu que podria comprar-la si el més petit li donés la meitat dels seus diners, el més petit diu que ell la compraria si el més gran li donés la tercera part dels seus diners i el més gran sols demana la quarta part dels diners del mitjà per a comprar-la. Quants diners té cada un dels germans?

Designem per  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivament els diners del més petit, del mitjà i del més gran, i tindrem les tres equacions

$$\begin{cases} y + \frac{x}{2} = 100 \\ x + \frac{z}{3} = 100 \\ z + \frac{y}{4} = 100 \end{cases}$$

Traient denominadors

$$\begin{cases} 2y + x = 200 \\ 3x + z = 300 \\ 4z + y = 400 \end{cases}$$

Cercant una de les incògnites, la  $x$  per exemple, de la primera equació,

$$x = 200 - 2y \tag{1}$$

tindrem el nou sistema

$$\begin{cases} x = 200 - 2y \\ 3x + z = 300 \\ 4z + y = 400 \end{cases}$$

Substituint la valor de  $x$  en la segona equació i separant la valor de  $z$ , tindrem el nou sistema

$$\begin{cases} x = 200 - 2y \\ z = -300 + 6y \\ 4z + y = 400 \end{cases}$$

Substituint la valor de  $z$  en la tercera equació i separant la valor de  $y$ , tindrem el nou sistema

$$\begin{cases} x = 200 - 2y \\ z = -300 + 6y \\ y = \frac{400 + 1200}{25} \end{cases}$$

en què l'última equació conté sols una incògnita de la qual obtenim la valor  $y=64$ .

Substituint aquesta valor en cada una de les valors trobades per a les altres incògnites, tindrem

$$\begin{aligned} x &= 200 - 2 \times 64 = 72 \\ z &= -300 + 6 \times 64 = 84 \end{aligned}$$

De manera que els diners que tenen els germans són:

$$\begin{aligned} \text{el petit } (x) &= 72 \text{ duros} \\ \text{el mitjà } (y) &= 64 \quad \text{»} \\ \text{el gran } (z) &= 84 \quad \text{»} \end{aligned}$$

47) Suposem el cas, més general, en què cada una de les equacions contingui totes les incògnites, com per exemple, en el sistema

$$(1) \quad \begin{cases} x - 2y + z = 3u + 1 \\ 7y - 2x - 4z = 4 - 12u \\ 3x + y + u = 9 + 3z \\ 2z + 7u = 6 + x + y \end{cases}$$

Traiem de la primera equació la valor de  $x$  i substituïm-la en totes les

altres, amb la qual cosa, després de simplificar, tindrem el sistema anterior transformat en aquest altre equivalent

$$(2) \quad \begin{cases} x = 1 + 2y - z + 3u \\ 3y - 2z = 6 - 6u \\ 7y - 6z = 6 - 10u \\ 3z - 4u = 7 + 3y \end{cases}$$

en què cal notar que la primera equació conté totes les incògnites  $x, y, z, u$ , però en les altres n'ha desaparegut ja una, la  $x$ .

Traient de la segona equació d'aquest segon sistema la valor de  $y$  i substituint-lo en les restants, tindrem, després de simplificar, el nou sistema equivalent

$$(3) \quad \begin{cases} x = 1 + 2y - z + 3u \\ y = \frac{6 + 2z - 6u}{3} \\ z + 3u = 6 \\ z + 10u = 13 \end{cases}$$

en què la primera de les equacions conté les quatre incògnites  $x, y, z, u$ , la segona en conté tres i les dues restants en contenen ja solament dues.

Traient ara de la tercera equació del sistema (3) la valor de l'incògnita  $z$  i substituint-la en la quarta equació, tindrem el nou sistema equivalent

$$(4) \quad \begin{cases} x = 1 + 2y - z + 3u \\ y = \frac{6 + 2z - 6u}{3} \\ z = 6 - 3u \\ 7u = 7 \end{cases}$$

en què l'última equació, que conté tan sols una incògnita, dóna  $u=1$ .

Si ara fem una substitució remuntant les equacions, o sigui, si substituïm la valor de  $u$  en la tercera equació, obtenim la valor de  $z=3$ . Substituint les valors de  $u$  i de  $z$  en la segona equació, obtindrem la valor de  $y=2$ , i substituint les valors de  $u, z$  i  $y$  en la primera, obtindrem la valor de  $x=5$ , tenint així resolt el sistema proposat.

