



ESCUELA ELEMENTAL DEL TRABAJO
DE LA DIPUTACIÓN PROVINCIAL DE BARCELONA



M E C Á N I C A E L E M E N T A L

SEGUNDA PARTE



E. E. T.
ARTES GRÁFICAS
1946

FU-13-16

ESCUELA ELEMENTAL DEL TRABAJO
DE LA DIPUTACIÓN PROVINCIAL DE BARCELONA

SECCIÓN EDICIONES

MECÁNICA
ELEMENTAL

SEGUNDA PARTE



R. 11.616

ESCUOLA ELEMENTAL DEL TRABAJO
DE LA DIPUTACION PROVINCIAL DE BARCELONA

SECCION EDICIONES

MECANICA
ELEMENTAL

SEGUNDA PARTE

MECÁNICA ELEMENTAL

SEGUNDA PARTE

MOMENTOS. FUERZAS PARALELAS

37. *Momento de una fuerza respecto a un punto.* — El producto de la intensidad de la fuerza F (fig. 29) por la distancia OC del punto O a la dirección de la fuerza considerada, toma el nombre de *momento* de la fuerza F respecto al punto O .

Midiendo las fuerzas en kilogramos y las distancias en metros, los momentos vienen expresados en kilográmetros.

Uniendo los extremos de la fuerza con el punto O resulta el triángulo AOB cuya área

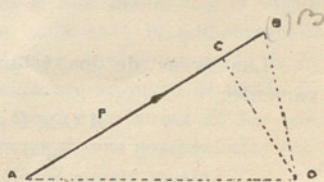


FIG. 29

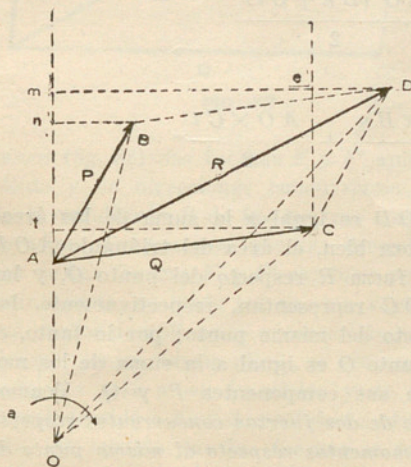


FIG. 30

Uniendo el punto O con los extremos de las tres fuerzas, obtendremos los triángulos AOB , AOD y AOC , que tomando AO como base común,

será:

$$\frac{AB \times OC}{2}$$

y como AB es proporcional a la intensidad F de la fuerza, resulta que $AB \times OC$

$\frac{AB \times OC}{2}$ será proporcional al momento $F \times OC$ de la fuerza; por lo tanto, a cierta escala, el momento de la fuerza F estará representado por el área del triángulo AOB .

La distancia OC toma el nombre de *brazo de palanca* del momento.

38. Consideremos (fig. 30) las dos fuerzas concurrentes $AB = P$, $AC = Q$, de resultante $AD = R$, y un punto O situado en el plano de las fuerzas consideradas.

tienen las alturas respectivas Bn , Dm y Ct . Trazando por el punto C una paralela a la base AO formaremos el triángulo DeC que es igual al BnA , ya que tienen sus lados paralelos y, además, el lado DC igual al AB ; por lo tanto, $De = Bn$.

La figura $mtce$ es un rectángulo; por lo tanto,

$$tC = em$$

Ahora bien; en la figura vemos que

$$Dm = De + em$$

y como, según acabamos de ver, $De = Bn$ y $em = Ct$, resulta

$$Dm = Bn + Ct \quad (1)$$

Las áreas de los triángulos AOB , AOD y AOC valen, respectivamente:

$$\frac{AO \times Bn}{2}, \quad \frac{AO \times Dm}{2}, \quad \frac{AO \times Ct}{2}$$

y poniendo en vez de Dm su valor (1) tendremos:

$$\frac{AO \times Dm}{2} = \frac{AO (Bn + Ct)}{2}$$

o sea

$$\frac{AO \times Dm}{2} = \frac{AO \times Bn}{2} + \frac{AO \times Ct}{2}$$

de modo que el área del triángulo AOD es igual a la suma de las áreas de los triángulos AOB y COA . Ahora bien, el área del triángulo AOD representa (n.º 37) el momento de la fuerza R respecto del punto O , y las áreas de los triángulos AOB y AOC representan, respectivamente, los momentos de las fuerzas P y Q respecto del mismo punto; por lo tanto, el momento de la fuerza R respecto del punto O es igual a la suma de los momentos, respecto al mismo punto, de sus componentes P y Q . Veamos pues, que: **El momento de la resultante de dos fuerzas concurrentes respecto a un punto es igual a la suma de los momentos respecto al mismo punto de las fuerzas correspondientes.**

Para que esta proposición se verifique, cualquiera que sea la situación del punto O respecto a las fuerzas, es necesario atribuir a cada una de ellas un signo que dependa de su situación respecto del punto O ; signo que se determina en virtud de las consideraciones siguientes:

Marquemos (fig. 31) un sentido de rotación alrededor del punto O , por ejemplo, el indicado por la flecha; si el sentido de la fuerza es el mismo que el de la flecha, el momento será positivo, y si es contrario, será negativo. Así, en la fig. 31, la fuerza F tiene un momento positivo, y la fuerza F' tiene un momento negativo. En la fig. 30, si el sentido positivo es el indicado por la flecha, los momentos de las tres fuerzas son positivos. Si el punto O estuviese colocado como en la fig. 32, los momentos de R y P serían positivos, y el de Q negativo.

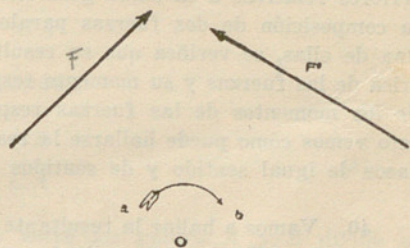


FIG. 31

Colocando el punto O en diversas posiciones respecto a las fuerzas y atribuyendo a sus momentos el signo correspondiente, siempre se hallará, aplicando a cada caso la demostración

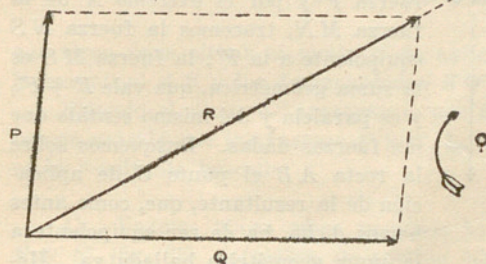


FIG. 32

anterior, que el momento de la resultante respecto al punto O , es igual a la suma de los momentos de sus componentes respecto al mismo punto. (El punto O lleva el nombre de centro de momentos.)

39. *Composición de fuerzas paralelas.* — Para hallar la resultante de dos fuerzas paralelas y de un mismo sentido o sentidos contrarios, conside-

remos (fig. 33) dos fuerzas F y F' aplicadas a los puntos A y B de un cuerpo sólido y de direcciones concurrentes. El triángulo de fuerzas OCD nos da la resultante R de las fuerzas consideradas. Imaginemos que las direcciones de las fuerzas F y F' cambian paulatinamente, de modo tal que sin variar sus puntos de aplicación y conservándose siempre en un mismo plano, se acerquen cada vez más a ser paralelas y de un mismo sentido o bien de sentidos contrarios. A medida que las fuerzas se van acercando al paralelismo, la resultante R , que va variando, es siempre equipolente a la suma geométrica de las fuerzas F y F' , y su momento respecto a un punto cualquiera es igual a la suma de los momentos de las fuerzas F y F' .

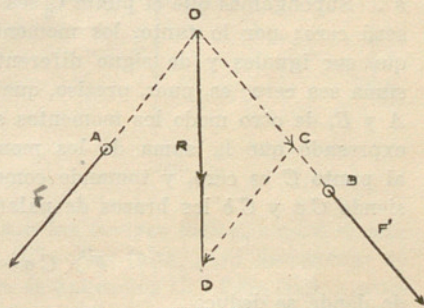


FIG. 33

Los triángulos semejantes CaA y CbB dan:

$$\frac{Cb}{Ca} = \frac{CB}{CA}$$

y comparando esta proporción con la anterior

$$\frac{F}{F'} = \frac{CB}{CA} \quad (1)$$

De modo que el punto C situado entre los puntos A y B divide la recta AB en dos partes CA y CB inversamente proporcionales a las intensidades de las fuerzas F y F' .

De la proporción (1) deducimos:

$$\frac{F}{F + F'} = \frac{CB}{CB + CA} = \frac{CB}{AB} \quad (2)$$

que sirve para situar el punto C de aplicación de la resultante, conociendo la magnitud AB y las fuerzas dadas F y F' .

Fijando el punto C , trazaremos por él la fuerza $F + F'$ paralela y del mismo sentido que las fuerzas F y F' , la cual, por lo que antes hemos dicho, es la resultante buscada.

41. Veamos ahora cómo podemos hallar la resultante de dos fuerzas F y F' (fig. 35) paralelas, de sentido contrario y de intensidad diferente, aplicadas a dos puntos A y B de un cuerpo sólido. La marcha que hay que seguir es análoga a la anterior.

