ESCUELA ELEMENTAL DEL TRABAJO
DE LA DIPUTACIÓN PROVINCIAL DE BARCELONA

MECÁNICA ELEMENTAL

PRIMERA PARTE

E. E. T.
ARTES GRÁFICAS
1947

MECÁNICA ELEMENTAL

PRIMERA PARTE

1. *Materia.* — Entendemos por *materia* o *substancia* todo lo que es capaz de impresionar nuestros sentidos.

Cuerpo es una porción limitada de materia.

2. *Átomos, moléculas.* — De algunas propiedades de los cuerpos se deduce que la substancia de que están constituídos, no es continua, sino que consiste en la reunión de un número extraordinariamente grande de porciones sumamente pequeñas o *átomos* de materia. Estos átomos no pueden dividirse por ningún procedimiento, y están separados unos de otros.

Un grupo de dos o más átomos forma una *molécula*; un cuerpo puede considerarse como un conjunto de moléculas, y cada molécula como un conjunto de átomos.

Los átomos, como las moléculas, están separados unos de otros; hay entre ellos un flúido sutil llamado *éter*, y están animados por un rápido movimiento vibratorio y rotatorio, que es la causa del calor del cuerpo.

No es posible obtener átomos ni moléculas mecánicamente; las partes más pequeñas que podemos obtener son siempre reuniones numerosas de moléculas, llamadas *partículas*.

3. La materia de los cuerpos puede ser *simple* o *compuesta*.

Se llama materia *simple* aquella cuyas moléculas están formadas por átomos de una misma substancia, por ejemplo, el hierro.

Se llama *compuesta* aquella cuyas moléculas están formadas por átomos de diferentes substancias; por ejemplo, el sulfuro de hierro, cuya molécula contiene un átomo de hierro y uno de azufre.

Asimismo, en el agua hay dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno en cada molécula.

Así se comprende, pues, como al subdividir los cuerpos hasta separar las moléculas no se altera su naturaleza; así, las moléculas de sulfuro de hierro serán siempre sulfuro de hierro; pero al llevar la división hasta separar los átomos, si el cuerpo es compuesto, alteraremos su naturaleza, ya que en el mismo sulfuro de hierro no obtendremos este cuerpo, sino azufre y hierro. Los átomos son indivisibles.

4. *Diferencia entre combinación y mezcla.* — Es preciso no confundir la constitución de los cuerpos compuestos con la mezcla de cuerpos, ya que una mezcla de partículas de hierro y azufre no forma el sulfuro de hierro, puesto que las moléculas de esta mezcla son moléculas de hierro y otras de azufre.

Así, con un microscopio, podemos ver fácilmente las partículas de una y otra substancia, cosa que no sucede al examinar el sulfuro de hierro, puesto que las partículas que se pueden ver serán las de esta nueva materia.

5. *Aleaciones.* — La mezcla íntima de varios metales en fusión es considerada generalmente como una verdadera combinación, aunque ciertos hechos parecen demostrar que son simplemente disoluciones de los metales.

La aleación de cobre y estaño es conocida con el nombre de *bronce,* y la de cobre y cinc, con el de *latón.* Tanto en el bronce como en el latón entran generalmente otros metales, pero los citados anteriormente son los que entran en mayor proporción.

Cuando uno de los metales es el mercurio, la aleación toma el nombre de *amalgama.*

Basándose en algunos fenómenos físicos, Lord Kelvin ha calculado que la distancia media entre las moléculas, en los sólidos y en los líquidos es mayor que $\frac{1}{2\,000\,000\,000}$ de centímetro, y menor que $\frac{1}{100\,000\,000}$ de centímetro.

El número de moléculas que hay en un centímetro cúbico de aire se ha calculado en 21 000 000 000 000 000 000.

6. *Estados de los cuerpos.* — La materia que forma los cuerpos puede presentarse bajo tres aspectos, llamados *estado sólido, estado líquido* y *estado gaseoso.*

El *estado sólido* que observamos en el hierro, la madera, la piedra, etc., a la temperatura ordinaria, tiene como carácter distintivo que la posición relativa de sus moléculas es fija y no puede cambiarse sin la aplicación de una fuerza más o menos considerable. Los cuerpos sólidos tienden a conservar la forma que les ha sido dada natural o artificialmente.

El *estado líquido* que observamos en el agua, alcohol, aceite, etc., está caracterizado por no ser fija la posición relativa de sus moléculas, sino que éstas resbalan unas sobre otras con mayor facilidad y el cuerpo toma la forma del recipiente que lo contiene, presentando en su parte superior una superficie plana.

El *estado gaseoso* se observa en el aire. En los gases, la movilidad de las moléculas es aún más acentuada que en los líquidos, pero el carácter distintivo de un gas es la propiedad que tienen de ocupar el espacio que se le ofrece. De ahí resulta que los gases no tienen forma propia, y su volumen depende de la presión a que están sometidos.

La palabra *flúido* se aplica indistintamente a los líquidos y a los gases. La mayor parte de los cuerpos simples y algunos de los compuestos pueden pasar sucesivamente por los tres estados; por ejemplo, el agua, el azufre, el mercurio, el cinc, etc.

7. *Punto material.* — En el estudio de la Mecánica se suponen los cuerpos constituídos por *puntos materiales.* Punto material es una porción de materia suficientemente pequeña para que, sin error sensible, pueda determinarse su posición como la de un punto geométrico. Viene a ser un cuerpo de dimensiones pequeñísimas.

Los cuerpos se consideran como un conjunto o sistema de puntos materiales, sujetos a ciertas condiciones dependientes de la materia y de su estado físico.

En Mecánica, se llama *cuerpo sólido o rígido* y también *sistema material invariable* a todo sistema de puntos materiales cuyas distancias respectivas permanecen invariables. Los cuerpos sólidos pueden considerarse como sistemas invariables (dentro de ciertos límites).

En adelante, siempre que hablemos de *cuerpo sólido,* entenderemos que se trata de un sistema invariable.

La palanca de unas balanzas (fig. 1 *a*), por ejemplo, constituye un sistema invariable, en el cual se consideran únicamente los puntos *A* y *B,*

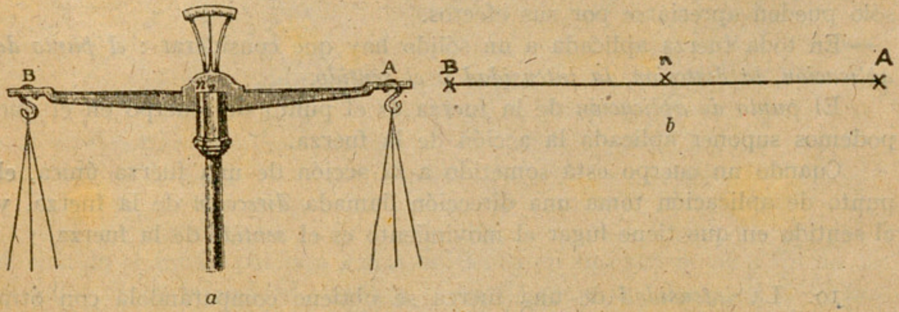

FIG. 1

donde actúan las fuerzas y el punto de apoyo *n.* Estos tres puntos conservan siempre una misma posición relativa, y son los que interesa conocer; así, la palanca anterior sería representada por los tres puntos citados, situados en su posición relativa, como indica la fig. 1 *b.*

8. *Movimiento y reposo.* — Cuando un cuerpo ocupa sucesivamente diversas posiciones en el espacio, decimos que está en *movimiento*. Si ocupa siempre una misma posición, decimos que está en *reposo*.

Tenemos noción del movimiento o del reposo de un cuerpo refiriéndolo a otro que consideramos en reposo. Así, diremos que un carro se mueve por una carretera al referirlo a la quietud de ésta, pero hay que tener en cuenta que la carretera se halla en la tierra, y ésta se mueve en el espacio.

Si la carretera estuviese en *reposo absoluto*, el movimiento del carro sería *absoluto*; pero toda vez que se mueve, aunque aparentemente esté quieta, su reposo es relativo a las demás partes de la tierra, y el movimiento del carro será relativo. Como que en el espacio no conocemos ningún punto que reúna semejante condición, es imposible conocer el movimiento o el reposo absoluto de un cuerpo.

Hemos de contentarnos con referir las posiciones de un cuerpo a ciertos puntos que consideramos fijos, aunque en realidad no lo sean para obtener el estado de reposo o movimiento *relativos* de un cuerpo. Sólo podemos conocer los movimientos relativos.

9. *Fuerza.* — Un cuerpo que está en reposo no puede, *por sí mismo*, ponerse en movimiento; si está en movimiento, continúa moviéndose *por sí mismo*, según ciertas leyes. Siempre que un cuerpo pasa del estado de reposo al de movimiento o se mueve según leyes diferentes de las que antes regían su movimiento, es que el cuerpo está sometido a la acción de una causa que determina cambios en su estado de reposo o de movimiento. Cualquiera que sea esta causa, es llamada *fuerza*. Una *fuerza* es, pues, la causa del movimiento o de la modificación del movimiento. Las fuerzas sólo pueden apreciarse por sus efectos.