Aquest procediment general, el podem resumir en la següent

#### Regla

PER RESOLDRE UN SISTEMA DE  $n$  EQUACIONS AMB  $n$  INCÒGNITES: TRAUREM DE LA PRIMERA EQUACIÓ LA VALOR DE LA PRIMERA INCÒGNITA I LA SUBSTITUIREM EN TOTES LES ALTRES EQUACIONS, ÇO QUE DONARÀ  $n-1$  EQUACIONS AMB  $n-1$  INCÒGNITES QUE, AMB LA PRIMERA, FORMARAN UN SIS-

TEMA EQUIVALENT AL SISTEMA PROPOSAT. DE LA SEGONA EQUACIÓ D'AQUEST SEGON SISTEMA, TRAUREM DE LA MATEIXA MANERA LA VALOR DE LA SEGONA INCÒGNITA QUE SUBSTITUIREM EN TOTES LES SEGÜENTS; EL SISTEMA PROPOSAT QUEDARÀ CONVERTIT EN UN SISTEMA EQUIVALENT, FORMAT PER UNA EQUACIÓ AMB  $n$  INCÒGNITES, PER UNA AMB  $n-1$  INCÒGNITES, I PER  $n-2$  EQUACIONS AMB  $n-2$  INCÒGNITES. CONTINUAREM DE LA MATEIXA MANERA FINS ARRIBAR A UNA EQUACIÓ AMB UNA SOLA INCÒGNITA I LLAVORS EL SISTEMA DE LAS  $n$  EQUACIONS QUEDARÀ TRANSFORMAT EN UN ALTRE D'EQUIVALENT DE  $n$  EQUACIONS QUE CONTINDRAN, LA PRIMERA LES  $n$  INCÒGNITES, LA SEGONA  $n-1$ , LA TERCERA  $n-2$ , ..... I L'ÚLTIMA, UNA SOLA INCÒGNITA. D'AQUESTA EQUACIÓ ES DEDUIRÀ LA VALOR DE L'ÚLTIMA INCÒGNITA I REMUNTANT D'UNA A UNA, ES TROBARAN SUCCESSIVAMENT LES VALORS DE TOTES LES INCÒGNITES.

Tenim de recordar, sempre que: PERQUÈ UN PROBLEMA TINGUI SOLUCIÓ DETERMINADA, CAL QUE DONI LLOC A UN SISTEMA DE TANTES EQUACIONS COM INCÒGNITES HI HAGI.

### EQUACIONS DE SEGON GRAU

48) Tota equació de segon grau amb una incògnita, segons havem dit en el n.º 2), pot ésser posada sota la forma

$$ax^2+bx+c=0$$

en la qual  $x$  és la incògnita, i  $a$ ,  $b$  i  $c$  les quantitats conegudes, que en l'exemple allí posat, valen respectivament  $a=4$ ,  $b=5$  i  $c=96$ .

Segons també havem dit (n.º 22), l'equació de segon grau pot presentar-se sota la forma

$$x^2-a=0$$

o ço que és igual

$$x^2=a$$

essent anomenada aleshores equació *quadràtica pura*.

49) Suposem que  $a$  té la valor 25, amb la qual cosa l'equació anterior esdevindrà

$$x^2=25$$

$x$  serà, doncs, una quantitat que elevada al quadrat, dóna 25, i com que

$$-5 \times -5 = (-5)^2 = 25$$

i

$$+5 \times +5 = (+5)^2 = 25$$

és evident que  $x$  tant pot tenir la valor  $+5$  com  $-5$ ; així l'equació admet dues solucions

$$x = \pm 5$$

que és llegit  $x$  igual a *més o menys* 5. L'equació no admet cap més altra solució perquè 5 és l'únic número que té per quadrat 25.

Així, doncs, si en el cas general

$$x^2 = a$$

en la qual  $a$  designa una quantitat positiva, representem per  $\sqrt{a}$  el número que elevat al quadrat dóna  $a$ , aquest número afectat del signe  $+ o -$ , tindrà son quadrat igual a  $a$ ; així, doncs, l'equació proposada admet dues solucions iguals i de signe contrari  $+\sqrt{a} - \sqrt{a}$ , ço que escriurem

$$x = \pm \sqrt{a}$$

Aquestes solucions són anomenades *arrels de l'equació* perquè s'obtenen extraient una arrel, però aquest nom d'*arrel* és usat per anomenar les solucions d'una equació de qualsevol grau.

**50)** Per resoldre l'equació QUADRÀTICA PURA, REDUIREM L'EQUACIÓ A LA FORMA  $x^2 = a$  I EXTRAUREM L'ARREL QUADRADA D'AMB DÓS MEMBRES, AFECTANT AMB EL SIGNA  $\pm$  L'ARREL DEL SEGON MEMBRE.

Exemple: Resoldre l'equació:

$$\frac{1}{2x^2} + 7 = \frac{9}{4x^2}$$

Multiplicant ambdós membres per  $4x^2$  (m.c.m. dels denominadors)

tindrem  $2 + 28x^2 = 9$

d'on  $28x^2 = 9 - 2 = 7$

i també  $x^2 = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

Extraurem l'arrel quadrada d'ambdós membres afectant, com havem dit, amb el signe  $\pm$  l'arrel del segon membre i tindrem finalment

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

Prova: Substituint  $x$  per  $+\frac{1}{2}$  en l'equació proposada resulta:

1.<sup>er</sup> membre  $\frac{1}{2x^2} + 7 = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2} + 7 = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} + 7 = 9$

2.<sup>on</sup> membre  $\frac{9}{4x^2} = \frac{9}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{9}{4\frac{1}{4}} = 9$

Substituint  $x$  per  $-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2x^2} + 7 = \frac{1}{2\left(-\frac{1}{2}\right)^2} + 7 = \frac{1}{2\frac{1}{4}} + 7 = 9$$

$$\frac{9}{4x^2} = \frac{9}{4\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{9}{4\frac{1}{4}} = 9$$

La solució és correcta.