La suma geométrica de las fuerzas F y F' es la fuerza MS , obtenida trazando por el punto M la fuerza MN equipolente a la fuerza mayor F , y por el punto N la fuerza NS equipolente a la fuerza menor F' . La resultante buscada será equipolente a la fuerza MS y, por lo tanto, será paralela a las fuerzas dadas, tendrá el sentido de la fuerza mayor F y valdrá $F - F'$. Nos falta, para determinar su posición, conocer la situación de su punto de aplicación C . Para hallar sobre la recta AB el punto C de aplicación de la resultante, nos valdremos del teorema de los momentos tomando por centro el punto que nos convenga, que será el punto A de aplicación de la fuerza F . Sabemos que el momento

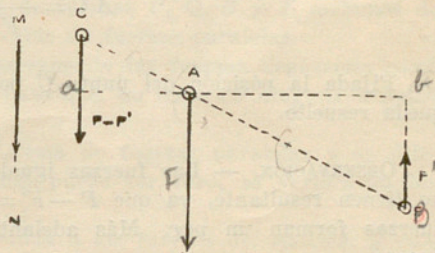


FIG. 35

de la resultante $F - F'$ es igual a la suma de los momentos de las fuerzas F y F' . El momento de la fuerza F es cero (ya que el centro de momentos está en la dirección de la fuerza); por lo tanto, el momento respecto al punto A de la resultante $F - F'$ será igual al momento de la fuerza F' respecto al mismo punto, lo cual exige, dado el sentido que ha de tener la resultante, que el punto C se halle respecto del punto A en el lado opuesto al del punto B , a fin de que los dos momentos considerados puedan tener el mismo signo. Siendo $A a$ y $A b$ los respectivos brazos de palanca de la resultante y de la fuerza F' , tendremos, según lo dicho antes:

$$(F - F') A a = F' \times A b$$

de donde

$$\frac{F - F'}{F'} = \frac{A b}{A a}$$

Ahora bien, los triángulos semejantes $A a C$ y $A b B$ dan

$$\frac{A b}{A a} = \frac{A B}{A C}$$

proporción que, comparada con la anterior, da

$$\frac{F - F'}{F'} = \frac{A B}{A C}$$

de la que

$$A C = \frac{F' \times A B}{F - F'}$$

Fijada la posición del punto C por la igualdad anterior, el problema queda resuelto.

OBSERVACIÓN. — Las fuerzas iguales, paralelas y de sentido contrario no tienen resultante, ya que $F - F' = 0$, y en este caso se dice que las fuerzas forman un *par*. Más adelante nos ocuparemos de los *pares de fuerzas*.

42. Consideremos ahora diversas fuerzas paralelas, de sentidos diferentes, situadas en un mismo plano. Supongamos, por ejemplo, que se trata de las fuerzas P , Q , S y T (fig. 36). Para hallar su resultante operaremos del siguiente modo: Buscaremos la resultante R de las fuerzas P y Q , según lo que hemos dicho en el n.º 40. Luego, compondremos la resultante R con la fuerza S , y obtendremos (n.º 41) la fuerza resultante R' . Por último, compondremos la resultante R' con la fuerza T , y obtendremos la fuerza R'' ,

que será la resultante de todas las fuerzas del sistema. Ahora bien, R'' es equipolente a la suma geométrica de las fuerzas T y R' , y como R' es equipolente a la suma geométrica de las fuerzas R y S , resulta que R'' será equipolente a la suma geométrica de las fuerzas T, S y R . Pero la fuerza R es equipolente a la suma geométrica de las fuerzas P y Q ; por lo tanto, R'' será equipolente a la suma geométrica de las fuerzas P, Q, S y T del sistema. En este caso, por ser paralelas las fuerzas, la suma geométrica equivale a la suma algebraica. Vemos, pues, que la resultante del sistema de fuerzas paralelas considerado es paralela a las fuerzas y vale la suma algebraica de sus intensidades (siendo suma algebraica, porque hay que tener en cuenta los sentidos).

Determinemos los momentos. El momento de la fuerza R'' respecto a un punto cualquiera es igual (n.º 39) a la suma de los momentos de las fuerzas R' y T ; el momento de la fuerza R' respecto al mismo punto es igual a la suma de los momentos de las fuerzas R y S , el momento de la fuerza R es igual a la suma de los momentos de las fuerzas P y Q ; por lo tanto, el momento de la resultante R'' respecto a un punto cualquiera será igual a la suma de los momentos de las fuerzas P, Q, S y T respecto al mismo punto.

Lo que hemos dicho del sistema de fuerzas P, Q, S y T diríamos de un sistema de cualquier número y sentido de fuerzas paralelas.

Podría ser que al componer sucesivamente las fuerzas llegásemos como resultado final a un *par* de fuerzas, caso que, no teniendo ninguna utilidad práctica, dejaremos de estudiar.

En resumen, considerando un sistema de fuerzas paralelas y de diferentes sentidos con resultante, la cual puede ser cero, se verificarán las proposiciones siguientes:

La resultante del sistema es paralela a las fuerzas del sistema, y vale la suma algebraica de las intensidades de todas ellas (es suma algebraica, porque hay que tener en cuenta los sentidos de las fuerzas).

El momento de la resultante del sistema respecto a un punto cualquiera es igual a la suma de los momentos, respecto al mismo punto, de todas las fuerzas del sistema.

43. *Equilibrio de un sistema de fuerzas paralelas situadas en un mismo plano.* — La condición necesaria y suficiente para que un sistema de fuerzas paralelas situadas en un mismo plano esté en equilibrio, es que la resultante

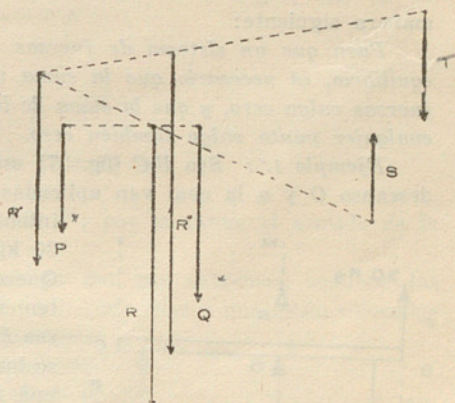


FIG. 36

del sistema sea nula, ya que entonces el sistema de fuerzas no podrá modificar el estado de reposo o movimiento del cuerpo sólido a que las fuerzas están aplicadas. Siendo nula la resultante y, por lo tanto, nulo el momento de la resultante respecto a cualquier punto, los teoremas finales del n.º 42 dan origen a las condiciones de equilibrio que enunciaremos de la manera siguiente:

Para que un sistema de fuerzas situadas en un mismo plano esté en equilibrio, es necesario que la suma algebraica de las intensidades de las fuerzas valga cero, y que la suma de los momentos de las fuerzas respecto a cualquier punto valga también cero.

Ejemplo 1.º: Sea BC (fig. 37) una viga que pueda girar alrededor del descanso O y a la cual van aplicadas las fuerzas F y F' paralelas, cuyas

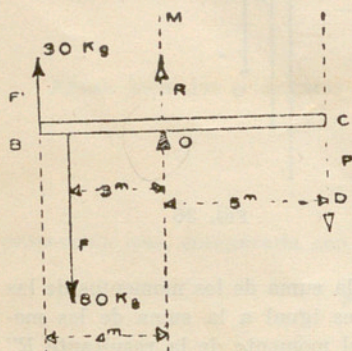


FIG. 37

intensidades son, respectivamente, 80 y 30 kg y que tienen los sentidos indicados. Queremos encontrar la fuerza paralela que teniendo la dirección CD equilibre las fuerzas F y F' . Representemos por P la fuerza buscada. En el descanso se desarrollará una reacción (que es la fuerza que hace el descanso contra el sólido), que llamaremos R y que será paralela a las fuerzas. Las fuerzas F , F' , P y R formarán evidentemente un sistema en equilibrio.

La suma de los momentos de estas fuerzas respecto a un punto cualquiera tiene que ser cero (n.º 43). Si tomamos como centro de momentos el punto O , el momento de la fuerza R será cero y tendremos, to-

mando como positivo el momento de la fuerza F' y teniendo en cuenta los brazos de palanca marcados en la figura:

$$30 \times 4 - 80 \times 3 + P \times 5 = 0$$

de donde resulta

$$P \times 5 = 80 \times 3 - 30 \times 4 = 120$$

El momento de P es positivo; por lo tanto, la fuerza P tendrá el sentido CD marcado en la figura.

La intensidad de la fuerza P es

$$P = \frac{120}{5} = 24 \text{ kg}$$

Tenemos, pues, resuelto el problema, puesto que conocemos la intensidad de la fuerza buscada y su punto de aplicación.

Para calcular la reacción R del descanso consideremos (n.º 43) que la suma algebraica de todas las fuerzas tiene que ser cero, y tendremos

$$F' - F - P + R = 0$$

de donde

$$R = P + F - F'$$

y substituyendo

$$R = 24 + 80 - 30 = 74 \text{ kg}$$

es decir, que el signo R es igual al de F' ; por lo tanto, el sentido de la reacción será igual al de la fuerza F' .