En toda fuerza aplicada a un sólido hay que considerar : *el punto de aplicación, la dirección, la intensidad* y *el sentido*.

El *punto de aplicación* de la fuerza es el punto del cuerpo en el que podemos suponer aplicada la acción de la fuerza.

Cuando un cuerpo está sometido a la acción de una fuerza única, el punto de aplicación toma una dirección llamada *dirección* de la fuerza, y el sentido en que tiene lugar el movimiento es el *sentido* de la fuerza.

10. La *intensidad* de una fuerza se obtiene comparándola con otra fuerza que se toma como unidad.

Dos fuerzas de la misma dirección y sentido son idénticas cuando, aplicadas de la misma manera sobre un mismo cuerpo, producen efectos idénticos.

Dos, tres... fuerzas idénticas reunidas forman una fuerza única, llamada fuerza doble, triple... de una cualquiera de las fuerzas consideradas.

Tomando una fuerza determinada como fuerza unidad, su magnitud o intensidad se representará por 1. La fuerza doble de la fuerza unidad tendrá una intensidad representada por 2, y así sucesivamente. Vemos, pues, que la *intensidad* de una fuerza es el número que expresa la relación entre la fuerza considerada y la fuerza que hemos tomado como unidad.

Siendo el peso de los cuerpos una fuerza, podemos tomar como unidad de fuerza el gramo, el kilogramo, etc. La intensidad de una fuerza estará expresada por cierto número de gramos, kilogramos, etc.

Las magnitudes físicas que, como la fuerza, tienen dirección, sentido e intensidad, se llaman *vectoriales*.

11. *Representación gráfica de una fuerza.* — A fin de no trazar figuras complicadas para el estudio de la Mecánica, se ha convenido en simplificar su representación. Así, para representar la fuerza que hace un hombre que, como se ve en la fig. 2 *a*, empuja un cuerpo *B*, en lugar de representar el cuerpo *B* en su forma y dimensiones, se representa solamente por un punto *A'*, que es precisamente el punto *A* de la aplicación de la fuerza; ésta se representa por una recta *A' F* paralela a la dirección de la fuerza,

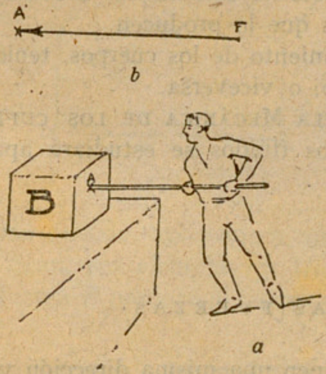

FIG. 2

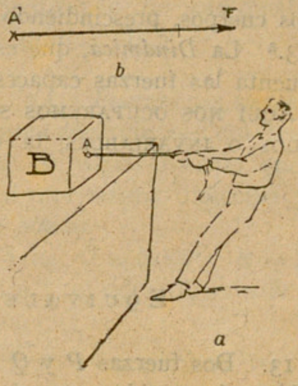

FIG. 3

el sentido se indica por una punta de flecha en su extremo y, a fin de dar el valor de su intensidad, se da a la citada recta una longitud *A' F* proporcional a la intensidad de la fuerza. La representación de la fig. 2 *a* será, pues, la 2 *b*; así como la representación de la 3 *a* será la 3 *b*.

Cuando actúan varias fuerzas sobre un mismo cuerpo, éste se representa por tantos puntos de aplicación como puntos haya donde actúen las fuerzas, siendo éstas representadas como se ha dicho antes.

Resumiendo, diremos que las fuerzas se representan gráficamente adoptando una escala para representar su intensidad (por ejemplo, un centímetro por cada kilogramo); la línea $O\,F$ (fig. 4) representa una fuerza aplicada al punto O, que tiene la dirección de la recta $O\,F$, el sentido indicado por la flecha, y la longitud $O\,F$ representa, a la escala adoptada, la intensidad de la fuerza.

FIG. 4

Vemos, pues, que para representar una fuerza, representamos su punto de aplicación y la recta que define su dirección; sobre dicha recta se marca el sentido y después se toma una longitud, a partir del punto de aplicación y sobre la dirección y sentido de la fuerza que, a la escala conveniente, representa la intensidad de la fuerza considerada.

La línea que representa una magnitud que, como la fuerza, es vectorial, se llama *vector*.

12. La Mecánica es la ciencia de las fuerzas y del movimiento, y se divide en tres partes:

1.ª La *Estática*, que tiene por objeto el estudio de las fuerzas prescindiendo de los movimientos que de ellas puedan resultar. Comprende la equivalencia de las fuerzas y su equilibrio.

2.ª La *Cinemática*, que tiene por objeto el estudio del movimiento de los cuerpos, prescindiendo de las fuerzas que lo producen.

3.ª La *Dinámica*, que estudia el movimiento de los cuerpos, teniendo en cuenta las fuerzas capaces de producirlo, o viceversa.

AQUÍ NOS OCUPAREMOS SOLAMENTE DE LA MECÁNICA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS O INVARIABLES; la mecánica de los flúidos se estudiará aparte.

ESTÁTICA

EQUIVALENCIA DE LAS FUERZAS

13. Dos fuerzas P y Q (fig. 5) que tienen una misma dirección y son iguales y de sentido contrario, son *fuerzas iguales* y *contrarias*. Es evidente que el conjunto de las dos fuerzas iguales y contrarias P y Q, aplicadas a un punto O, no alteran su estado de reposo o de movimiento, ya que se destruyen entre sí los efectos por ellas producidos. Dos fuerzas iguales y contrarias equivalen, pues, a una fuerza nula, o sea, que equivalen a cero. Basándonos en lo que acabamos de decir, es fácil demostrar que:

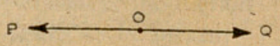

FIG. 5

El efecto de una fuerza sobre un cuerpo sólido no se altera cuando se transporta su punto de aplicación a otro punto cualquiera de su dirección, con tal que el nuevo punto de aplicación se considere invariablemente unido al cuerpo sólido.

En efecto, consideremos la fuerza $O\,A = F$ (fig. 6) aplicada al cuerpo y obrando según la recta $O\,O'$ invariablemente unida al cuerpo sólido. Si en el punto O' y en la dirección de la recta $O\,O'$ introducimos dos fuerzas $O'\,B$ y $O'\,C$ iguales y contrarias a la fuerza F, no habremos modificado en absoluto la acción de la fuerza F. Las fuerzas iguales y contrarias $O'\,B$ y $O\,A$ podrán suprimirse, quedando solamente la fuerza $O'\,C$ que es la misma fuerza F después de trasladar su punto de aplicación al nuevo punto O' como queríamos probar.

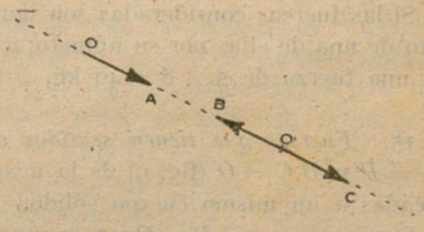

FIG. 6

Si suponemos que se trata de mover la pieza representada en la fig. 7, atravesada por una barra rígida íntimamente unida a la pieza, es evidente que el mismo resultado se obtendrá apretando por uno de los puntos A, a', a''..., que tirando de cualquiera de los puntos B, b', b''...

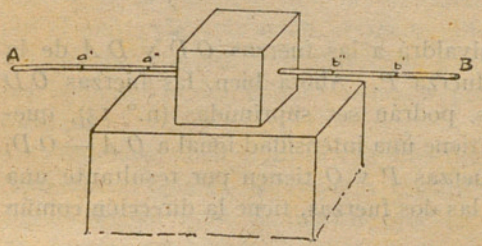

FIG. 7

14. *Fuerzas que tienen una misma dirección.* — Consideremos (fig. 8) varias fuerzas que tienen una misma dirección y un mismo sentido, aplicadas a un mismo cuerpo sólido.

Sean, por ejemplo, las tres fuerzas $P = 3$ kg, $Q = 6$ kg y $R = 2$ kg. La fuerza P produce el mismo efecto (según el n.° 10) que 3 fuerzas de 1 kg

FIG. 8

de la misma dirección y sentido que la fuerza P; análogamente, Q equivale a 6 fuerzas de 1 kg, y R, a 2 fuerzas de 1 kg; por lo tanto, las fuerzas $P\,Q\,R$ reunidas equivalen a

$$3 + 6 + 2 = 11 \text{ fuerzas de 1 kg}$$

o sea a una fuerza única, cuya intensidad 11 kg será la suma de las intensidades 3, 6 y 2 de las fuerzas P, Q y R. De manera que : Varias fuerzas aplicadas a un mismo cuerpo sólido y de una misma dirección y sentido equivalen a una fuerza única de la misma dirección y sentido, cuya intensidad es la suma de las intensidades de las fuerzas dadas. Esta fuerza única toma el nombre de *resultante* de las fuerzas propuestas.