### RESOLUCIÓ DE L'EQUACIÓ COMPLETA DE SEGON GRAU

51) Si en l'equació completa de segon grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dividim ambdós membres pel coeficient  $a$  del terme en  $x^2$ , tindrem

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

i com que les quantitats  $\frac{b}{a}$  i  $\frac{c}{a}$  són conegudes, podem representar-les també per lletres, tals, com  $p$  i  $q$ , esdevenint llavors l'equació de la forma

$$x^2 + px + q = 0$$

anomenada *forma típica* de l'equació de segon grau amb una incògnita.

Passant el terme conegut  $q$  al segon membre, l'equació esdevé

$$x^2 + px = -q \quad (1)$$

Els dos termes  $x^2 + px$  són els dos primers del quadrat del binomi  $x + \frac{p}{2}$ , ja que el dit quadrat és

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

Si, doncs, per a completar el quadrat afegim a ambdós membres de l'equació (1)  $\frac{p^2}{4}$ , tindrem

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q$$

El primer membre és el quadrat de  $x + \frac{p}{2}$ ; per tant

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

i extraient l'arrel quadrada d'ambdós membres, resulta

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

i passant el terme  $\frac{p}{2}$  al segon membre, i tenint en compte que  $\frac{p^2}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ , tindrem

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Així, doncs, podem assentar la regla següent:

LES DUES ARRELS DE L'EQUACIÓ COMPLETA DE SEGON GRAU POSADA EN LA FORMA  $x^2 + px + q = 0$ , SÓN IGUALS A LA MEITAT DEL COEFICIENT DEL TERME EN  $x$  AMB EL SIGNE CANVIAT, MÉS O MENYS L'ARREL QUADRADA DEL QUADRAT D'AQUESTA MEITAT DISMINUÏT DEL TERME CONEGUT.

52) Apliquem aquesta fórmula a algun exemple:

1.<sup>er</sup> Sigui l'equació

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

La fórmula dóna

$$x = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 8} = -3 \pm \sqrt{9 - 8} = -3 \pm \sqrt{1} = -3 \pm 1$$

Les arrels són, doncs

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = -4$$

(Substituïu aquestes valors en l'equació i comproveu-la).

2.ª Resoldre l'equació

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

La fórmula dóna

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}$$

Les arrels de l'equació són

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

3.ª Resoldre l'equació

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

La fórmula dóna

$$x = -2 \pm \sqrt{4 + 12} = -2 \pm \sqrt{16} = -2 \pm 4$$

Les arrels de l'equació són

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -6 \end{aligned}$$

4.ª Sigui l'equació

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

La fórmula dóna

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Les arrels són

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

53) Discussió de la fórmula

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

En la resolució d'aquesta fórmula tres casos seran possibles.

1.ª Si  $\frac{p^2}{4} - q > 0$ , és a dir, si és una quantitat positiva, la seva arrel quadrada serà una QUANTITAT REAL i també ho seran les valors

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{i} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

L'equació té dues solucions, i només que dues.

Així en l'equació  $x^2 - 4x - 32 = 0$

tindrem:  $p = -4$  i  $q = -32$ ; ses arrels seran:

$$x_1 = 2 + \sqrt{4 + 32} = 2 + 6 = 8$$

$$x_2 = 2 - \sqrt{4 + 32} = 2 - 6 = -4$$

2.<sup>on</sup> Si  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ , és a dir, negatiu, la seva arrel quadrada serà una QUANTITAT IMAGINÀRIA. No hi haurà cap número real positiu o negatiu que satisfaci o verifiqui l'equació. Ses arrels seran també dues, però imaginàries.

Així l'equació:  $x^2 - 4x + 29 = 0$

tindrà per arrels:

$$x_1 = 2 + \sqrt{-25} = 2 + 5\sqrt{-1}$$

$$x_2 = 2 - \sqrt{-25} = 2 - 5\sqrt{-1}$$

3.<sup>er</sup> Si

$$\frac{p^2}{4} - q = 0$$

tindrem

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{0} = -\frac{p}{2}$$

Així en l'equació

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

ses arrels són

$$x_1 = -\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} - 4} = -\frac{4}{2} + \sqrt{0} = -\frac{4}{2}$$

$$x_2 = -\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{4^2}{4} - 4} = -\frac{4}{2} - \sqrt{0} = -\frac{4}{2}$$

L'equació no té sinó una solució, igual a

$$-\frac{4}{2}$$

54) Així doncs, per resoldre l'equació completa de segon grau  $x^2 + px + q = 0$ , és convenient primer cercar la valor de la quantitat  $\frac{p^2}{4} - q$  que és anomenada la DISCRIMINANT.