Ejemplo 2.º: Una viga, descansando por sus extremos, sostiene las cargas (pesos) indicadas en la fig. 38. Las distancias a que están colocadas son también indicadas en la figura. Queremos saber cuáles son las fuerzas o reacciones verticales que hacen los descansos A y B de la viga. Representemos por R y R' las reacciones en los descansos A y B . Las cargas dadas junto con las reacciones R y R' formarán un sistema en equilibrio. Para determinar R y R' podremos aplicar lo que hemos enunciado en el n.º 43.

Tomemos como centro de momentos el punto A y como positivo el momento de una de las cargas, por ejemplo la de 120 kg; la suma de los momentos de todas las fuerzas tiene que ser cero, y teniendo en cuenta que el momento de la reacción R es cero (para que así fuera, hemos colocado precisamente el centro de momentos en el punto A), tendremos:

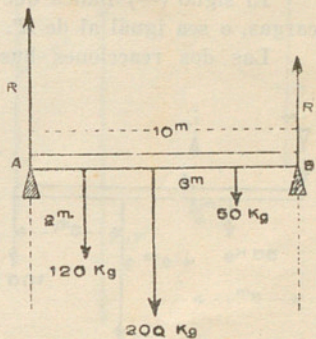


FIG. 38

$$120 \times 2 + 200 \times 4,5 + 50 \times 7,5 + R' \times 10 = 0$$

ya que los brazos de palanca de las fuerzas de 120 kg, 200 kg, 50 kg y R' son, respectivamente, 2m, 4,5m, 7,5m y 10m.

De la igualdad anterior deducimos:

$$R' \times 10 = -240 - 900 - 375 = -1515$$

El momento de la fuerza R' es negativo; por lo tanto, el sentido de la fuerza R' será el marcado en la figura, ya que la fuerza R' es de signo contrario al de la fuerza 120 kg, que hemos considerado como positivo.

El valor de R' es:

$$R' = -\frac{1515}{10} = -151,5 \text{ kg}$$

El signo ($-$) proviene del signo del momento que sabemos ha servido para fijar el sentido de la fuerza R' . La intensidad de R' es, pues, de 151,5 kg.

Conocida la fuerza R' , para hallar la fuerza R nos fijaremos en que la suma algebraica de todas las fuerzas tiene que ser cero; por consiguiente, tomando como positivo el sentido de las cargas, tendremos:

$$R + 120 + 200 + 50 - 151,5 = 0$$

de donde

$$R = -218,5$$

El signo ($-$) indica que el sentido de la fuerza R es contrario al de las cargas, o sea igual al de R' .

Las dos reacciones buscadas R y R' van, pues, de abajo arriba, y tienen por intensidades respectivas 218,5 y 151,5 kg.

Ejemplo 3.º: Dadas la disposición de cargas y descansos indicados en la fig. 39, encontrar las reacciones verticales R y R' de los descansos.

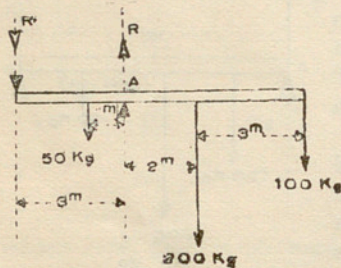


FIG. 39

Siguiendo una marcha análoga a la del problema anterior y tomando por centro de momento el punto A (a fin de que el momento de R sea cero) y como positivo el momento de la fuerza de 100 kg, tendremos:

$$100 \times 5 + 200 \times 2 - 50 \times 1 + R' \times 3 = 0$$

de donde

$$R' \times 3 = 50 - 400 - 500 = -850$$

El momento de R' es negativo; por lo tanto, el sentido de la fuerza R' será de arriba abajo al objeto de que su momento pueda ser de signo contrario al de la carga de 100 kg, que hemos convenido tomar como positivo.

Prescindiendo del signo ($-$) que procede del momento y que nos ha servido para determinar el sentido de la fuerza R' , la intensidad de dicha fuerza es:

$$R' = \frac{850}{3} = 283,3 \text{ kg}$$

Para encontrar R , nos fijaremos en que la suma algebraica de las fuerzas debe ser cero, y tomando como positivo el sentido de las cargas (o sea el sentido de arriba abajo), tendremos:

$$283,3 + 50 + R + 200 + 100 = 0$$

de donde

$$R = -633,3$$

el signo (—) quiere decir que el sentido de la reacción R es de abajo arriba, ya que hemos convenido en tomar como positivo el signo de arriba abajo.

44. La resultante de dos fuerzas paralelas y del mismo sentido puede encontrarse gráficamente de una manera muy sencilla que conviene saber.

Sean las fuerzas F y F' de la fig. 40 y su resultante $F + F'$. Según hemos visto en el n.º 40, se verificará la proporción siguiente:

$$\frac{F'}{F} = \frac{CB}{CA} \quad (1)$$

de la cual se deduce un método gráfico para encontrar la situación del punto C sobre la recta AB . En efecto; en la dirección de la fuerza F y en su mismo sentido tomemos la magnitud Aa igual a la intensidad de la fuerza F' , y sobre la dirección de la fuerza F' y en sentido contrario tomemos la magnitud Bb igual a la intensidad de la fuerza F .

Uniendo después el punto a con el punto b , la recta ab corta a la recta AB en el punto C , que es de aplicación de la resultante. En efecto, los triángulos semejantes CaA y CbB dan:

$$\frac{Bb}{Aa} = \frac{CB}{CA}$$

y por ser $Bb = F$ y $Aa = F'$,

$$\frac{F}{F'} = \frac{CB}{CA}$$

que es precisamente la misma relación (1); por lo tanto, el punto C encontrado de la manera gráfica anterior es el de aplicación de la resultante.

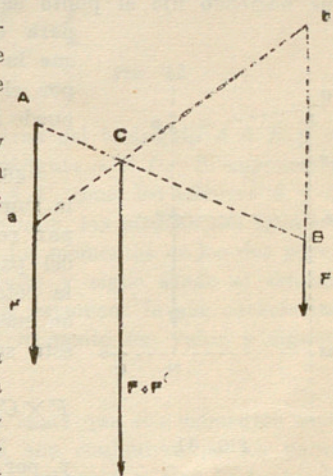


FIG. 40

Este procedimiento, aplicado sucesivamente a las fuerzas de un sistema de fuerzas paralelas y del mismo sentido, nos daría la resultante del sistema. Para encontrarla, compondríamos primero dos de las fuerzas, después la resultante de éstas con otra de las fuerzas del sistema, y así sucesivamente hasta llegar a encontrar la resultante del sistema.

45. *Par de fuerzas.* — Ya hemos dicho antes (n.º 41) que denominamos *par* a dos fuerzas iguales, paralelas y de sentido contrario, y sabemos también que las fuerzas de un par no pueden ser compuestas y carecen de resultante.

Un par, aplicado a un cuerpo sólido, no puede estar en equilibrio, puesto que haciendo fijo el punto de aplicación de una de las fuerzas del par, para que pudiera haber equilibrio sería preciso que la dirección de la otra fuerza del par pasara por el punto que hemos supuesto fijo, lo que no puede ser, ya que las fuerzas del par son paralelas.

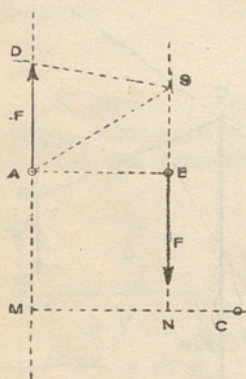


FIG. 41

46. *Momentos de un par.* — Tomando (fig. 41) la suma de los momentos de las fuerzas F y F del par respecto a un punto cualquiera C del plano del par, considerando como positivo el sentido de la rotación de las agujas de un reloj, y teniendo en cuenta lo expuesto en el n.º 38, tendremos que esta suma de momentos será:

$$F \times CM - F \times CN = F(CM - CN) = F \times MN$$

y, por ser $MN = AB$ (la recta AB es perpendicular a las fuerzas), la suma de los momentos de las fuerzas del par respecto a un punto cualquiera será constantemente igual a

$$F \times AB$$

Este producto se denomina *momento del par*. La magnitud AB es el *brazo de palanca del par*.

Cambiando el sentido de las fuerzas del par, cambia el signo del momento del par.

Uniéndolos extremos de una de las fuerzas del par, por ejemplo la AD , con un punto cualquiera S de la dirección de la otra fuerza, se forma el triángulo ADS , cuya área, tomando AD como base y AB como altura, tiene por expresión

$$\frac{1}{2} AD \times AB$$

y como AD representa la intensidad F de la fuerza, el área del triángulo es proporcional al momento $F \times AB$ del par y, por lo tanto, puede servir para representarlo.

47. Consideremos el par F, F de la fig. 42. Sabemos que introduciendo las fuerzas AC y $A'C'$ iguales y opuestas, en nada alteraremos el estado del cuerpo al cual se aplican. Las fuerzas AC y AB dan la resultante AD y las $A'C'$ y $A'B'$ la resultante $A'D'$; por lo tanto, las fuerzas AD y $A'D'$ equivalen al par F, F . Será fácil ver que los triángulos ADC y $A'B'D'$ son iguales y tienen sus lados paralelos; por consiguiente, las fuerzas AD y $A'D'$ forman otro par equivalente al primero. Ahora bien, el momento del par F, F viene representado (n.º 46) por el área del triángulo $AA'B$ y el momento del par $AD, A'D'$ por el área del triángulo $A'AD$. Si suponemos que la base común de estos dos triángulos es AA' , como los vértices B y D están colocados sobre una paralela a la base común, las alturas son iguales; por lo tanto, tendrán igual área, es decir, que los momentos de los dos pares equivalentes considerados serán iguales en valor y signo (dado el sentido rotativo de las fuerzas que los componen). En resumen: lo que caracteriza un par es su momento. Dos pares de igual momento (en valor y signo), son equivalentes.