Si las fuerzas consideradas son iguales, la resultante será igual al producto de una de ellas por su número; así, la resultante de 8 fuerzas de 5 kg será una fuerza de $5 \times 8 = 40$ kg.

15. *Fuerzas que tienen sentidos contrarios.* — Sean las dos fuerzas $OA = P$ y $BC = Q$ (fig. 9) de la misma dirección y de sentido contrario, aplicadas a un mismo cuerpo sólido.

Supongamos que $P > Q$ y tomemos sobre OA una magnitud $OD = BC$; en virtud de lo que hemos dicho en el n.° 14, tendremos $OA = P = OD$

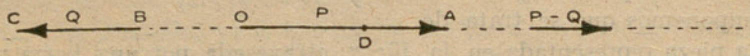

FIG. 9

$+ DA$, o sea que la fuerza P equivaldrá a las fuerzas OD y DA de la misma dirección y sentido que la fuerza P. Ahora bien, las fuerzas OD y BC, siendo iguales y contrarias, podrán ser suprimidas (n.° 13), quedando solamente la fuerza DA, que tiene una intensidad igual a $OA — OD$, o sea a $P — Q$; por lo tanto, las fuerzas P y Q tienen por resultante una fuerza única que es la diferencia de las dos fuerzas, tiene la dirección común a ambas y el sentido de la mayor.

16. De lo que hemos dicho en los n.[s] 14 y 15 se deduce: que la *resultante* de un sistema de fuerzas de una misma dirección aplicadas a un mismo cuerpo sólido, es igual a la suma algebraica de las fuerzas dadas, tomando como positivas las que tienen un determinado sentido, y como negativas las de sentido contrario.

Ejemplo : Sean las fuerzas indicadas en la fig. 10.

Considerando como positivas las fuerzas que tienen el sentido de iz-

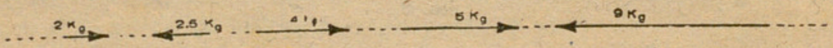

FIG. 10

quierda a derecha, y como negativas las de sentido contrario, la resultante R valdrá:

$$R = 2 — 2{,}5 + 4 + 5 — 9 = 11 — 11{,}5 = — 0{,}5 \text{ kg}$$

La resultante R tendrá, pues, una intensidad de 0,5 kg, la misma dirección de las fuerzas dadas y el sentido de las consideradas como negativas, o sea de derecha a izquierda.

17. *Fuerzas concurrentes.* — Cuando las direcciones de las fuerzas pasan por un mismo punto o son *concurrentes*, tendrán una resultante única, cuya dirección pasará por el punto de concurso.

EN LO QUE SEGUIRÁ, SUPONDREMOS SIEMPRE QUE TODAS LAS FUERZAS DE QUE HABLAREMOS ESTÁN APLICADAS A UN MISMO CUERPO SÓLIDO.

18. Consideremos dos fuerzas P y P' (fig. 11) concurrentes y de igual intensidad. Supongamos colocado en el punto de concurso O un punto material en reposo y apliquemos a él simultáneamente las fuerzas iguales P y P'. Si suponemos que las fuerzas dadas se confunden en una sola, el punto de aplicación se moverá evidentemente según la dirección común a ambas fuerzas y en el mismo sentido que ellas; si imaginamos que las dos fuerzas van separándose, formando ángulos iguales con la dirección primitiva, se comprende que la dirección seguida por el punto de aplicación permanecerá invariable, siendo constante la dirección primitiva, o sea la bisectriz del ángulo formado por las dos fuerzas.

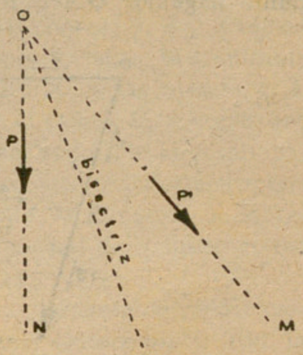

FIG. 11

Podemos, pues, admitir que dos fuerzas concurrentes e iguales tienen una resultante dirigida según la bisectriz del ángulo formado por las fuerzas (que es el ángulo que tiene por lados las dos fuerzas trasladadas a su punto de concurso).

19. Consideremos (fig. 12) cuatro fuerzas P, P', P'' y P''' iguales entre sí, situadas en un mismo plano / cuyas direcciones formen un rombo, el $O\,C\,A\,B$, siendo los sentidos de dichas fuerzas los indicados en la figura. Ya que la figura $O\,C\,A\,B$ es un rombo, la recta $O\,A$ será la bisectriz del ángulo $C\,O\,B$, formado por las fuerzas P y P', y también será bisectriz del ángulo $C\,A\,B$, formado por las fuerzas P'' y P'''. Por lo que hemos dicho en el n.° 18, la resultante de las fuerzas P y P' tendrá la dirección de la recta $O\,A$ y sobre esta recta $O\,A$ estará situada también la resultante de las fuerzas P'' y P'''. Además, por ser iguales los ángulos $C\,O\,B$ y $C\,A\,B$, dichas resultantes tendrán la misma intensidad, y es fácil ver, inspeccionando la figura, que tendrán sentido contrario.

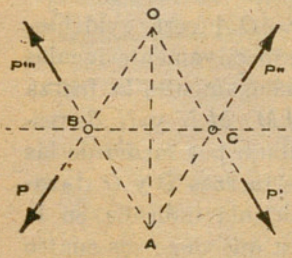

FIG. 12

Estas dos resultantes, iguales y contrarias, equivaldrán a cero (n.° 13) o se *destruirán*. Las fuerzas P, P', P'' y P''', que equivalen a dichas dos resultantes, equivaldrán a cero, de manera que su conjunto no producirá efecto alguno sobre el cuerpo a que estén aplicadas. Podemos, pues, decir:

siempre que cuatro fuerzas iguales estén dispuestas de manera que formen un rombo y las resultantes se opongan, podrán suprimirse sin alterar el estado de reposo o de movimiento del cuerpo sólido a que estuviesen aplicadas.

20. Consideremos (fig. 13) dos fuerzas concurrentes P y Q. Supongamos que las intensidades de P y Q sean conmensurables y que tengan, por ejemplo, $\frac{P}{Q} = \frac{2}{3}$, sea O el punto de concurso, y a partir de dicho punto hagamos $OA = P$ y $OB = Q$.

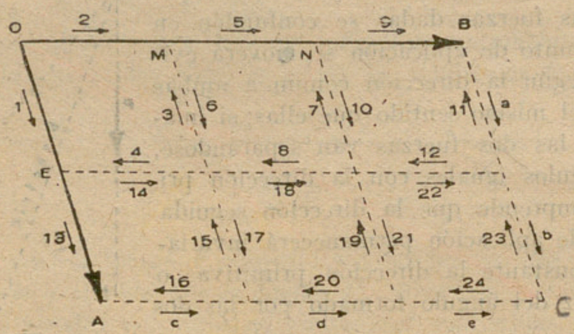

FIG. 13

La resultante de las fuerzas P y Q pasa evidentemente por el punto de concurso O. Construyamos sobre las intensidades P y Q el paralelogramo $OACB$.

Como que hemos supuesto que $\frac{P}{Q} = \frac{2}{3}$, podemos suponer $P = 2f$ y $Q = 3f$, siendo f la fuerza unidad. La fuerza $P = OA$ será evidentemente igual a la suma de las fuerzas OE y EA, respectivamente iguales a f, indicadas por medio de las flechas 1 y 13. Análogamente, la fuerza $Q = OB$ será igual a la suma de las tres fuerzas OM, MN y NB, respectivamente iguales a la fuerza f, indicadas en el dibujo por medio de las flechas 2, 5 y 9. Si por los puntos de división de las fuerzas P y Q trazamos paralelas a dichas fuerzas, formaremos la cuadrícula indicada en la figura. Cada porción de la cuadrícula es un *rombo*, ya que tiene sus cuatro lados iguales a la intensidad de la fuerza f. Sobre cada uno de los lados de puntos de la cuadrícula, que supondremos unida invariablemente al cuerpo sólido, imaginemos aplicadas al cuerpo sólido dos fuerzas f iguales y contrarias (indicadas en la figura por medio de flechas).

En virtud de lo que hemos dicho en el n.° 13, no habremos alterado en nada el estado del cuerpo sólido, es decir, que el conjunto de fuerzas iguales a f, indicadas por todas las flechas de la figura, equivaldrá a la resultante de las fuerzas P y Q (ya que todas las fuerzas iguales y contrarias podrán suprimirse, quedándonos solamente las fuerzas 2, 5, 9 y 1, 13 que equivalen, respectivamente, a las fuerzas P y Q).