Si  $\frac{p^2}{4} - q > 0$  (és positiva), l'equació té dues arrels reals: una de positiva i una altra de negativa, donades per la fórmula

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Si  $\frac{p^2}{4} - q < 0$  (és negativa), l'equació tindrà dues arrels imaginàries, donades també per la fórmula anterior.

Si  $\frac{p^2}{4} - q = 0$ , tindrà una sola arrel, que serà real. Son signe serà contrari al del segon terme de l'equació.

## RELACIONS ENTRE LES ARRELS I LES QUANTITATS CONEGUDES

55) Si sumem les arrels

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p$$

veiem que LA SUMA DE LES ARRELS ÉS IGUAL AL COEFICIENT DEL SEGON TERME AMB EL SIGNE CANVIAT.

Si multipliquem les arrels

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\frac{p^2}{4} - \frac{p}{2} \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$+ \frac{p}{2} \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p^2}{4} + q$$

$$x_1 x_2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q$$

EL PRODUCTE DE LES ARRELS ÉS IGUAL AL TERME INDEPENDENT.

56) Les propietats anteriors permeten resoldre les equacions de segon grau per una simple inspecció del coeficient del terme de primer grau i del terme independent. Emplearem aquest mètode quan sigui de fàcil execució.

Exemple: Resoldre l'equació  $x^2=24-2x$  per inspecció dels coeficients. Posarem l'equació en sa forma típica:

$$x^2+2x-24=0$$

El terme independent és negatiu; aleshores les arrels són de signe contrari. Inmediatament podem veure que 4 i -6, per ésser de signes distints, poden ésser arrels; llur producte és igual a -24, que és el terme independent, i llur suma és igual a -2, que és el coeficient del segon terme amb signe canviat.

Les arrels seran  $x_1=-6$  i  $x_2=4$

$$-6 \times 4 = -24$$

$$-6 + 4 = -2$$

Substituint tindrem la prova

$$(-6)^2 + 2(-6) - 24 = 36 - 12 - 24 = 0$$

$$(4)^2 + 2 \times 4 - 24 = 16 + 8 - 24 = 0$$

57) El cas més general és, com ja havem dit, que l'equació de segon grau es presenti en la forma

$$ax^2+bx+c=0$$

Aquesta fórmula, l'havem transformada en

$$x^2+px+q=0$$

dividint tots els termes per  $a$  i fent després

$$p = \frac{b}{a} \quad \text{i} \quad q = \frac{c}{a}$$

Resolent aquesta última equació havem trobat la fórmula

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Si ara en aquesta fórmula reemplacem  $p$  i  $q$  per les valors atribuïdes, tindrem

$$x = -\frac{\frac{b}{a}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

la qual fórmula, fent transformacions, esdevé

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

o sigui

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (1)$$

la qual té sobre l'anterior l'aventatge que quan el terme en  $x^2$  té coeficient, no cal fer operacions prèvies per a suprimir-lo i posar l'equació en la forma  $x^2+px+q=0$ , i quan no té coeficient no cal sinó fer  $a=1$  en la fórmula (1).

Així podem donar la regla següent que cal saber de memòria.

EN L'EQUACIÓ DE SEGON GRAU POSADA SOTA LA FORMA  $ax^2+bx+c=0$ , LA INCÒGNITA ÉS IGUAL AL COEFICIENT DEL SEGON TERME AMB EL SIGNO CANVIAT, MÉS O MENYS L'ARREL QUADRADA DEL QUADRAT DEL DIT COEFICIENT, DISMINUÏT AMB QUATRE VEGADES EL PRODUCTE DELS COEFICIENTS EXTREMS (1.<sup>er</sup> i 3.<sup>er</sup> terme) I EL TOT PARTIT PEL DOBLE DEL COEFICIENT DEL PRIMER TERME (terme en  $x^2$ .)

58) Per saber des d'un principi les solucions que tindrà l'equació, és convenient estudiar el signe de la *discriminant*

$$b^2-4ac$$

Si  $b^2-4ac > 0$ , l'equació tindrà dues arrels reals

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Si  $b^2-4ac = 0$ , l'equació tindrà una sola arrel

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Si  $b^2-4ac < 0$ , l'equació tindrà dues arrels imaginàries.