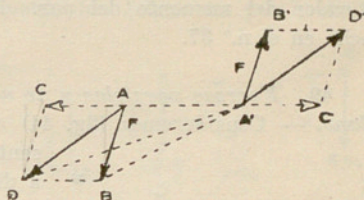


FIG. 42

48. Para equilibrar dos pares de fuerzas basta que sus momentos sean iguales y de signo contrario, ya que entonces uno cualquiera de los pares equivale al otro par cambiando el signo de las fuerzas y, por lo tanto, lo neutraliza o anula, produciendo el equilibrio.

Ejemplo: Sea (fig. 43) F, F las dos fuerzas de un par que valen 20 kg y supongamos que el brazo de palanca es de 2 m. Queremos encontrar un par P, P que equilibre el par dado y cuyo brazo de palanca sea de 3 m.

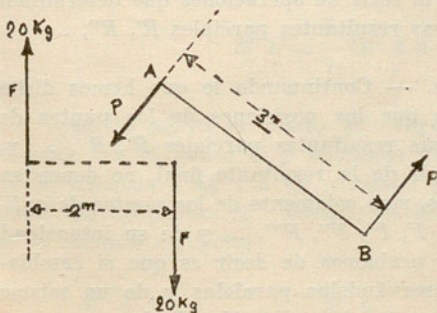


FIG. 43

Como los momentos de los pares deben ser iguales y de signo contrario, será en valor absoluto:

$$20 \times 2 = P \times 3$$

de donde se infiere:

$$P = \frac{20 \times 2}{3} = 13,3 \text{ kg}$$

El sentido de las fuerzas del par P, P es el indicado en la figura, puesto que los momentos de los dos pares considerados han de ser de signo contrario.

OBSERVACIÓN. — Como quiera que el momento de un par es constante cualquiera que sea el centro de momentos, la manera más sencilla de encontrarlo es situar el centro de momentos en un punto cualquiera de las fuerzas del par, y entonces el momento de la otra fuerza es en valor y signo el valor del momento del par. Respecto al signo, recordar lo que hemos dicho en el n.º 37.

49. *Fuerzas paralelas y de un mismo sentido, no situadas en un mismo plano.* — Consideremos (fig. 44) diversas fuerzas paralelas y de un mismo

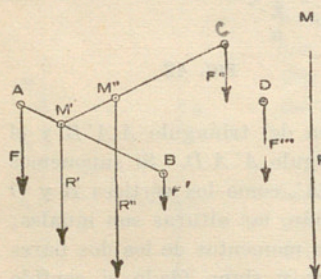


FIG. 44

sentido, tales como las $F, F', F'' \dots$ aplicadas a diversos puntos $A, B, C \dots$ de un sólido invariable, y vamos a encontrar la resultante de las fuerzas consideradas.

Componiendo las dos fuerzas F y F' obtendremos (n.º 40) su resultante R' , que será igual a $F + F'$, y su punto de aplicación M' dividirá a la recta AB en dos partes inversamente proporcionales a las fuerzas F y F' , como hemos visto en el n.º 40; después compondremos esta resultante parcial R' , con una tercera de las fuerzas dadas, por ejemplo la F'' , obteniendo una segunda resultante parcial

R'' que será igual a $R' + F''$ o a $F + F' + F''$, ya que R' es igual a $F + F'$, y será aplicada a un punto M'' tal que los segmentos $M''M'$ y $M''C$ sean inversamente proporcionales a las fuerzas R' y F'' (n.º 40); después, compondremos R'' con otra de las fuerzas, por ejemplo la F''' y así seguiremos hasta llegar a componer la última resultante parcial con la última fuerza del sistema, obteniendo de esta manera la resultante de todas las fuerzas del sistema. Esta resultante será igual a la suma $F + F' + F'' + \dots$ de las fuerzas del sistema, paralela a ellas, y con el mismo sentido y su punto de aplicación M será dado por la serie de operaciones que determinan los puntos de aplicación de las diversas resultantes parciales R', R'', \dots

50. *Centro de fuerzas paralelas.* — Continuando lo que hemos dicho en el número anterior, fijémonos en que las posiciones de los puntos de aplicación M', M'', \dots de las sucesivas resultantes parciales R', R'', \dots y, por lo tanto, el punto de aplicación M de la resultante final, no dependen en nada de la dirección de las fuerzas, sino solamente de los puntos de aplicación A, B, C, D, \dots de las fuerzas F, F', F'', F''', \dots y de su intensidad relativa. La consecuencia de lo que acabamos de decir es que si cambiamos la dirección de las fuerzas, conservándolas paralelas y de un mismo sentido sin variar intensidades, el punto de aplicación de la nueva resultante será el mismo. Este punto M , por el cual pasa siempre la direc-

ción de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas y de un mismo sentido aplicadas a diversos puntos de un cuerpo sólido, cualquiera que sea la dirección de las fuerzas que componen el sistema respecto a sus primitivas direcciones, se denomina *centro de fuerzas paralelas*. Fijémonos también en que *si cambiáramos las fuerzas del sistema por otras que les fueran proporcionales, el centro de las fuerzas paralelas sería el mismo*, puesto que en su determinación intervienen solamente las relaciones por cociente entre las intensidades de las fuerzas.

Aclararemos todo lo que acabamos de decir con unos ejemplos.

51. *Ejemplo 1.º*: Encontrar el centro de fuerzas paralelas correspondiente a las cuatro fuerzas paralelas y de un mismo sentido aplicadas en los puntos A , B , C y D (fig. 45), cuyas intensidades respectivas son 3 kg, 4 kg, 2 kg y 5 kg. Supongamos que los puntos A , B , C y D no están situados en un mismo plano.

La resultante de las fuerzas 3 kg y 4 kg valdrá 7 kg, y estará aplicada al punto M' de la recta AB , determinado por la proporción:

$$\frac{M'B}{M'A} = \frac{3}{4}$$

de la cual deducimos

$$\frac{M'B}{M'A + M'B} = \frac{3}{3 + 4}$$

de donde

$$M'B = \frac{3}{7} (M'A + M'B) = \frac{3}{7} AB$$

Uniendo ahora el punto M' (cuya posición nos es perfectamente conocida) con el punto C y buscando de una manera análoga la resultante de las fuerzas 7 kg y 2 kg, veremos que esta resultante valdrá 9 kg y su punto de aplicación M'' , situado en la recta $M'C$, será determinado de la de la manera siguiente:

$$\frac{M''C}{M''M'} = \frac{7}{2}, \quad \frac{M''C}{M''C + M''M'} = \frac{7}{7 + 2}, \quad M''C = \frac{7}{9} M'C$$

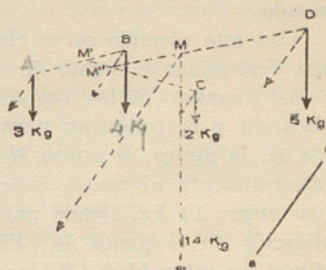


FIG. 45

Buscando, por último, de manera análoga, la posición M del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas de 9 kg y 5 kg, tendremos:

$$\frac{MD}{MM''} = \frac{9}{5}; \quad \frac{MD}{MD + MM''} = \frac{9}{5 + 9}; \quad MD = \frac{9}{14} M''D$$

Conocemos, pues, la posición del punto M centro de fuerzas paralelas buscado.

Con este ejemplo se ve claramente que en los cálculos que han servido para determinar el punto M no han intervenido para nada las direcciones de las fuerzas. Si las fuerzas dadas girasen alrededor de sus puntos de aplicación y se colocaran paralelamente a la recta ab de la manera indicada en la figura, el punto M sería también el centro de fuerzas paralelas correspondiente al nuevo sistema. La resultante correspondiente valdría, como antes, 14 kg, siendo paralela a la recta ab y teniendo su punto de aplicación en el punto M . Fijémonos también que si multiplicamos o dividimos las intensidades de las fuerzas por un mismo número, las posiciones de los puntos M' , M'' y M no varían;

por lo tanto, al buscar el centro de fuerzas paralelas podemos substituir las fuerzas dadas por otras proporcionales, cosa ésta muy importante, como más adelante veremos.

Para encontrar las diversas resultantes parciales nos habríamos podido valer del método gráfico explicado en el n.º 44.

Ejemplo 2.º: Encontrar el centro de fuerzas paralelas correspondiente a tres fuerzas paralelas aplicadas en los puntos A , B y C de un cuerpo sólido (fig. 46), cuyas intensidades respectivas son 4 kg, 3 kg y 6 kg.

Como el CENTRO DE FUERZAS PARALELAS es independiente de la orientación de las fuerzas, podremos suponerlas situadas en el plano determinado por los

tres puntos A , B , C , que será el plano del dibujo.