Ahora bien, en virtud de lo que hemos dicho en el n.° 19, en el conjunto de fuerzas indicado por las flechas también podrá suprimirse el grupo de fuerzas (1, 2, 3 y 4), como también los grupos (5, 6, 7, 8), (9, 10, 11, 12), (13, 14, 15, 16), (17, 18, 19, 20) y (21, 22, 23, 24), quedando solamente las fuerzas a, b, c, d y e, las cuales equivaldrán al conjunto de todas las fuerzas y, por lo tanto, a la resultante de las fuerzas P y Q. Pero las fuerzas a y b tienen una resultante, que pasa por el punto C; las fuerzas c, d y e tienen una resultante, que pasa también por el punto C; por lo tanto, la resultante de las dos resultantes anteriores pasará por el punto C, y las fuerzas a, b, c, d y e equivaldrán a una fuerza, que pasa por el punto C, y como que dichas fuerzas equivalen a las P y Q, queda demostrado que la resultante de las fuerzas P y Q pasa por el punto C. Hemos visto anteriormente que esta resultante pasaba por el punto O; por lo tanto, la dirección de la resultante de P y Q será la recta $O\,C$ o sea la diagonal del paralelogramo construído sobre las intensidades de dichas fuerzas.

Si la razón entre las fuerzas P y Q fuese inconmensurable, podríamos considerar una fuerza auxiliar que manteniéndose *conmensurable* con la fuerza Q se acercase indefinidamente a la fuerza P (suponiendo, por ejemplo, formada dicha fuerza auxiliar por un cierto número variable de partes alícuotas cada vez menores de la fuerza Q). Para las fuerzas Q y la fuerza auxiliar considerada se cumpliría el teorema anterior; por lo tanto, en el límite se cumpliría también, o sea que también se cumpliría para las fuerzas P y Q.

Por lo tanto : *La resultante de dos fuerzas concurrentes tiene la dirección de la diagonal del paralelogramo construído sobre dichas fuerzas.* Vamos ahora a demostrar que la intensidad de dicha resultante es igual a la magnitud de dicha diagonal.

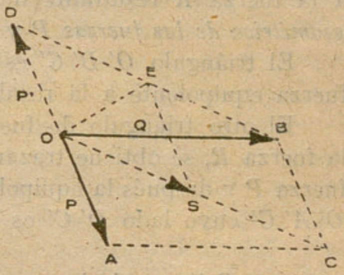

FIG. 14

Sean (fig. 14) P y Q las dos fuerzas, y $P' = O\,D$ una fuerza igual y contraria a la fuerza P. Formemos el paralelogramo $O\,A\,C\,B$ sobre las fuerzas P y Q. La figura $O\,D\,B\,C$ será también un paralelogramo, ya que $B\,C$ es igual y paralelo a $O\,A$ y, por lo tanto, a $O\,D$. Supongamos que la intensidad de la resultante de las fuerzas P y Q sea $O\,S$. El conjunto de fuerzas P, Q y P' es equivalente al conjunto de las dos fuerzas $O\,S$ y P', ya que $O\,S$ es la resultante de P y Q. Las fuerzas P, Q y P' equivalen a la sola fuerza Q, ya que P y P' son iguales y contrarias; por lo tanto, las fuerzas $O\,S$ y P' equivaldrán también a la fuerza Q, o sea que Q

será la resultante de las fuerzas $O\,S$ y P'. Siendo Q la resultante de las fuerzas $O\,S$ y P' la diagonal del paralelogramo construído sobre las fuerzas $O\,S$ y P' o sea la recta $O\,E$ tendrá que coincidir con la fuerza Q, lo cual sólo es posible haciendo coincidir el punto S con el punto C. Como que hemos supuesto que $O\,S$ era la resultante de P y Q, y acabamos de demostrar que el punto S tiene que coincidir con el punto C, $O\,C$ será la resultante de las fuerzas P y Q, como queríamos demostrar. Podemos decir, pues:

LA RESULTANTE DE DOS FUERZAS CONCURRENTES ESTÁ REPRESENTADA EN DIRECCIÓN Y MAGNITUD POR LA DIAGONAL DEL PARALELOGRAMO CONSTRUÍDO SOBRE DICHAS FUERZAS.

21. A fin de simplificar el lenguaje, diremos que dos fuerzas son *equipolentes* cuando son paralelas, iguales y del mismo sentido.

22. *Triángulo de fuerzas.* — Consideremos dos fuerzas P y Q concurrentes y su resultante R (fig. 15).

Por un punto cualquiera O' tracemos la fuerza $O'\,B'$ equipolente a la fuerza Q, y por el punto B' la fuerza $B'\,C'$ equipolente a la fuerza P. Uniendo el punto O' con el punto C' obtenemos el triángulo $O'\,B'\,C'$ que tiene sus lados iguales y paralelos a los del triángulo $O\,B\,C$, ya que $O\,B$ y $O'\,B'$ son iguales y paralelos y también lo son $B\,C$ y $B'\,C'$

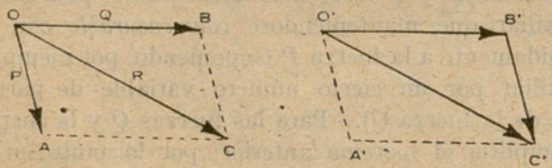

FIG. 15

El lado $O'\,C'$ recorrido en el sentido de O' hacia C' será, pues, equipolente a la fuerza R resultante de las P y O. Dicho lado $O'\,C'$ se llama *suma geométrica de las fuerzas P y Q*.

El triángulo $O'\,B'\,C'$ es el *triángulo de fuerzas* y sirve para hallar la fuerza equipolente a la resultante de dos fuerzas concurrentes.

El otro triángulo de fuerzas que da también la fuerza equipolente a la fuerza R, se obtiene trazando por el punto O' la fuerza equipolente a la fuerza P y después la equipolente a la Q obteniendo el triángulo de fuerzas $O'\,A'\,C'$ cuyo lado $O'\,C'$ es equipolente a R.

23. *Polígono de fuerzas.* — Consideremos (fig. 16) varias fuerzas concurrentes P, Q, S, T, y colocadas en un mismo plano (en lo sucesivo supondremos siempre que las fuerzas de que hablamos están en un mismo plano). Para hallar la resultante de las fuerzas P, Q, S y T empezaremos por hallar la resultante de dos cualesquiera de ellas, por ejemplo las P y Q; después la resultante de la resultante anterior y otra de las fuerzas, por ejemplo la fuerza S, y después la resultante de la resultante hallada, y la fuerza T.

Para hallar la resultante de las fuerzas P y Q formaremos el triángulo de fuerzas $O' A B$, trazando la fuerza $O' A$ equipolente a la fuerza P, y la $A B$ equipolente a la fuerza Q; la fuerza $O' B$ será equipolente a la resultante de las fuerzas P y Q. Trazando por el punto O la fuerza equipolente a la $O' B$ hallaríamos la resultante de ella y la fuerza S y el triángulo de fuerzas correspondientes es el $O' B C$, siendo $B C$ equipolente

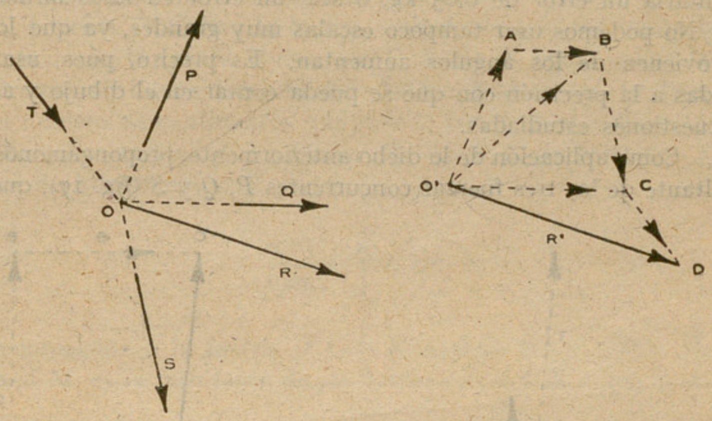

FIG. 16

a la fuerza S (ya que $O' B$ lo es a dicha resultante). La fuerza $O' C$ será, pues, equipolente a la resultante de las fuerzas $O' B$ y S, o sea de las fuerzas P, Q y S. Análogamente, trazando por el punto C la fuerza CD equipolente a la fuerza T, la fuerza $O' D = R'$ será equipolente a la resultante de las fuerzas $O' C$ y S, y como que $O' C$ es equipolente a la resultante de las fuerzas P, Q y S, la fuerza R' será equipolente a la resultante de las fuerzas P, Q, S y T. Trazando por el punto O la fuerza R equipolente a la fuerza R', dicha fuerza R será la resultante de las fuerzas concurrentes P, Q, S y T. Para conocer el punto D, extremo de la fuerza R', basta solamente trazar la línea poligonal $O' A B C D$, que se obtiene trazando sucesivamente las fuerzas equipolentes a las fuerzas dadas. Dicha línea poligonal lleva el nombre de *polígono de fuerzas*. La línea $O' D$ que *cierra* el polígono, es la suma geométrica de las fuerzas dadas.