Exemple 1.<sup>er</sup> Resoldre l'equació:

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$b^2 - 4ac = 100 - 4 \times 3 \times 3 = 100 - 36 = 64$$

valor positiva; per tant l'equació tindrà dues arrels reals que seran:

$$x_1 = \frac{10 + \sqrt{64}}{6} = 3 \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{10 - \sqrt{64}}{6} = \frac{1}{3}$$

Substituint aquestes valors en l'equació donada tindrem:

$$1.ª \text{ arrel} \quad 3 \times 9 - 10 \times 3 + 3 = 27 - 30 + 3 = 0$$

$$2.ª \text{ arrel} \quad 3 \times \frac{1}{9} - 10 \times \frac{1}{3} + 3 = \frac{3}{9} - \frac{10}{3} + 3 = \frac{1}{3} - \frac{10}{3} + \frac{9}{3} = 0$$

Exemple 2.<sup>on</sup> Resoldre l'equació:

$$(x+1)(x+2)(x+3) = x(x-1)(x-2)$$

Resolució: Desenrotllem els membres:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 - 3x^2 + 2x$$

Passem tots els termes al primer membre i simplifiquem

$$3x^2 + 3x + 2 = 0$$

Per ésser la discriminant  $b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 3 \times 2 = -15$  negativa, les arrels seran imaginàries.

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{-15}}{6} = \frac{-3 + \sqrt{15} \sqrt{-1}}{6},$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{-15}}{6} = \frac{-3 - \sqrt{15} \sqrt{-1}}{6}$$

Exercicis:

$$1. \quad 6x^2 - 70 - 2x^2 = -3x^2 - 7$$

$$\text{Solució } x = \begin{cases} +3 \\ -3 \end{cases}$$

$$2. \quad \frac{(x+1)^2}{2} - 13 = x$$

$$\text{» } x = \begin{cases} +5 \\ -5 \end{cases}$$

$$3. \quad x^2 - 21x + 90 = 0$$

$$\text{» } x = \begin{cases} 15 \\ 6 \end{cases}$$

$$4. \quad x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$\text{» } x = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$$

$$5. \quad x + \frac{24}{x-1} = 3x - 4$$

$$\text{» } x = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$$

$$6. \quad x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$\text{» } x = \begin{cases} -4 \\ -4 \end{cases}$$

### EQUACIÓ BIQUADRADA

59) Donem el nom d'equació biquadrada a l'equació formada per un terme de quart grau, altre de segon i un terme independent. Sa forma típica serà

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

60) Aquestes equacions són resoltes per les regles donades per a les quadràtiques, sense altra cosa que pendre per incògnita el quadrat de  $x$ . L'equació proposta pot ésser escrita

$$a(x^2)^2 + b(x^2) + c = 0$$

i segons la regla donada en la n.º 57 la incògnita  $x^2$  tindrà per valor

$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

d'on extraient l'arrel quadrada

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Ses arrels seran quatre, a saber:

$$\begin{aligned} x_1 &= + \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} & x_2 &= + \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ x_3 &= - \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} & x_4 &= - \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \end{aligned}$$

Exemple 1.º Resoldre l'equació:

$$4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$$

Apliquem les fórmules anteriors

$$x = \pm \sqrt{\frac{37 \pm \sqrt{37^2 - 4 \times 4 \times 9}}{2 \times 4}} = \pm \sqrt{\frac{37 \pm 35}{8}}$$

Les valors de les quatre arrels són:

$$\begin{aligned} x_1 &= + \sqrt{\frac{37 + 35}{8}} = 3 & x_2 &= + \sqrt{\frac{37 - 35}{8}} = \frac{1}{2} \\ x_3 &= - \sqrt{\frac{37 + 35}{8}} = -3 & x_4 &= - \sqrt{\frac{37 - 35}{8}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

61) Podem també reduir a la forma quadràtica aquelles equacions en què hi ha dues potències de la incògnita i és l'exponent de l'una el doble de l'exponent de l'altra.

Exemple 1.<sup>er</sup> Resoldre l'equació

$$x^6 - 19x^3 - 216 = 0$$

Prenguem per incògnita  $x^3$ ; l'equació presentarà la forma

$$(x^3)^2 - 19(x^3) - 216 = 0$$

i podrà ésser resolta per la regla donada en el n.º 51.

$$x^3 = \frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{19^2}{4} + 216} = \frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{1225}{4}} = \frac{19}{2} \pm \frac{35}{2}$$

Les dues arrels seran

$$x_1^3 = \frac{19}{2} + \frac{35}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

$$x_2^3 = \frac{19}{2} - \frac{35}{2} = -\frac{16}{2} = -8$$

i extraient l'arrel cúbica d'ambdós membres:

$$x_1 = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$x_2 = \sqrt[3]{-8} = -2$$

Exemple 2.<sup>on</sup> Resoldre l'equació:

$$x^8 - x^4 - 6 = 0$$

Reduïm l'equació a la forma quadràtica:

$$(x^4)^2 - (x^4) - 6 = 0$$

Prenguem per incògnita  $x^4$  i resolguem l'equació,

$$x^4 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$x_1^4 = 3 \quad , \quad x_2^4 = -2$$

extraient l'arrel quarta

$$x_1 = \pm \sqrt[4]{3} \quad x_2 = \pm \sqrt[4]{-2}$$

La primera ens donarà dues arrels reals

$$+\sqrt[4]{3} \quad \text{i} \quad -\sqrt[4]{3}$$

la segona dues arrels imaginàries.