Siguiendo el método gráfico (n.º 44), llegaríamos fácilmente a determinar el punto M , como vemos en la figura. Podríamos también haber seguido el método analítico, como hemos hecho en el ejemplo anterior.

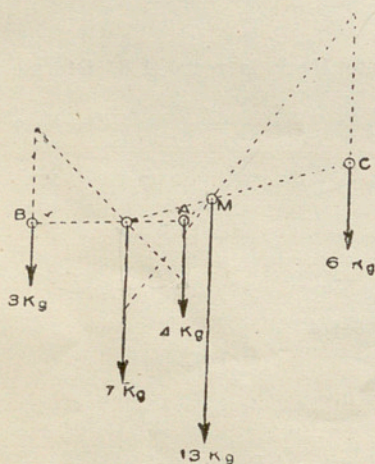


FIG. 46

CENTRO DE GRAVEDAD

52. *Definición de centro de gravedad.* — Los cuerpos están sometidos por parte de la tierra a una atracción que afecta todas sus partes, por pequeñas que sean. Esta atracción se denomina *gravedad*.

Si suspendemos (fig. 47) un cuerpo M por medio de una cuerda o hilo, al cabo de cierto tiempo el sistema cuerda y cuerpo quedará en equilibrio y la cuerda tomará la dirección vertical (plomada). La fuerza que soporta la cuerda (tensión) es igual y contraria a la acción de la gravedad sobre el cuerpo, lo que evidencia que esta acción equivale a una fuerza que tiene la dirección de la vertical y el sentido de arriba abajo. Esta fuerza constituye el *peso* del cuerpo y la medimos en kilos. Por pequeñas que sean las dimensiones del cuerpo, tiene lugar lo que hemos expuesto: su peso será vertical y el sentido de arriba abajo; por lo tanto, el peso de un punto material tendrá la dirección vertical y el sentido de arriba abajo.

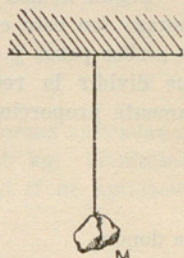


FIG. 47

Asimilando un cuerpo sólido a un sistema invariable de puntos materiales, cada uno de estos puntos tendrá su peso correspondiente, y el peso del cuerpo será la resultante de los pesos de los puntos materiales que lo componen. Ahora bien, los pesos de dichos puntos materiales, por ser todos verticales y del mismo sentido, forman un sistema de fuerzas paralelas al cual podremos aplicar lo que hemos dicho en el n.º 50. Ciertamente que en este caso no podemos variar la dirección de los pesos de los puntos materiales que componen el cuerpo, como hemos supuesto que hacíamos para llegar a la noción del centro de fuerzas paralelas; lo que sí podemos hacer es variar la posición del cuerpo haciéndolo girar de diferentes modos, lo que equivale a hacer variar las direcciones de los pesos de los puntos materiales respecto al cuerpo considerado. En este caso, el centro de fuerzas paralelas correspondiente a los pesos de los puntos materiales que componen el sólido se llama *centro de gravedad*. Sea cualquiera la posición del cuerpo, su peso, que es precisamente la resultante del sistema de fuerzas paralelas correspondientes a los pesos de sus puntos materiales, será vertical y pasará por el *centro de gravedad* del cuerpo, pudiéndose considerar este punto como un punto de aplicación.

Un cuerpo suspendido de un hilo se colocará de manera que la dirección vertical del hilo pase por el centro de gravedad del cuerpo. Si un cuerpo que puede bascular, como indica la fig. 48, está en equilibrio, tendrá su centro de gravedad G en el plano vertical que pasa por la arista AB .

53. Si en vez de un cuerpo considerásemos un conjunto de cuerpos, unidos entre sí invariabilmente, encontraríamos el centro de gravedad de su conjunto buscando el centro de fuerzas paralelas correspondientes a los pesos de cada uno de los cuerpos que forman el conjunto considerado.

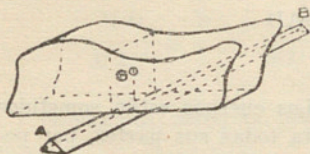


FIG. 48

Según hemos visto, la resultante de las dos fuerzas (en este caso pesos) es igual a la suma de ambos pesos y su punto de aplicación M tiene que dividir la recta AB en dos partes inversamente proporcionales a estos pesos: por lo tanto tendremos

$$\frac{AM}{MB} = \frac{P'}{P}$$

de donde

$$AM = MB$$

y, por lo tanto, M es el punto medio de AB . Este punto M es el centro de gravedad del conjunto de los dos cuerpos considerados.

Ejemplo 2.º: Los centros de gravedad de cuatro cuerpos cuyos pesos son 2 kg, 5 kg, 6 kg y 4 kg son los cuatro vértices del tetraedro $ABCD$ (fig. 50). Encontrar el centro de gravedad de su conjunto.

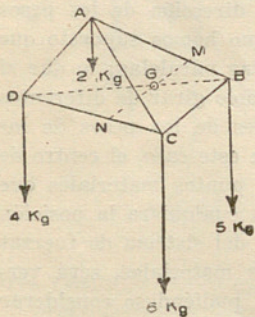


FIG. 50

Según hemos dicho antes, hay que encontrar el centro de las fuerzas paralelas 2 kg, 5 kg, 6 kg y 4 kg, y seguiremos la marcha del ejemplo del n.º 15. Supongamos que la recta AB valga 5m. El punto de aplicación M de la resultante de las fuerzas 2 kg y 5 kg es determinado por la relación

$$\frac{MB}{MA} = \frac{2}{5}$$

de donde deducimos

$$\frac{MA + MB}{MB} = \frac{2 + 5}{2} = \frac{7}{2}$$

o sea

$$MB = \frac{2}{7} (MA + MB) = \frac{2}{7} AB = \frac{2}{7} \times 5 = \frac{10}{7} = 1,43\text{m}$$

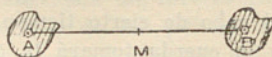


FIG. 49

Supongamos que la arista CD valga 4m. El punto de aplicación N de la resultante de las fuerzas 4 kg y 6 kg es determinado por la relación:

$$\frac{NC}{ND} = \frac{4}{6}$$

de donde resulta

$$\frac{NC}{NC + ND} = \frac{4}{4 + 6}$$

y por lo tanto,

$$NC = \frac{4}{10} CD = \frac{4}{10} \times 4 = 1,6\text{m}$$

Ahora vamos a buscar el punto de aplicación de las fuerzas aplicadas en los puntos M y N , que valen, respectivamente, 7 kg y 10 kg. Mediremos la distancia MN y supondremos que vale 6m. El punto G de aplicación de la resultante es determinado por la relación:

$$\frac{GM}{GN} = \frac{10}{7}$$

de donde

$$\frac{GM}{MN} = \frac{10}{17}$$

y, por lo tanto,

$$GM = \frac{10}{17} MN = \frac{10}{17} \cdot 6 = 3,53\text{m}$$

Conocemos, pues, la posición del punto G que es el centro de gravedad buscado.

De manera análoga operaríamos en otros casos.

Habríamos podido proceder gráficamente en las composiciones parciales aplicando el método del n.º 44.

CENTROS DE GRAVEDAD DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

54. La noción del centro de gravedad se hace extensiva a los sólidos geométricos materializándolos, o sea convirtiéndolos en sólidos materiales homogéneos, que son aquellos cuyos puntos materiales son iguales y están

uniformemente distribuidos en el volumen ocupado por el sólido considerado.

Análogamente se hace extensiva la noción del centro de gravedad a las superficies y líneas geométricas materializándolas, o sea imaginando que los puntos geométricos que las forman se convierten en puntos materiales iguales y uniformemente distribuidos. Un alambre da idea de la materialización de una línea; una hoja de papel o de hojalata, de una superficie.

Vamos a hacer aplicación de lo dicho con unos ejemplos.

CENTRO DE GRAVEDAD DE LÍNEAS

55. *Centro de gravedad de un segmento de recta.* — Si el segmento rectilíneo es AB (fig. 51), su centro de gravedad se encuentra evidentemente en su punto medio M .