Para formar el polígono de fuerzas, podríamos haber seguido un orden distinto al trazar las diferentes equipolentes, llegando siempre al mismo punto extremo D, ya que la resultante de las fuerzas dadas es única (pues suponiendo aplicadas las fuerzas a un punto material colocado en el punto de concurso, este punto puede moverse de una sola manera).

OBSERVACIÓN. — Las escalas que se adopten para representar las fuerzas han de ser las convenientes, a fin de que las construcciones gráficas quepan en el papel donde sea preciso hacerlas. Conviene usar escalas decimales, como por ejemplo, 1 mm por cada kg; 1 cm por cada kg, etc. Las escalas han de elegirse suficientemente grandes, a fin de que los errores cometidos en las construcciones sean lo más pequeños posible; así, por ejemplo, si la escala es de 1 cm por kg, el error de 1 mm representa un error de 0,1 kg, mientras que si la escala fuese de 2 cm por kg, el mismo error de 1 mm representaría un error de 0,05 kg, o sea, un error en kilos mitad del anterior. No podemos usar tampoco escalas muy grandes, ya que los errores que provienen de los ángulos aumentan. Es preciso, pues, usar escalas adecuadas a la precisión con que se pueda contar en el dibujo y adecuadas a las cuestiones estudiadas.

24. Como aplicación de lo dicho anteriormente, propongámonos calcular la resultante de las tres fuerzas concurrentes P, Q y S (fig. 17), que forman

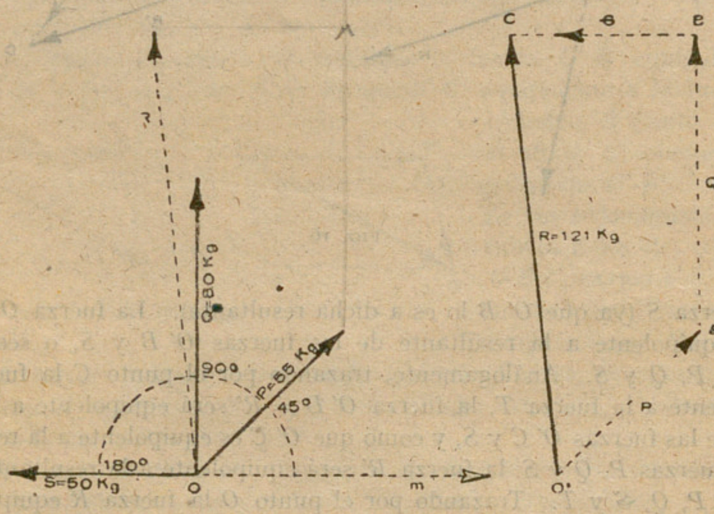

FIG. 17

ángulos de 45°, 90° y 180° con la recta $o\,m$ y valen, respectivamente, 55 kg, 80 kg y 50 kg.

Supongamos que nos ha convenido adoptar una escala de representación de las fuerzas de 1 cm por cada 20 kg, o sea de $\frac{1}{20} = 0{,}05$ cm por 1 kg. Como que los ángulos dados se refieren a los formados por las fuerzas (teniendo en cuenta sus sentidos), con el sentido de la recta $o\,m$ obtendremos fácilmente construyendo los ángulos dados, la situación de las fuerzas, cuyas intensidades dibujaremos a la escala adoptada. Las fuerzas dadas se representarán por las longitudes P, Q y S, respectivamente iguales a

$$55 \times 0{,}05 = 2{,}75 \text{ cm}, \qquad 80 \times 0{,}05 = 4 \text{ cm}, \qquad 50 \times 0{,}05 = 2{,}5 \text{ cm}$$

Para hallar la resultante construiremos el polígono de fuerzas. Tomemos un punto O' por punto de partida u origen. Tracemos por dicho punto la fuerza $O'A$ equipolente a la fuerza P; por el extremo A tracemos la fuerza equipolente a la fuerza Q, o sea la fuerza AB; por el extremo B tracemos la fuerza BC equipolente a la última fuerza S. El punto C es el extremo del polígono de fuerzas $O'ABC$. Uniendo el origen O' con el extremo C del polígono, o sea formando la suma geométrica de las fuerzas P, Q y S, la recta $O'C$ dará la fuerza equipolente a la resultante buscada.

El sentido de la fuerza R es el de O' hacia C, como indica la flecha, y obtendremos su intensidad midiendo su longitud en centímetros y dividiendo el número de centímetros que resulte por 0,05, que es lo que representa 1 kg. La longitud de la fuerza $O'C = R$ es de 6,05; por lo tanto, el número de kilogramos será:

$$\frac{6{,}05}{0{,}05} = 121 \text{ kg}$$

La equipolente a la fuerza $O'C = R$ trazada por el punto O, que es la fuerza OM, es la resultante de las fuerzas P, Q y S, o sea la resultante buscada.

25. Cuando las fuerzas concurrentes forman entre sí un ángulo recto, caso bastante frecuente en la práctica, es muy fácil calcular el valor de la resultante y los ángulos que forma con las fuerzas. En efecto, sean las fuerzas rectangulares $OB = P$ y $OA = Q$ de la fig. 18. Partiendo del punto A, extremo de la fuerza Q, tracemos la equipolente a la fuerza P, que será la AC, y tracemos la recta OC, con lo cual obtendremos el triángulo de fuerzas OAC, que tendrá el ángulo OAC recto. La hipotenusa OC, o sea la suma geométrica de Q y P, será la resultante de las fuerzas P y Q. Según se ha visto en la Geometría, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos; por lo tanto:

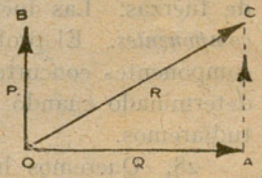

FIG. 18

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$$

o sea

$$R^2 = Q^2 + P^2$$

de donde se deduce

$$R = \sqrt{Q^2 + P^2}$$

que da la intensidad de la resultante.

Recordando que en un triángulo rectángulo un cateto es igual al otro multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al primero, tendremos:

$$C A = O A \times \operatorname{tg} A O C$$

y como que

$$C A = P \; : \; O A = Q \text{ resulta } P = Q \times \operatorname{tg} A O C$$

de donde

$$\operatorname{tg} A O C = \frac{P}{Q}$$

Conociendo el ángulo $A O C$, por medio de una tabla de tangentes conoceremos fácilmente el ángulo $B O C$, ya que es el complementario del ángulo $A O C$.

26. Si el ángulo de las dos fuerzas concurrentes no fuese recto, podríamos usar también fórmulas trigonométricas para hallar la resultante y los ángulos que forma con las fuerzas, pero es preferible el método gráfico.

27. En todas las cuestiones resueltas hasta ahora nos han dado las fuerzas y hemos hallado la resultante, o sea que hemos *compuesto* las fuerzas. Hemos estudiado, pues, la *composición* de fuerzas concurrentes. El problema recíproco, o sea que dada la resultante deben hallarse las fuerzas que compuestas den dicha resultante, es el problema de *descomposición* de fuerzas. Las fuerzas en que se descompone la resultante se llaman *componentes*. El problema de la descomposición de una fuerza en varias componentes concurrentes, de dirección dada, es indeterminado, y sólo es determinado cuando se trata de dos componentes, que es el caso que estudiaremos.

28. Queremos hallar las componentes de una fuerza conociendo su dirección, o sea, queremos descomponer una fuerza dada en otras dos de dirección dada (claro está que dichas direcciones tienen que ser concurrentes con la fuerza dada). Sean (fig. 19) P la fuerza dada y $O m$ y $O n$ las di-

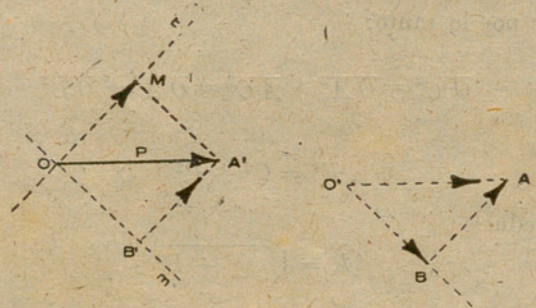

FIG. 19

recciones en que actúan las componentes. Formemos el triángulo de fuerzas, por lo cual trazaremos por un punto O' la fuerza $O'A$ equipolente a la fuerza P, y por sus extremos O' y A las rectas $O'B$ y AB, respectivamente paralelas a las direcciones Om y On. El triángulo $O'BA$ será el triángulo de fuerzas buscado.