$$+\sqrt{2}\sqrt{-1}, \quad i \quad -\sqrt{2}\sqrt{-1}$$

Exemple 3.<sup>er</sup> Resoldre l'equació:

$$8x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$$

Prenguem per incògnita  $x^{\frac{1}{3}}$

$$8\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + 2\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - 1 = 0$$

i tindrem

$$x^{\frac{1}{3}} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \times 8}}{2 \times 8} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{16} = \frac{-2 \pm 6}{16}$$

d'on

$$x_1^{\frac{1}{3}} = \frac{-2 + 6}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$x_2^{\frac{1}{3}} = \frac{-2 - 6}{16} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$$

i elevant finalment al cub ambdós membres d'aquestes expressions:

$$x_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$x_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

## PROBLEMES DE SEGON GRAU

62) Es diu que un problema és de segon grau si condueix a la resolució d'una equació quadràtica.

Plantejarem el problema tal com fou indicat per als problemes de primer grau.

REPRESENTAREM LA INCÒGNITA PER LA LLETRA  $x$ , ESCRIUREM L'EQUACIÓ QUE PERMETRIA VERIFICAR L'EXACTITUD DEL RESULTAT SI LA VALOR DE  $x$  FOS CONEGUDA, I RESOLDREM L'EQUACIÓ QUADRÀTICA OBTINGUDA.

L'equació podrà tenir 0, 1 o 2 arrels; el problema podrà no tenir solució, és a dir, ésser IMPOSSIBLE; podrà tenir una solució (arrels dobles) i podrà

tenir dues solucions *reals* o dues solucions *imaginàries*. Les solucions imaginàries sols en alguns problemes de caràcter geomètric podran tenir interpretació apropiada i legítima. Les estudiarem més endavant.

**Problema 1.<sup>er</sup>** Una Companyia té establerta una línia de transmissió elèctrica amb fil de coure d'un pes total de 2240 quilos. Una altra companyia competidora que fa el mateix servei instal·la una altra línia que és 2400 metres més llarga, i, essent el pes del fil de 12 quilos menys per quilòmetre, aconseguí invertir el mateix pes total que la Companyia anterior.

Desitgem saber la longitud total de cada una d'aquestes línies.

Si anomenem  $x$  la longitud en quilòmetres de la primera línia, el pes per quilòmetre s'obté dividint el pes total per la longitud en quilòmetres o sigui

$$\frac{2240}{x}$$

i essent la longitud de la segona línia 2400 metres, o sigui 2,4 quilòmetres més llarga, tindrà per valor  $x+2,4$  i el pes per quilòmetre d'aquesta línia serà

$$\frac{2240}{x+2,4}$$

Segons l'enunciat, la diferència entre els pesos per quilòmetre d'aquestes línies és de 12 quilos; per tant podem establir l'equació

$$\frac{2240}{x} - \frac{2240}{x+2,4} = 12$$

Reduint a un denominador comú:

$$\frac{(x+2,4)2240}{x(x+2,4)} - \frac{2240x}{x(x+2,4)} = 12$$

Traient denominadors, multiplicant ambdós membres per  $x(x+2,4)$ , tindrem

$$(x+2,4)2240 - 2240x = 12x(x+2,4)$$

d'on

$$2240x + 2,4 \times 2240 - 2240x = 12x^2 + 2,4 \times 12x$$

Reduint termes semblants i verificant les operacions aritmètiques tindrem

$$5376 = 12x^2 + 28,8x$$

Reduint a la forma típica  $ax^2+bx+c=0$

$$12x^2+28,8x-5376=0$$

Aplicant la fórmula trobada en el n.º 57

$$x = \frac{-28,8 \pm \sqrt{28,8^2 + 4 \times 12 \times 5376}}{2 \times 12}$$

$$x = \frac{-28,8 \pm \sqrt{829,44 + 258048}}{24} = \frac{-28,8 \pm \sqrt{258877,44}}{24}$$

$$x = \frac{-28,8 \pm 508,8}{24} = -1,2 \pm 21,2$$

$$\begin{cases} x_1 = -1,2 + 21,2 = 20 \\ x_2 = -1,2 - 21,2 = -22,4 \end{cases}$$

Les longituds seran, doncs:

$$\begin{array}{ll} 1.ª \text{ línia} & \dots\dots\dots 20 \text{ km.} \\ 2.ª \text{ línia} & \dots\dots\dots 20 + 12 \dots\dots\dots 32 \text{ km.} \end{array}$$

Problema 2.<sup>on</sup> Quins seran els números, la suma dels quals és 9 i el producte 20.

Sigui  $x$  un dels números. Segons l'enunciat aquest número més l'altre haurà de valer 9; evidentment, doncs, l'altre número serà  $9-x$ . Llur producte, segons l'enunciat, ha d'ésser igual a 20.

Podem escriure l'equació de condició que serà:

$$\begin{array}{l} x(9-x) = 20 \\ 9x - x^2 = 20 \\ x^2 - 9x + 20 = 0 \end{array}$$

Aplicant la fórmula del n.º 51, les arrels de l'equació seran

$$x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 20} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81-80}{4}} = \frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}$$

L'equació té dues arrels; l'una serà 5 i l'altra 4.