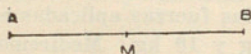


FIG. 51

56. *Centro de gravedad de una línea poligonal.* — Sea la línea poligonal $ABCD$ (fig. 52). Los centros de gravedad de las rectas AB , BC y CD se encuentran en sus puntos medios respectivos M , M' y M'' . Para encontrar el centro de gravedad del conjunto, nos valdremos de las consideraciones siguientes: Si materializamos las líneas consideradas, como sus pesos serán evidentemente proporcionales a las longitudes respectivas de dichas líneas y en la investigación del centro de fuerzas paralelas se pueden substituir las fuerzas por magnitudes a ellas proporcionales (n.º 51), substituiremos los pesos por las longitudes l , l' y l'' , de las líneas AB , BC y CD , y operaremos como si las fuerzas aplicadas en los puntos M , M' y M'' valieran l , l' y l'' . Seguiremos la marcha del ejemplo del n.º 15 sin fijar las direcciones de las fuerzas l , l' y l'' , ya que sabemos que el centro de fuerzas paralelas es independiente de ellas. La resultante de las fuerzas l y l' aplicadas a los puntos M y M' , vale $(l + l')$ y está aplicada al punto G' determinado por la relación

$$\frac{M G'}{G' M'} = \frac{l'}{l}$$

de donde

$$\frac{M G'}{G' M' + M G'} = \frac{l'}{l + l'}$$

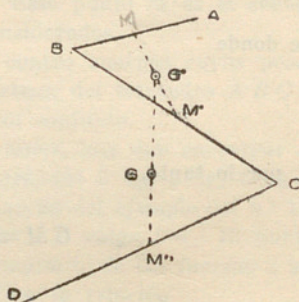


FIG. 52

y, por lo tanto,

$$M G' = M M' \frac{l}{l + l'}$$

Si la distancia $M M'$ (que siempre podemos conocer, ya que conocemos la línea poligonal) vale d , tendremos

$$M G' = \frac{d \times l}{l + l'}$$

Para encontrar la resultante de las fuerzas $(l + l')$ y l'' operaremos de un modo análogo al anterior, y siendo G el punto de aplicación de la resultante buscada, tendremos

$$\frac{G M''}{G G'} = \frac{l + l'}{l''}; \quad \frac{G M''}{G M'' + G G'} = \frac{l + l'}{l + l' + l''}$$

de donde

$$G M'' = G' M'' \frac{l + l'}{l + l' + l''}$$

fórmula que da la posición del punto G , ya que la distancia $G' M''$ siempre puede calcularse conociendo la situación de los puntos G' y M'' .

El punto G es el centro de gravedad buscado. Si la línea poligonal, plana o no, tuviera más lados, operaríamos de un modo análogo.

Habríamos podido proceder también gráficamente (n.º 44).

57. Si una línea poligonal o curva tiene un eje de simetría, el centro de gravedad de la línea considerada debe estar situado en este eje.

En efecto, sea por ejemplo, la línea parabólica $A B C$ (fig. 53), que tiene el eje de simetría $B I$. A un punto material m de dicha línea (supuesta materializada) corresponderá, en virtud de la simetría, otro punto m' , y la distancia $m a$ será igual a la $m' a$. El conjunto de puntos m y m' tendrá su centro de gravedad en el punto medio a de la recta $m m'$ normal a $B I$ y está sobre el eje de simetría (ya que los puntos materiales son de igual peso). Resulta de ello que podremos

distribuir todos los puntos de la línea $A B C$ en grupos de un par de puntos cada uno de ellos; los centros de gravedad de cada uno de dichos grupos se encontrará sobre el eje de simetría; por lo tanto, el centro de gravedad de dichos centros de gravedad parciales, que es el centro de gravedad de la línea, también se hallará sobre el eje, como queríamos demostrar.

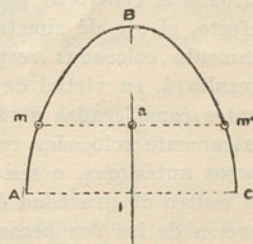


FIG. 53

Si hay dos ejes de simetría, el centro de gravedad, que ha de encontrarse sobre cada uno de ellos, se encontrará en su intersección.

Si la línea tiene un centro de simetría, el centro de gravedad coincidirá con él, ya que podremos disponer los puntos materiales que componen la línea en grupos de dos puntos cada uno, simétricamente colocados respecto a dicho centro; pero, como cada par de puntos tendrá su centro de gravedad en el punto medio de su distancia, o sea en el centro de simetría, y esto tendrá lugar para todos los grupos, el centro de gravedad total coincidirá con el de simetría.

Así, si el contorno poligonal es un rectángulo o un cuadrado, su centro de gravedad será el centro de simetría. Si la línea curva es una circunferencia o una elipse, su centro de figura o de simetría será el centro de gravedad.

En los polígonos regulares, sus ejes de simetría pasan por el centro de la circunferencia circunscrita al polígono; el centro de dicha circunferencia será, pues, el centro de gravedad del polígono regular que se considere.

En un triángulo isósceles, la altura AI (fig. 54) es un eje de simetría sobre el cual se encontrará el centro de gravedad de su perímetro.

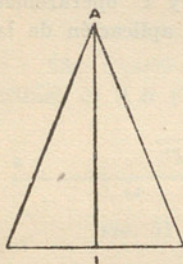


FIG. 54

CENTROS DE GRAVEDAD DE SUPERFICIES PLANAS

58. Si una figura plana tiene un eje de simetría, allá se encontrará situado el centro de gravedad de la superficie de la figura considerada. En efecto, el eje de simetría divide la figura en dos partes iguales y simétricamente colocadas respecto a él. Al suponer materializada la superficie resultará, en virtud de lo que hemos dicho, que los pesos de las dos partes antes consideradas serán iguales y tendrán sus puntos de aplicación simétricamente colocados respecto al eje de simetría. La resultante de los dos pesos anteriores, o sea el peso total, tendrá su punto de aplicación, que es el centro de gravedad de la figura, en el punto medio de los puntos de aplicación de los dos pesos parciales considerados y, por lo tanto, en el eje de simetría, ya que estos puntos son simétricos respecto a dicho eje.

Si hay dos ejes de simetría, su intersección determina el centro de gravedad.

Si hay un centro de simetría, podremos agrupar los puntos materiales constitutivos de la superficie al materializarla, en grupos de un par de puntos simétricamente situados respecto a dicho centro; cada grupo tendrá, por lo tanto, su centro de gravedad en el centro de simetría; el centro de gravedad del conjunto de los grupos, o sea de la superficie de la figura,

estará también en coincidencia con dicho centro de simetría, como queríamos demostrar.

59. *El círculo, el rectángulo y el cuadrado* tienen centro de simetría o centro de figura, que será el centro de gravedad de sus superficies. Lo mismo sería en la superficie de una *elipse*, que, como sabemos, tiene centro.

Las superficies de los *polígonos regulares* tienen su centro de gravedad en el centro de la circunferencia a ellos circunscrita, ya que sus ejes de simetría pasan por dicho centro.

60. *Centro de gravedad del triángulo.* — Consideremos un triángulo cualquiera ABC (fig. 55). Unamos el vértice C con el punto medio D del lado AB , y obtendremos la mediana CD . Al suponer materializada la superficie del triángulo, una línea material cualquiera paralela a la base AB del triángulo, por ejemplo la MN , tendrá su centro de gravedad en su punto medio S , que está situado sobre la mediana CD . Cada una de las líneas materiales paralelas a la AB y que constituyen la superficie del triángulo tendrá, pues, su centro de gravedad colocado sobre la mediana CD . Por lo tanto, el centro de gravedad total estará también colocado sobre la mediana considerada, ya que dicho centro de gravedad es el centro de gravedad de los centros de gravedad parciales anteriormente considerados, los cuales se encuentran todos sobre dicha mediana.

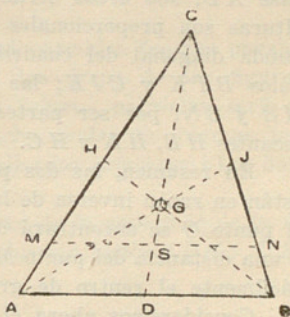


FIG. 55

Por análogas razones, el centro de gravedad de la superficie del triángulo se encontrará sobre las demás medianas BH y AJ , coincidiendo, por lo tanto, con su punto de concurso G . En Geometría se demuestra que

$$GD = \frac{1}{3} CD$$

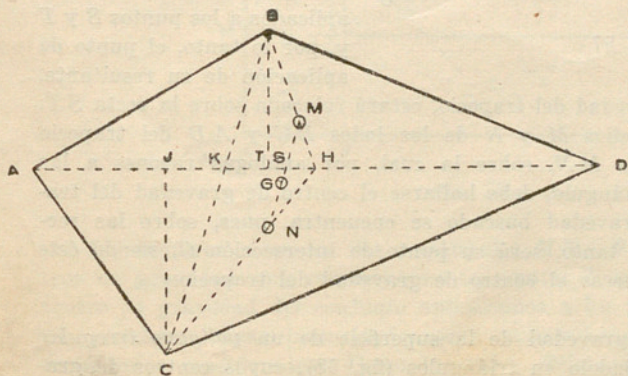


FIG. 56

61. *Cuadrilátero y trapecio.* — Sea (figura 56) el cuadrilátero $ABCD$. Tracemos la diagonal AD y la superficie del cuadrilátero quedará dividida en dos triángulos ABD y ACD , cuyos centros de gra-

vedad se encontrarán en los puntos M y N , que corresponden a las terceras partes MH y NH de las respectivas medianas BH y CH . Al materializar la superficie del cuadrilátero $ABCD$ los pesos de los triángulos ABD y ACD que lo componen serán aplicados, en virtud de lo antedicho, a los puntos M y N y serán proporcionales a las áreas de dichos triángulos. El centro de gravedad de la superficie del cuadrilátero será el punto de aplicación de la resultante de los dos pesos concentrados en los puntos M y N .