Los lados $O'B$ y BA recorridos en *sentido periférico contrario* al de la fuerza $O'A$ (ya que esta fuerza ha de ser la resultante), serán las componentes de la fuerza $O'A$. Trazando por el punto O las equipolentes a las fuerzas $O'B$ y BA obtendremos las componentes de la fuerza dada P según las direcciones dadas. Resulta más sencillo resolver el problema formando el triángulo de fuerzas a partir del punto O de concurso de las direcciones dadas, con lo cual resulta el triángulo de fuerzas $OB'A'$ (para formarlo basta trazar por el punto A' la paralela $A'B'$ a la dirección On). Las componentes buscadas son OB', y la OM equipolente a la fuerza $B'A'$.

Habríamos podido operar también trazando por el punto A' la paralela $A'M$ a la recta Om, obteniendo el triángulo de fuerzas $OA'M$ que resuelve también el problema.

Ejemplo : Un peso $P = 120$ kg (fig. 20) está suspendido de los ganchos A y B por medio de las cuerdas CO, OB y OA. Queremos saber cuáles

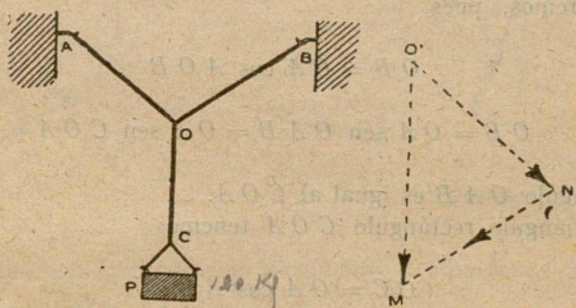

FIG. 20

son las fuerzas que hacen las cuerdas AO y BO (prescindiendo del peso de éstas por suponerlo insignificante en relación a P).

Resolución : Tendremos que descomponer la fuerza P transmitida por la cuerda OC en las dos direcciones OA y OB, y hallar las componentes. Tomemos para representar la fuerza P una longitud $O'M$ igual a 3 cm. El triángulo de fuerzas que resuelve la cuestión es el $O'NM$, que tiene los lados $O'M$, MN y NO' respectivamente paralelos a OC, OB y OA. Las componentes de P son las fuerzas $O'N$ y NM. La cuerda AO estará sujeta a una fuerza equipolente a la $O'N$ y la cuerda BO a una fuerza equipolente a la NM (los sentidos están indicados por las flechas). Las longitudes $O'N$ y NM valen, respectivamente, 2,6 cm y 2,4 cm. Hemos dicho que 3 cm representaban 120 kg; cada centímetro representará, pues, $\frac{120}{3}$ 40 kg; por lo tanto, las longitudes 2,6 cm y 2,4 cm representarán, respectivamente,

$$2{,}6 \times 40 = 104 \text{ kg} \quad \text{y} \quad 2{,}4 \times 40 = 96 \text{ kg}$$

Las fuerzas $O'N$ y NM tendrán, pues, las intensidades de 104 kg y 96 kg, respectivamente.

29. Es muy frecuente que las dos componentes de una fuerza formen ángulo recto, y en este caso es muy fácil hallar su valor analíticamente. En efecto, sean (fig. 21) OA la fuerza dada y OB y OC sus componentes rectangulares.

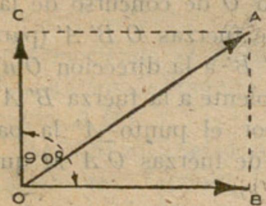

FIG. 21

Sabemos por la Trigonometría que en un triángulo rectángulo un cateto es igual a la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto al cateto, o bien por el coseno del ángulo adyacente a dicho cateto. En el triángulo rectángulo AOB tendremos, pues,

$$OB = OA \cos AOB$$

$$OB = OA \operatorname{sen} OAB = OA \operatorname{sen} COA$$

ya que el ángulo OAB es igual al COA.

En el triángulo rectángulo COA tenemos

$$OC = OA \cos AOC$$

$$OC = OA \operatorname{sen} CAO = OA \operatorname{sen} AOB$$

ya que $CAO = AOB$.

Las relaciones anteriores son de uso frecuente.

Ejemplo : Un cuerpo que pesa 1400 kg está colocado sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 25° con la horizontal (fig. 22). Queremos saber cuánto vale la presión del cuerpo sobre el plano inclinado y cuánto la fuerza que lo hace mover a lo largo del plano.

La recta CE es horizontal y la OA, perpendicular a CE, representa el peso del cuerpo O. Éste tiende a moverse en la dirección Om, paralela a CD, y ejerce sobre el plano una presión normal de una dirección OB' perpendicular a la recta CD (que es la línea de máxima pendiente del plano). Tenemos que descomponer, pues, la fuerza OA en dos que tengan las direcciones $O\,B$ y $O\,m$, resultando el triángulo $O\,A\,B$ que tiene el lado $A\,B$ paralelo a la dirección $O\,m$, coincidiendo el otro lado $O\,B$ con la dirección $O\,B'$. El triángulo $O\,A\,B$ tiene el ángulo $O\,B\,A$ recto, ya que $O\,B$ es normal a $C\,D$ y, por lo tanto, a $O\,m$ y $A\,B$, y el ángulo $A\,O\,B$ vale 25°, ya que tiene sus lados perpendiculares a los del ángulo $D\,C\,E$ y dirigidos en el mismo sentido. Por lo tanto, tendremos:

$$O\,B = O\,A \cos A\,O\,B = 1400 \times \cos 25^\circ = 1400 \times 0{,}9 = 1260$$

$$B\,A = O\,A \operatorname{sen} A\,O\,B = 1400 \times \operatorname{sen} 25^\circ = 1400 \times 0{,}423 = 592$$

La presión sobre el plano es, pues, de 1260 kg, y la fuerza que hace resbalar el cuerpo a lo largo del plano es de 592 kg.

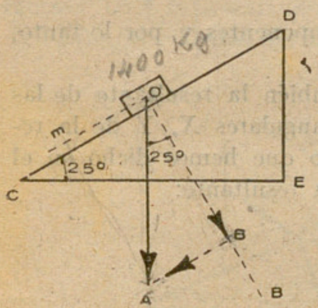

FIG. 22

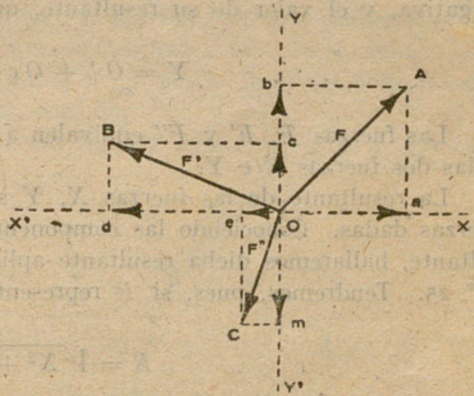

FIG. 23

Hubiéramos podido resolver gráficamente el problema. Se recomienda hacerlo como ejercicio.

30. Para hallar analíticamente la resultante de varias fuerzas concurrentes podemos valernos de la descomposición rectangular. En efecto, sean F, F' y F'' (fig. 23) tres fuerzas concurrentes, cuya resultante queremos hallar.

Tracemos por el punto de concurso O dos ejes rectangulares $X\,X'$, $Y\,Y'$, y descompongamos las fuerzas dadas según las direcciones de dichos ejes. Las componentes de la fuerza F serán:

$$\begin{cases} O\,a = F \cos A\,O\,a \\ O\,b = F \cos A\,O\,b \end{cases}$$

Las de la fuerza F' son:

$$\begin{cases} O\,d = F' \cos B\,O\,d \\ O\,c = F' \operatorname{sos} B\,O\,c \end{cases}$$

Y las de la fuerza F'' son:

$$\begin{cases} O\,e = F'' \cos C\,O\,e \\ O\,m = F'' \cos C\,O\,m \end{cases}$$

Si consideramos positivos los sentidos $O\,Y$ y $O\,X$, serán negativos los sentidos $O\,Y'$ y $O\,X'$; las fuerzas $O\,e$ y $O\,d$ serán negativas, y la $O\,a$ positiva. La resultante de estas fuerzas, que designaremos por X, tiene por valor

$$X = O\,a - O\,e - O\,d$$

De la misma manera, las fuerzas $O\,b$ y $O\,c$ serán positivas, y la $O\,m$ negativa, y el valor de su resultante, que llamaremos Y, será:

$$Y = O\,b + O\,c - O\,m$$

Las fuerzas F, F' y F'' equivalen á sus componentes y, por lo tanto, a las dos fuerzas X e Y.

La resultante de las fuerzas X, Y será también la resultante de las fuerzas dadas. Conociendo las componentes rectangulares X, Y de la resultante, hallaremos dicha resultante aplicando lo que hemos dicho en el n.° 25. Tendremos, pues, si R representa dicha resultante:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\operatorname{tg}(R, X) = \frac{Y}{X}$$

fórmulas que dan a conocer la intensidad, dirección y sentido de la resultante buscada.

Observaciones. — Observemos que la componente X es igual a la suma algebraica de las proyecciones de las fuerzas F, F' y F'' sobre el eje $X'X$, ya que $O\,a - O\,e$ y $-O\,d$ son dichas proyecciones. Análogamente, la componente Y es la suma algebraica de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje $Y'Y$.