Els números la suma dels quals val 9 i el producte 20, són 4 i 5.

Problema 3.<sup>er</sup> Dos trens fan diàriament el recorregut entre dues estacions que distan 300 quilòmetres. L'un és exprés i l'altre correu.

L'express corre 20 quilòmetres per hora més que el correu i triga quatre hores menys a fer el recorregut. Desitgem saber la velocitat per hora que tenen aquests trens.

Designant per  $x$  la velocitat per hora de l'express, tindrem que  $\frac{300}{x}$  és el temps que triga a recórrer els 300 quilòmetres. Per altra banda el temps invertit pel correu és de  $\frac{300}{x-20}$  hores.

La diferència entre el temps que triga l'un i l'altre tren és, com havem dit, de 4 hores: podem doncs plantejar l'equació següent:

$$\frac{300}{x-20} - \frac{300}{x} = 4$$

Reduint a un denominador comú, verificant les operacions en el numerador resultant i multiplicant després ambdós termes per  $(x-20)x$  i dividint-los per 4, tindrem:

$$\frac{300x - 300x + 300 \times 20}{4} = (x-20)x$$

que, fent operacions, i passant-ho tot al primer terme, ens dona

$$x^2 - 20x - 1500 = 0.$$

Les arrels són:

$$x_1 = + \frac{20}{2} + \sqrt{\frac{400}{4} + 1500} = 10 + \sqrt{1600} = 10 + 40 = 50$$

$$x_2 = + \frac{20}{2} - \sqrt{\frac{400}{4} + 1500} = 10 - 40 = -30, \text{ inacceptable.}$$

Aleshores la velocitat de l'express serà de 50 qm. per hora, i per tant la del correu,  $50 - 20$ , igual a 30 km. per hora.

L'expressió  $\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$  representa el nombre de persones que han vingut a la festa durant les hores restants a les 12 del migdia. Per tant, el nombre de persones que han vingut a la festa durant les hores restants a les 12 del migdia és  $\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$ .

El nombre de persones que han vingut a la festa durant les hores restants a les 12 del migdia és  $\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$ . Per tant, el nombre de persones que han vingut a la festa durant les hores restants a les 12 del migdia és  $\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$ .

La diferència entre el nombre de persones que han vingut a la festa durant les hores restants a les 12 del migdia i el nombre de persones que han vingut a la festa durant les hores restants a les 12 del migdia és  $\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$ .

$$\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x} = \frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$$

Per tant, el nombre de persones que han vingut a la festa durant les hores restants a les 12 del migdia és  $\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$ .

$$\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x} = \frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$$

Per tant, el nombre de persones que han vingut a la festa durant les hores restants a les 12 del migdia és  $\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$ .

$$\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x} = \frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$$

Per tant, el nombre de persones que han vingut a la festa durant les hores restants a les 12 del migdia és  $\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$ .

$$\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x} = \frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x} = \frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$$

Per tant, el nombre de persones que han vingut a la festa durant les hores restants a les 12 del migdia és  $\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$ .

Per tant, el nombre de persones que han vingut a la festa durant les hores restants a les 12 del migdia és  $\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$ .

$$\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x} = \frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$$

Per tant, el nombre de persones que han vingut a la festa durant les hores restants a les 12 del migdia és  $\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$ .

Per tant, el nombre de persones que han vingut a la festa durant les hores restants a les 12 del migdia és  $\frac{1}{2} \sqrt{100 - 100x}$ .





# ÀLGEBRA

## TERCERA PART

### PROBLEMES

1. Resoldre l'equació  $3x + 8 = 13x - 2$ .
2. Resoldre el sistema de tres equacions

$$\left. \begin{array}{l} x + \frac{y}{2} = 1 \\ y + \frac{z}{3} = 1 \\ z + \frac{x}{4} = 1 \end{array} \right\} \text{bo i aplicant qualsevol dels} \\ \text{mètodes d'eliminació.}$$

3. Dues persones posseeixen igual capital; la primera col·loca el seu al 5 per cent, i la segona al 3 per cent. El rèdit de la primera és igual al de la segona, més 400 ptes. Quin és el capital de cada una?

4. Si augmentem d'una unitat el numerador d'una fracció, aquesta pren la valor de  $\frac{1}{3}$ ; si augmentem també d'una unitat, el denominador de la mateixa fracció, pren aleshores la valor de  $\frac{1}{4}$ . Trobar quina és aquesta fracció.

5. Repartir 167 ptes entre quatre persones, de manera que la primera tingui 2 ptes més que la segona, la segona, 7 ptes més que la tercera, i la tercera 5 ptes més que la quarta.

6. Una persona ha disposat al seu testament que les 11 000 ptes que posseeix es reparteixin entre quatre persones en la forma següent: la segona ha de tenir el doble que la primera, la tercera igual que les dues primeres juntes i la quarta igual que la segona i tercera juntes. Quina és la part de cada persona?