El punto G de aplicación de dicha resultante dividirá la recta MN en dos partes inversamente proporcionales a estos pesos y, por lo tanto, a las áreas de los triángulos ABD y ACD , que ya hemos dicho que les eran proporcionales. Como los triángulos ABD y ACD tienen la misma base AD , sus áreas serán proporcionales a las alturas BT y CJ ; estas alturas son proporcionales a las distancias BK y CK (siendo BC la segunda diagonal del cuadrilátero) en virtud de la semejanza de los triángulos BTK y CJK ; las distancias BK y CK son proporcionales a las MS y SN , por ser partes de las paralelas BC y MN , cortadas por las secantes HB , HK y HC .

En resumen, las dos partes en que el punto G divide a la recta MN están en razón inversa de las partes MS y SN de dicha recta; por lo tanto, el punto G se encontrará del punto N a una distancia igual a SM , o bien a una distancia del punto M igual a SN ; siendo ésta la manera de encontrar fácilmente el centro de gravedad de la superficie de un cuadrilátero.

Consideremos ahora el trapecio $ABCD$ (fig. 57). Tracemos la diagonal AC y tendremos dividido el trapecio en dos triángulos ABC y ACD ,

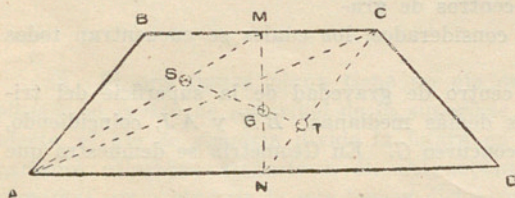


FIG. 57

cuyos centros de gravedad serán los puntos S y T , que sabemos encontrar por lo que hemos dicho en el n.º 60. Al materializar la superficie del trapecio, los pesos de los triángulos anteriores serán aplicados a los puntos S y T y, por lo tanto, el punto de aplicación de su resultante,

que es el centro de gravedad del trapecio, estará colocado sobre la recta ST . Uniendo los puntos medios M y N de los lados BC y AD del trapecio obtendremos la mediana MN , sobre la cual, por análogas razones a las dadas en el caso del triángulo, debe hallarse el centro de gravedad del trapecio. El centro de gravedad buscado se encuentra, pues, sobre las rectas MN y ST ; por lo tanto, será su punto de intersección G , siendo éste uno de los modos de buscar el centro de gravedad del trapecio.

62. El centro de gravedad de la superficie de un *polígono irregular* se buscará descomponiéndolo en triángulos (fig. 58), cuyos centros de gravedad A , B y C sabemos encontrar. Al suponer materializada la super-

ficie del polígono, con el fin de buscar su centro de gravedad, podremos substituir los pesos de dichos triángulos por sus áreas, que les son proporcionales, y buscar el centro de fuerzas paralelas correspondiente de la manera indicada con los ejemplos de los núms. 51 y 53.

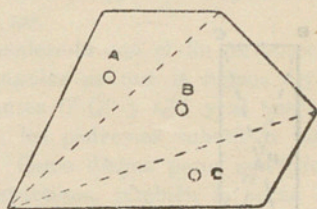


FIG. 58

63. Siempre que la figura plana sea descomponible en figuras cuyo centro de gravedad sea conocido, podremos encontrar el centro de gravedad de la superficie de la figura considerada. Para conseguirlo, operaremos dicha descomposición y buscaremos los centros de gravedad parciales correspondientes. Supondremos aplicadas a dichos centros de gravedad parciales fuerzas paralelas de intensidades iguales o proporcionales a las áreas de las figuras parciales correspondientes, y el centro de estas fuerzas paralelas será el centro de gravedad buscado. Encontraremos dicho centro de fuerzas paralelas siguiendo los métodos generales antes explicados (números 51 y 53).

64. *Ejemplo 1.º:* Hallar el centro de gravedad de la superficie de la figura plana de la (fig. 59), en la cual todos los ángulos son rectos y $BC = DE$.

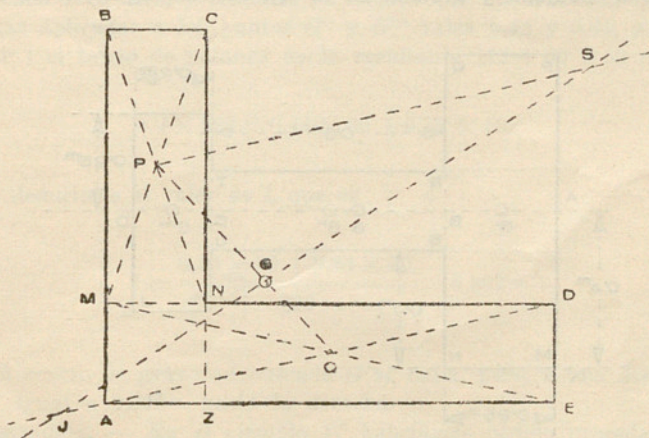


FIG. 59

La dividiremos en los dos rectángulos $MNCB$ y $MDEA$, cuyos centros de gravedad son, respectivamente, puntos P y Q . Para encontrar el centro de gravedad del conjunto aplicaremos a los puntos P y Q dos fuerzas paralelas cuyas intensidades sean proporcionales a las áreas de los rectángulos considerados. Como los lados BC y DE son iguales, dichas áreas serán proporcionales a los lados BM y MD . Por lo tanto, podre-

mos tomar las fuerzas aplicadas a los puntos P y Q iguales a las rectas BM y MD , y también tomar dichas fuerzas paralelamente a la recta AD . Para encontrar el centro de fuerzas paralelas aplicaremos el método gráfico del n.º 44. Tomaremos sobre la recta AD una longitud QJ igual a BM y sobre la paralela PS a la recta AD una longitud PS igual a MD , y uniendo los puntos S y J , la recta SJ cortará la recta PQ en el punto G , que es el centro de gravedad buscado.

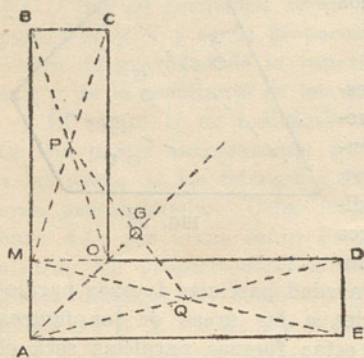


FIG. 60.

También habríamos podido seguir el método analítico (n.º 51).

Ejemplo 2.º: Encontrar el centro de gravedad de la superficie representada en la fig. 60.

Por ser $AB = AE$ y $BC = ED$, la figura tiene el eje de simetría AO . Como en el ejemplo anterior, el centro de gravedad debe encontrarse en la recta PQ , y como también ha de estar en el eje de simetría AO , se hallará en el punto G de su intersección.

Ejemplo 3.º: Encontrar el centro de gravedad de la figura plana, dibujada y acotada en la fig. 61. La figura tiene el eje de

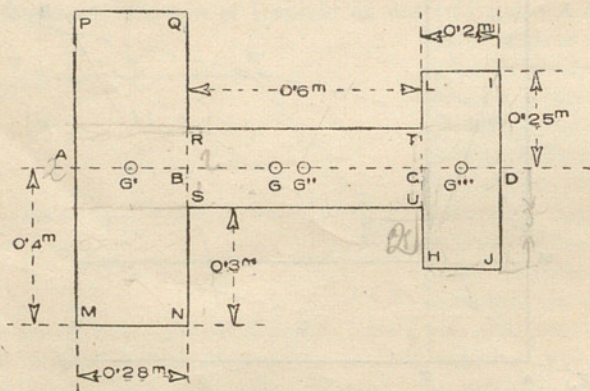


FIG. 61

simetría AD sobre el cual se ha de encontrar el centro de gravedad que buscamos.

Para encontrar su situación, dividiremos la superficie de la figura en los tres rectángulos $MNPQ$, $RSTU$ y $LIHJ$, cuyos centros de gravedad son, respectivamente, los puntos medios G' , G'' y G''' de las rectas

AB , BC y CD . Las distancias de los puntos G''' y G'' al punto G' son, respectivamente, $0,84\text{m}$ y $0,44\text{m}$.

Las mitades de las áreas de los rectángulos $MNPQ$, $RSTU$ y $HLIJ$ son, respectivamente, $0,112\text{ m}^2$, $0,06\text{ m}^2$ y $0,05\text{ m}^2$.

Al suponer materializada la superficie considerada con el fin de buscar su centro de gravedad, los pesos de los rectángulos en que la hemos dividido serán aplicados, respectivamente, a los puntos $G'G''$ y G''' , y al buscar el centro de fuerzas paralelas correspondiente, los podremos substituir por fuerzas cuya intensidad les sea proporcional. Como dichos pesos son proporcionales a las áreas de los rectángulos respectivos, también lo serán a sus mitades, que ya hemos calculado antes, y también el resultado de multiplicar estas mitades por mil, con lo cual resultan los números enteros 112, 60 y 50, que podremos tomar como intensidades de las fuerzas paralelas aplicadas en los puntos G' , G'' y G''' ; además, podremos tomar las direcciones de dichas fuerzas paralelas al lado MP . Para tener el centro de gravedad buscado, tenemos que buscar el punto de aplicación de la resultante de las tres fuerzas 112, 60 y 50 aplicadas en los puntos G' , G'' y G''' . Para ello recordaremos que el momento de la resultante respecto a un centro de momentos cualquiera es igual a la suma de los momentos de las fuerzas componentes respecto al mismo punto. A fin de simplificar, tomaremos por centro de momentos el punto G' , con lo cual el momento de la fuerza a él aplicada será cero, y teniendo en cuenta que los brazos de palanca de las fuerzas aplicadas a los puntos G'' y G''' valen $0,44$ y $0,84$, y representando por l el brazo de palanca de la resultante $112 + 60 + 50 = 222$, tendremos:

$$l \times 222 = 0,44 \times 60 + 0,84 \times 50$$

de donde deducimos el valor de l , que es

$$l = \frac{0,44 \times 60 + 0,84 \times 50}{222} = 0,308\text{m}$$

En el centro de gravedad buscado G se halla, pues, a una distancia del punto G' igual a $0,308\text{m}$ hacia la derecha.