Si las fuerzas fuesen en número superior a tres, operaríamos de la misma manera, llegando a las mismas conclusiones y resultados.

EQUILIBRIO

31. Diremos que varias fuerzas aplicadas simultáneamente a un cuerpo sólido se mantienen en *equilibrio* cuando su conjunto en nada altera o mo-

difica su estado de reposo o de movimiento. En particular, si el cuerpo está en reposo antes de la aplicación simultánea de las fuerzas, continuará en el mismo estado después de aplicadas.

32. Es evidente que la resultante de varias fuerzas en equilibrio ha de ser nula, porque si tuviesen algún valor el cuerpo estaría sometido a esta fuerza resultante; si el cuerpo estuviese en reposo, seguiría la dirección de la fuerza, y si estuviese en movimiento, éste estaría influído por la expresada resultante.

33. *El polígono de fuerzas correspondiente a un sistema de fuerzas concurrentes en equilibrio debe ser un polígono cerrado,* ya que siendo nula la resultante, el origen y el extremo del polígono de fuerzas han de coincidir. Así, refiriéndonos a la fig. 17, para que las fuerzas P, Q y S pudiesen mantenerse en equilibrio, sería preciso que su resultante $O'\,C$ fuese nula, o sea que el punto C coincidiese con el punto O' y, por lo tanto, el polígono de fuerzas $O'\,A\,B\,C$ sería un polígono cerrado.

Ejemplo : Dadas las cuatro fuerzas concurrentes P, Q, R y T (fig. 24),

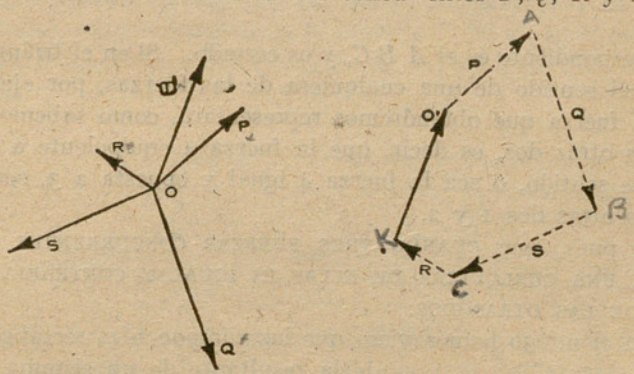

FIG. 24

hallar la fuerza que, junto con las dadas, forme un sistema de fuerzas en equilibrio.

Para resolver el problema trazaremos el polígono de fuerzas $O'\,A\,B\,C\,K$, en el cual O' es el origen y K el extremo. Para cerrar el polígono, uniremos el punto K con el punto O', y la fuerza $K\,O'$ (recorrida en el mismo sentido periférico que las demás) será la que, junto con las dadas, formará el sistema de fuerzas en equilibrio, ya que el polígono correspondiente se cerrará. La equipolente $O\,T$ a la fuerza $K\,O'$ será la fuerza buscada.

34. Para que dos fuerzas de una misma dirección puedan equilibrarse, es preciso que sean iguales y contrarias, ya que es la única manera de que su resultante sea nula.

35. Consideremos un triángulo $A\ B\ C$ (fig. 25) en el que los tres lados recorridos en un mismo sentido periférico representen fuerzas. Por un punto O tracemos las fuerzas 1, 2 y 3 equipolentes a los lados del triángulo considerado, las cuales estarán en equilibrio, ya que el polígono de

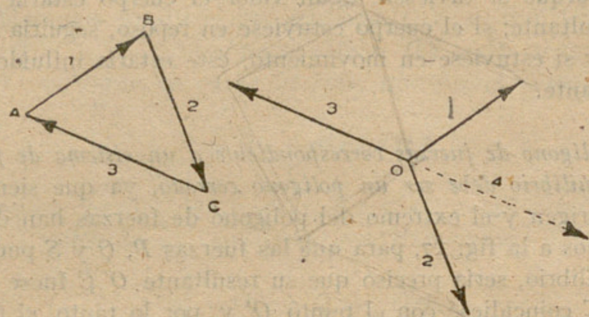

FIG. 25

fuerzas correspondiente es el $A\ B\ C$, y es cerrado. Si en el triángulo $A\ B\ C$ cambiamos el sentido de una cualquiera de las fuerzas, por ejemplo de la fuerza 3, la fuerza que obtendremos representará, como sabemos, la resultante de las otras dos, es decir, que la fuerza 4 equipolente a la fuerza 3 cambiada de sentido, o sea la fuerza 4 igual y opuesta a 3, será la resultante de las otras dos 1 y 2.

Vemos, pues, que CUANDO TRES FUERZAS CONCURRENTES ESTÁN EN EQUILIBRIO, UNA CUALQUIERA DE ELLAS ES IGUAL Y CONTRARIA A LA RESULTANTE DE LAS OTRAS DOS.

36. En el n.° 30 hemos visto que las componentes rectangulares $X\ Y$ de la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes, son las sumas algebraicas de las proyecciones de las fuerzas del sistema sobre los expresados ejes rectangluares. Si el sistema está en equilibrio, siendo, por lo tanto, nula la resultante, X e Y tendrán que ser también nulas; hemos demostrado, pues, que:

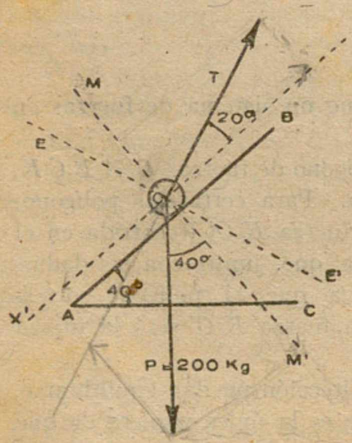

FIG. 26

CUANDO UN SISTEMA DE FUERZAS CONCURRENTES ESTÁ EN EQUILIBRIO, LA SUMA ALGEBRAICA DE LAS PROYECCIONES DE LAS FUERZAS SOBRE DOS EJES RECTANGULARES HA DE SER NULA.

NO ES PRECISO QUE ESTOS DOS EJES SEAN RECTANGULARES.

Éstas son las dos condiciones analiticas necesarias y suficientes para que un sistema de fuerzas concurrentes esté en equilibrio.

Como que los ejes rectangulares a que se refiere lo anterior son arbitrarios, podemos decir, de una manera general, que:

EN TODO SISTEMA DE FUERZAS CONCURRENTES EN EQUILIBRIO, LA SUMA ALGEBRAICA DE LAS PROYECCIONES DE LAS FUERZAS QUE COMPONEN EL SISTEMA SOBRE UN EJE CUALQUIERA HA DE VALER CERO.

Ejemplo 1.° : Un cuerpo cilíndrico que pesa 200 kg (fig. 26) está sostenido por medio de un alambre en un plano inclinado de la manera indicada en la figura (en la cual están también marcados los ángulos correspondientes). Se trata de averiguar la tensión del alambre y la fuerza que ejerce el plano contra el cuerpo, o sea la *reacción* del plano (reacción normal).

Es evidente que la tensión T del alambre, la *reacción* del plano (que tiene la dirección y sentido $O\,M$) y el peso P se equilibran.

Tomémos un eje $X'\,X$ paralelo a la línea $A\,B$ de máxima pendiente del plano inclinado y proyectemos todas las fuerzas sobre él. La reacción del plano tiene una proyección nula (ya que es normal a la recta $A\,B$ y, por lo tanto, al eje). La proyección de la tensión T del alambre es T cos 20°, y la del peso, P sen 40° (ya que el ángulo $M'\,O\,P$ es igual al $C\,A\,B$). Tendremos, pues:

$$T \cos 20^\circ - P \operatorname{sen} 40^\circ = 0$$

de donde

$$T = P\,\frac{\operatorname{sen}\ 40^\circ}{\cos\ 20^\circ} = 200\,\frac{0{,}642\ 79}{0{,}939\ 69} = 137\ \text{kg}$$

Para hallar el valor, que llamaremos R, de la reacción del plano (como que podemos proyectar sobre un eje cualquiera), proyectaremos las fuerzas en equilibrio sobre la dirección $E'\,E$, perpendicular a la dirección de la fuerza T a fin de que la proyección de T sea nula. El ángulo $M\ O\ E$ vale, como vemos fácilmente, 20°, y el ángulo $P\ O\ E'$ vale $40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$. Proyectando sobre $E\,E'$ y recordando que T no tiene proyección, resulta (teniendo en cuenta los sentidos):

$$R \cos 20^\circ - P \cos 60^\circ = 0$$

por lo tanto:

$$R = P\,\frac{\cos\ 60^\circ}{\cos\ 20^\circ} = 200\,\frac{0{,}500\ 00}{0{,}939\ 69} = 106\ \text{kg}$$

La tensión del alambre es de 136 kg, y la reacción del plano (igual y contraria a la presión del cuerpo sobre el plano) es de 106 kg.