7. Tres jugadors acorden que el que perdi doblarà els diners dels altres

dos. Cada jugador perd una partida, i en acabar de jugar, tots ells tenen una mateixa quantitat, que és de 16 ptes. Quant tenia cada jugador en començar?

8. Un comerciant compra una peça de roba que li costa 1800 ptes. En rebre-la observa que li n'han enviat, no la demanada, sinó una altra que costa 2,5 ptes menys per metre, però que, en compensació, conté 15 m més que la demanada. Quants metres tenia la peça per ell demanada i quant valia per metre?

9. Dos capitals són col·locats a diferent tant per cent. La suma d'aquests capitals és de 60 000 ptes, la suma dels tants per cent és 12; el primer capital produeix 1320 ptes, i el segon 2340 ptes l'any. Trobar aquests capitals.

10. Dos operaris cobren l'un 80 ptes i l'altre 45; el primer ha treballat cinc dies més que el segon. Si cada un hagués treballat el nombre de dies de l'altre, haurien cobrat una mateixa quantitat. Demanem el nombre de dies de treball de cada operari i el preu del jornal.

11. Un installador compra interruptors per 750 ptes. Li n'arriben cinc d'aviats i ven els restants cobrant per cada un 6 ptes més del que li havien costat. Trobar el nombre d'interruptors i el seu preu, sabent que en aquest negoci hi perd 30 ptes.

12. Segons un principi de Física, la intensitat de la llum és en raó inversa del quadrat de la distància. Així, a una distància doble la intensitat és la quarta part, a una distància triple la intensitat és la novena part, etc. Això assentat, si dues bombetes, les intensitats lluminoses de les quals a la unitat de distància són, respectivament, 16 i 25, estan a una distància de 8 m, quin serà el punt intermedi igualment il·luminat per elles dues?

13. Quin és el nombre que, augmentat de sis vegades la seva arrel quadrada, dóna 135?

14. Ha estat venut un arc voltaic per 144 ptes, i hom ha obtingut un tant per cent de guany igual al nombre de pessetes que havia costat. Trobar el preu de compra.

15. Havem comprat llibres per valor de 60 ptes. Si pel mateix import haguessin donat tres llibres més, hauria costat cada un una pesseta menys. Quants llibres havem comprat?

16. Un nombre consta de tres xifres; la de les unitats és doble que la de les centenes, la suma de les tres xifres és 11, i si a aquest nombre li sumem 297 trobarem el nombre proposat escrit al revés. Quin és el nombre donat?

17. En quin dia i hora del mes de març la fracció transcorreguda del mes és la mateixa que la transcorreguda de l'any? (Any de 365 dies.)

18. Quina valor cal donar a  $m$  perquè les arrels de l'equació  $2x^2 - (m^2 + 1)x + m^2 + 3 = 0$  es diferenciïn d'una unitat?

19. Formar una equació biquadrada que tingui per arrels  $\pm 3$  i  $\pm 1$ .

20. Resoldre l'equació  $x^2 + x + 1 = \frac{42}{x^2 + x}$   
bo i emprant incògnites auxiliars.

21. L'edat d'un noi serà dintre tres anys un quadrat perfecte i fa tres anys que era precisament l'arrel quadrada d'aquest quadrat. Quina edat té?

22. Trobar dos nombres imparells consecutius tals, que la diferència de llurs quadrats sigui 8000.

23. El producte dels dos termes d'una fracció és 120; si del denominador es tragués una unitat per afegir-la al numerador ambdós termes foren iguals. Quina és aquesta fracció?

24. Es demanen tres nombres enters consecutius tals que llur producte sigui cinc vegades llur suma.

25. Demostrar que l'equació  $\frac{a^2}{x-p} + \frac{b^2}{x-q} - 1 = 0$  té sempre les seves arrels reals, per qualsevol valor de les constants  $a, b, p, q$ .

21. L'etat d'un noi d'aire l'oxigen un quadrat perfect i la temperatura d'un quadrat perfect d'aire quadrat d'aire quadrat. Quins estats  
22. Trobar dos nombres imparables consecutius tals que la diferència  
de llurs quadrats sigui 800.  
23. El producte d'els dos termes d'una sèrie de tres el del denominador  
es triple del terme mitjà del quadrat de el quadrat de el terme tercer terme.  
Quins es aquests termes?  
24. Els nombres tres nombres enters consecutius tals que l'un producte  
to sigui cinc vegades l'altre.

25. Demostar que l'expressió  $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$  és sempre un nombre enter per qualsevol valor de la constant  $n$ .

26. Trobar dos nombres enters consecutius tals que el quadrat de l'un sigui el quadrat de l'altre més 1.

27. Trobar dos nombres enters consecutius tals que el quadrat de l'un sigui el quadrat de l'altre més 4.

28. Trobar dos nombres enters consecutius tals que el quadrat de l'un sigui el quadrat de l'altre més 9.



RF-7-52