OBSERVACIÓN. — En el ejemplo 1.º habríamos podido proceder del modo siguiente: Después de encontrada la recta PQ , como ya hemos explicado, operar otra descomposición diferente considerando los dos rectángulos $ABCZ$ y $NZED$, que también componen la figura, y en la recta que uniría sus centros de gravedad respectivos se encontraría también el centro de gravedad buscado, de manera que se hallaría en la intersección de esta última recta con la PQ . Este procedimiento, que, a primera vista, parece mejor que el precedente, tiene el inconveniente de que las dos rectas consideradas se cortan muy oblicuamente y determinan en muy malas con-

diciones su punto de intersección, siendo, por lo tanto, mejor el otro método.

65. Corrientemente, en la práctica industrial se presenta el caso de buscar centros de gravedad de superficies planas cuya forma (por ejemplo, los perfiles de viguetas, raíles...) es difícilmente sustituible por figuras que puedan descomponerse en otras de centros de gravedad conocidos, para poder aplicar el método de los ejemplos del n.º 63. En este caso, operaremos experimentalmente del modo siguiente:

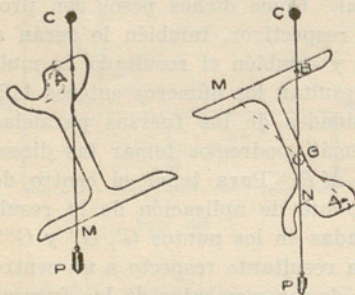


FIG. 62

En una cartulina o bien una lata, bien homogénea, dibujaremos a la medida del natural o bien a cierta escala, la figura considerada, y la recortaremos después con unas tijeras. Supongamos, por ejemplo, que la superficie recortada es la de la figura 62.

Tomaremos un mismo punto de suspensión C del que partirán un hilo para suspender la plantilla y una plomada. Suspondremos la plantilla por un punto A (por medio de un pequeño agujero) y la plomada AP marcará sobre la plantilla la recta AM , que dibujaremos. Repetiremos la operación con otro punto B de la plantilla. El punto G de intersección de las dos rectas dibujadas AM y BN es el centro de gravedad buscado. Este método, tan sencillo y además tan práctico, da resultados siempre suficientemente aproximados, y hasta es aconsejable en los casos en que se pueda operar analíticamente, puesto que, dando exactitud suficiente, ahorra a veces mucho tiempo, siendo, por lo tanto, preferible en estos casos.

CENTROS DE GRAVEDAD DE SÓLIDOS

66. Consideraciones análogas a las hechas en los núms. 57 y 58 nos demostrarían que si el sólido tiene un centro de simetría, es dicho punto su centro de gravedad. Así, la *esfera*, el *cubo*..., tienen por centro de gravedad el centro de figura o simetría.

67. *Centros de gravedad del prisma, cilindro, pirámide y cono.* — Consideremos el prisma de la fig. 63. Sean A y B los centros de gravedad de las dos bases iguales y paralelas, que sabemos buscar como hemos explicado (núms. 61 a 64). Todas las secciones del prisma hechas paralelamente a las bases son iguales a ellas y, por lo tanto, los centros de gravedad de dichas secciones estarán colocados sobre la recta AB , cuyo punto medio G será el centro de gravedad del prisma, ya que lo podemos suponer formado por la superposición de superficies iguales a su base.

Iguales consideraciones a las hechas en el caso del prisma, hacen pensar que un cilindro de bases cualesquiera y paralelas tiene su centro de gravedad en el punto G medio de la recta AB (fig. 64), que une los centros de gravedad de sus bases. El centro de gravedad de las bases, si no se conoce, se busca por el método del n.º 64.

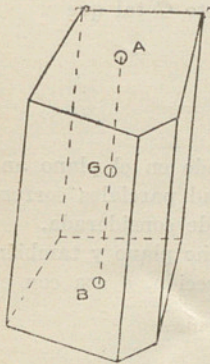


FIG. 63

Consideremos la *pirámide triangular* $SABC$ (fig. 65) busquemos el centro de gravedad P y unámoslo con el vértice S . Todas las secciones de la pirámide hechas paralelamente a la base, son triángulos semejantes al ABC y sus centros de gravedad están situados sobre la recta SP ; por lo tanto, el centro de gravedad

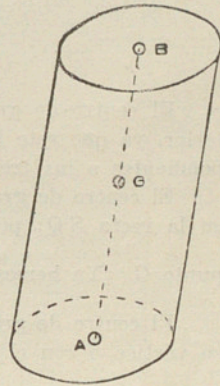


FIG. 64

de la pirámide estará en la recta SP , ya que la pirámide se puede suponer constituida por dichas secciones materializadas.

Considerando como base la cara ASB , por las mismas razones anteriores, el centro de gravedad de la pirámide tiene que estar situado en la recta CQ .

El centro de gravedad de la pirámide triangular será, pues, el punto G intersección de las rectas CQ y SP , en las cuales hemos demostrado que debía estar situado. Demuestra la Geometría que el punto G está a una distancia GP del punto P , que vale la *cuarta parte* de la distancia SP .

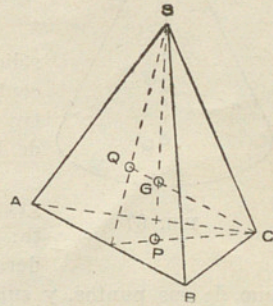


FIG. 65

Consideremos ahora una pirámide de base cualquiera (fig. 66). Sea el centro de gravedad de

la base $ABCDE$ y unamos dicho punto con el vértice S .

Todas las secciones de la pirámide hechas por planos paralelos a la base son semejantes a dicha base y, por lo tanto, sus centros de gravedad se situarán en la recta SQ ; por consiguiente, el centro de gravedad de la pirámide estará situado en la misma recta SQ , ya que podemos suponer que la pirámide está constituida por dichas secciones materializadas.

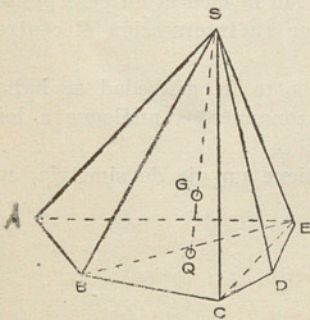


FIG. 66

La pirámide considerada se puede des-

componer en las tres pirámides triangulares $SABE$, $SBCE$ y $SCDE$, cuyos centros respectivos de gravedad están colocados en un plano paralelo a la base de la pirámide y corta la recta SQ en un punto G tal que

$$GQ = \frac{1}{4} SQ.$$

El centro de gravedad de la pirámide estará colocado en el plano anterior, ya que este plano contiene los centros de gravedad parciales correspondientes a las tres pirámides que componen la pirámide considerada.

El centro de gravedad buscado se halla, pues, en dicho plano y también en la recta SQ ; por lo tanto, coincidirá con su intersección, o sea con el punto G . Ya hemos dicho que $GQ = \frac{1}{4} SQ$.

El centro de gravedad de un cono (fig. 67) se halla en la recta que une su vértice S con el centro de gravedad Q de su base, y de tal manera que

$GQ = \frac{1}{4} SQ$, ya que el cono se puede considerar como el límite de una pirámide de infinito número de caras laterales.

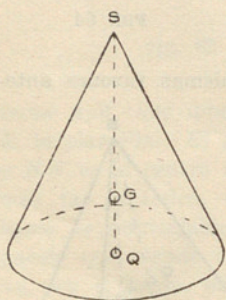


FIG. 67

68. Cuando un sólido se puede decomponer en sólidos parciales de centros de gravedad conocidos, encontraremos su centro de gravedad buscando el centro de fuerzas paralelas correspondientes a los pesos de los sólidos parciales (n.º 53).

Podemos encontrar experimentalmente el centro de gravedad de un sólido cualquiera de la manera siguiente: Suspendamos de un punto fijo el cuerpo considerado por medio de una cuerda (o un hilo) fijada en uno de sus puntos, y supongamos prolongada la cuerda según una recta en el interior del cuerpo. Repitamos lo mismo fijando la cuerda en otro punto del cuerpo. Las dos rectas encontradas dan por su intersección el centro de gravedad buscado.

Si un sólido tiene plano de simetría, su centro de gravedad se halla situado en él, como es fácil demostrar por razonamientos análogos a los empleados anteriormente.

También es fácil probar que si un sólido tiene un eje de simetría, su centro de gravedad se encuentra allí.

FU-13-16

6/8

Precio: 2 ptas.

Arxiu General de la Diputació de Barcelona. Biblioteca