Para resolver gráficamente este problema consideraríamos la fuerza P y por sus extremos trazaríamos rectas paralelas a las direcciones OM y OS que son las direcciones de la reacción del plano y de la tensión del alambre. Queda entonces formado el triángulo cuyos lados recorridos en el sentido periférico que tiene la fuerza P darían las fuerzas equipolentes a las fuerzas buscadas. Hágase como ejercicio.

Ejemplo 2.° : Un peso $P = 800$ kg está sostenido de la manera indicada en la figura 27, por medio de una vigueta y un tirante. ¿Cuál es la compresión de la vigueta y cuál la tensión del tirante?

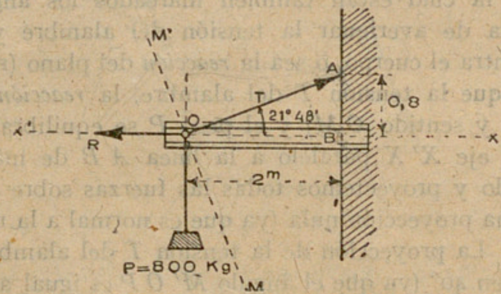

FIG. 27

En el punto O se realiza el equilibrio de la fuerza P, la tensión T del tirante y la compresión R de la vigueta que obra en el sentido marcado en la figura.

Antes de calcular los valores de las incógnitas R y T tenemos que calcular el ángulo $B\,O\,A$. En el triángulo $A\,B\,O$ tenemos:

$$\operatorname{tg} B\,O\,A = \frac{B\,A}{B\,O} = \frac{800}{2000} = 0{,}4$$

de donde resulta

$$B\,O\,A = 21^\circ\ 48'$$

Para calcular T proyectaremos las fuerzas P, R y T sobre la vertical que pasa por el punto o a fin de que la fuerza R tenga una proyección nula, y tendremos:

$$T \operatorname{sen} 21^\circ\ 50' - P = O$$

de donde

$$T = \frac{P}{\operatorname{sen} 21^\circ\ 48'} = \frac{800}{0{,}371\ 37} = 2154 \text{ kg}$$

Para obtener el valor de R proyectaremos las fuerzas sobre la recta $M M'$, perpendicular a la dirección de la fuerza T, a fin de que la proyección de esta fuerza sea nula. Es muy fácil observar que el ángulo $M\ O\ P$ es igual al $B\ O\ A$, y que el $M'\ O\ R$ es complementario del $B\ O\ A$ (ya que el ángulo $M'\ O\ T$ es recto). Tendremos, pues:

$$R \cos 68^\circ\ 12' - P \cos 21^\circ\ 48' = 0$$

de donde

$$R = \frac{P \cos 21^\circ\ 48'}{\cos 68^\circ\ 12'} = \frac{800 \times 0{,}928\ 49}{0{,}371\ 37} = 2000 \text{ kg aprox}$$

La tensión del tirante es de 2154 kg y la compresión de la vigueta de 2000 kg.

Podríamos resolver el problema gráficamente, y para ello construiríamos la fig. 27 a escala, a fin de conocer la dirección $O\ A$. Construiríamos el triángulo de fuerzas, del cual conocemos el lado equipolente a la fuerza P y las direcciones $O\ A$ y $O\ B$ de los demás lados, los cuales recorridos en el mismo sentido periférico que la fuerza P, dan a conocer los valores de T y R. Hágase como ejercicio.

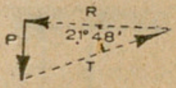

FIG. 28

Podríamos resolver este problema de otra manera más sencilla. En efecto, el triángulo de fuerzas es rectángulo (fig. 28) y, por lo tanto, tenemos:

$$T = \frac{P}{\operatorname{sen}\ 21^\circ\ 48'} = \frac{800}{0{,}371\ 37} = 2154$$

$$R = \frac{P}{\operatorname{tg}\ 21^\circ\ 48'} = \frac{800}{0{,}4} = 2000 \text{ kg}$$

Esta resolución es preferible a la anterior, por ser mucho más rápida. Antes de proceder a la resolución de un problema, será preciso escoger siempre el método más conveniente para el caso de que se trate, a fin de hacer el menor número posible de cálculos, ahorrando tiempo y suprimiendo causas de error.

Observación importante. — Para los que no tengan gran seguridad en los cálculos, son preferibles las soluciones gráficas, puesto que son las más fáciles y seguras, teniendo casi siempre suficiente aproximación para la práctica y siendo, por lo tanto, en este caso, las preferidas.

MECÁNICA

PRIMERA PARTE

PROBLEMAS

1. ¿Qué diferencia hay entre los cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos?

2. Representar las fuerzas $f = 12$ kg, $f' = 7{,}6$ kg, $f'' = 19{,}6$ kg y $f''' = 10$ kg a una escala de 100 mm. por 50 kg.

3. ¿Cuál es la resultante de 5 fuerzas de 25, 182, 17, 92 y 105 kg. respectivamente, siendo las dos primeras positivas y las restantes negativas?

4. El cuerpo *C* (fig. 1), que pesa 500 kg, está suspendido de una cuerda. *a)* ¿Qué fuerza tendrá que aplicarse horizontalmente al punto *B* para levantar el peso 40 cm? *b)* ¿A qué esfuerzo estará sometida la cuerda *A B*?

Resolver gráficamente el problema, adoptando una escala de 1 mm por 10 kg y 1 mm por 100 mm.

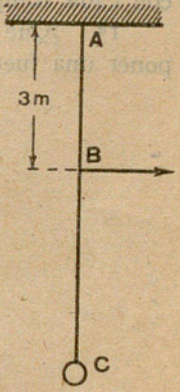

FIG. 1

5. Calcular algebraicamente las fuerzas a que están sometidas lascuerdas *O B* y *O A* y el puntal *O C* de la fig. 2.

6. Un cuerpo que pesa 150 kg se halla sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 32° con la horizontal. Calcular la tensión del alambre que lo sostiene formando un ángulo de 15° con el plano, y la reacción del plano.

7. Supongamos que en la fig. 20 del texto la distancia *A B* es de 3 m, y que queremos suspender el cuerpo *P*, que pesa 200 kg, primeramente con una cuerda de 4,5 m de longitud y después con una de 5 m. Determinar el esfuerzo a que estarán sometidas las dos cuerdas : *a)* cuando el cuerpo esté atado a la mitad de las cuerdas; *b)* cuando esté atado a 2 m. de un extremo de las cuerdas. Resolver gráficamente el problema.

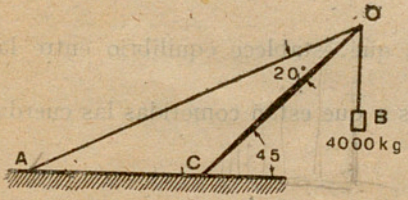

FIG. 2

8. ¿Cuándo decimos que dos o más fuerzas son concurrentes?

9. Descomponer una fuerza de 60 kg en dos componentes rectangulares que están en la relación de 2 a 3.

10. Calcular algebraicamente la resultante de dos fuerzas concurrentes rectangulares que valen, respectivamente, 15 y 32 kg.

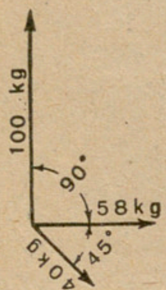

FIG. 3

11. Calcular algebraicamente el ángulo que en el problema 9 formará cada una de las componentes con la resultante.

12. Descomponer gráficamente una fuerza de 48 kg en dos componentes rectangulares, una de las cuales tiene un valor de 25 kg.

13. Trazar 3 fuerzas concurrentes de 12, 20 y 25 kg, respectivamente, de manera que se equilibren.

14. Dos fuerzas concurrentes de 90 y 55 kg, respectivamente, forman entre sí un ángulo de 110°. Calcular algebraicamente la resultante, y el ángulo que ésta formará con cada componente.

15. ¿Qué quiere decir componer dos fuerzas, y qué significa descomponer una fuerza?

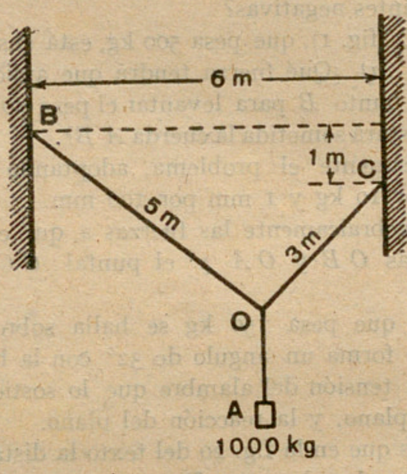

FIG. 4

16. Hallar gráficamente la fuerza que establece equilibrio entre las de la fig. 3.

17. Hallar gráficamente las fuerzas a que están cometidas las cuerdas *OA*, *OB* y *OC* (fig. 4).

Precio: **3** ptas.