

CONSIDERACIONES
SOBRE LAS SERIES HARMÓNICAS

y los procedimientos aproximados empleados
en el trazado de los engranajes.

POR

José Serrat Bonastre

Profesor de la Escuela de Ingenieros Industriales de Bilbao.

Publicado en la "Revista Tecnológico-Industrial"
de Julio y Agosto de 1903.

BARCELONA
IMPRESA DE PEDRO ORTEGA
ARIBAU, 7 Y 9
1903

CONSIDERACIONES
SOBRE LAS SERIES HARMÓNICAS

y los procedimientos aproximados empleados
en el trazado de los engranajes.

POR

José Serrat Bonastre

Profesor de la Escuela de Ingenieros Industriales de Bilbao.

Publicado en la "Revista Tecnológico-Industrial"
de Julio y Agosto de 1903.

BARCELONA
IMPRENTA DE PEDRO ORTEGA
ARIBAU, 7 Y 9
1903



R. 18622

3269, exp. 4.

CONSIDERACIONES SOBRE LAS SERIES HARMÓNICAS

Y LOS PROCEDIMIENTOS APROXIMADOS EMPLEADOS EN EL TRAZADO DE LOS ENGRANAJES

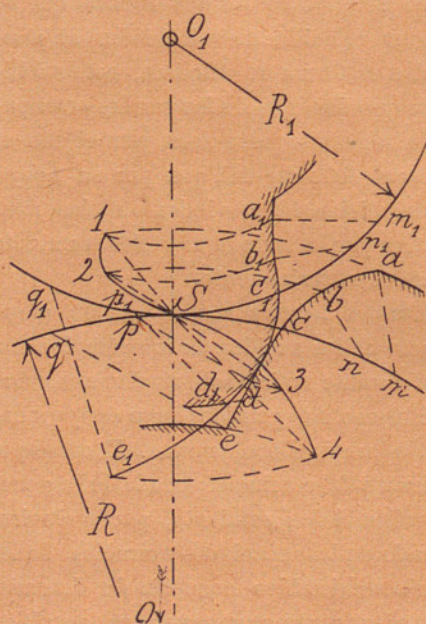
El estudio de los engranajes considerado desde el punto de vista cinemático, comprende dos partes principales. La primera se refiere á la determinación de las superficies primitivas, ó sean los axoides correspondientes al movimiento relativo de las dos ruedas que se consideran. Cuando se parte de una relación de velocidades angulares constante, se obtienen axoides en forma de cilindros, conos ó hiperboloides de revolución, según que los ejes de las ruedas sean paralelos, se corten ó se crucen. La segunda parte tiene por objeto el trazado de los dientes, cuya forma debe ser tal, que por su apoyo continuo quede asegurada la transmisión del movimiento en las mismas condiciones que se obtendrían por la rodadura y deslizamiento de los axoides, supuestos realizados materialmente.

Si en un momento dado cortamos las dos ruedas por un plano normal á la generatriz de contacto de los axoides, la intersección con éstos da lugar á dos curvas que durante un instante ruedan una sobre otra y las secciones de los dientes son dos perfiles cuyo apoyo continuo debe corresponder á la rodadura de dichas curvas. Y como por otra parte la dirección de los dientes debe coincidir con la de la generatriz de contacto para hacer posible el deslizamiento, puede decirse de un modo general que el trazado de las secciones normales de los dientes se reduce al problema cinemático bien conocido de *determinar los perfiles de dos figuras planas que se mueven en su plano, conocidas las trayectorias polares de su movimiento relativo*. Este problema se simplifica notablemente cuando las trayectorias pola-

res son arcos de círculo, como sucede en el caso de ejes paralelos y relación de velocidades constante; en los demás casos se puede llegar á la misma simplicación sin gran error, substituyendo las secciones normales de los axoides, cualquiera que sea su forma, por sus círculos osculadores en el punto de contacto. En estas condiciones la determinación de los perfiles suele verificarse en la práctica por varios procedimientos gráficos, exactos unos y otros aproximados. Figuran entre los primeros el de los perfiles cicloidales y el de evolventes de círculo y entre los segundos los métodos de Willis, Reuleaux y Unwin, cuyo análisis constituye el principal objeto de este artículo.

Aunque suponemos que la mayoría de nuestros lectores conocerá los procedimientos que acabamos de indicar, como más adelante tendremos que referirnos á ellos, empezaremos por recordarlos brevemente, derivándolos del método general ó de *la línea de engrane* que vamos á exponer.

Sean (fig. 1) O y O_1 los centros de los círculos de rodadura ó



círculos primitivos de dos ruedas que designaremos por los radios R y R_1 , y sea S su punto de contacto ó *punto central*. Si suponemos que los centros O y O_1 están fijos en su plano y que los círculos giran rodando uno sobre otro, la posición de S no variará y según se demuestra en Cinemática, la normal común á los perfiles de las dos ruedas en su punto de contacto deberá pasar por S , que no es más que el centro instantáneo de rotación. Adoptemos para la rueda R el perfil $abcde$ y sean $mnpq$ los pies de las normales

normales al mismo. Cuando el punto a venga á coincidir con el punto correspondiente del perfil de R_1 , la normal am ocupará la posición $1S$,

siendo l el punto de intersección de un arco trazado desde S con radio am y otro trazado desde O con radio Oa . Del mismo modo obtendremos los puntos $2, 3$ y 4 correspondientes á b, d y e ; al punto c le corresponde el mismo punto S . La línea $12S34$, lugar geométrico de los puntos según los cuales se van tocando sucesivamente los perfiles, recibe el nombre de *línea de engrane*. Cuando el punto m coincida con S , coincidirá igualmente el punto m_1 del otro círculo primitivo, determinado de manera que los arcos Sm y Sm_1 tengan el mismo desarrollo, y por el mismo sistema pueden determinarse los puntos n, p_1 y q_1 , piés de las normales al perfil de la rueda R_1 . Trazando ahora desde estos piés arcos con radios iguales á ma, nb, pd y qe y cortándolos respectivamente por otros arcos de centro O_1 y radios O_1l, O_12, O_13 y O_14 , obtendremos por una construcción inversa de la que nos dió la línea de engrane, los puntos a, b, d, e , del perfil de R_1 correspondiente al fijado para R ; el punto c_1 correspondiente á c , se obtendrá sencillamente tomando el arco $Sc_1 = Sc$.

Si limitamos las cabezas de los dientes en los puntos a y d_1 los perfiles empezarán á engranar cuando coincidan d y d_1 y acabarán al tocarse a y a_1 y en este mismo tiempo el camino recorrido por un punto cualquiera de los círculos primitivos valdrá $p_1c_1 + mc$. Esta suma recibe el nombre de *longitud del engrane* y su relación con el paso se llama *duración de engrane*. Para que no haya choques bruscos, es preciso que cuando un par de dientes dejan de engranar, ya haya empezado el siguiente, lo cual equivale á decir que la duración de engrane debe ser mayor que uno. Esta duración tiene gran interés para la buena transmisión del movimiento, que depende además de la inclinación de las normales $1S, 2S$, etc., respecto de la línea de los centros, según veremos más adelante.

Reemplacemos ahora la rueda R_1 por otra de radio R_2 , cuyo centro se halle sobre OS . Por el mismo procedimiento explicado podremos obtener un nuevo perfil $a_2b_2c_2d_2e_2$ correspondiente á la rodadura de los círculos R y R_2 . Combinando luego las ruedas R_1 y R_2 , el apoyo continuo de los perfiles $a_1b_1c_1\dots$ y $a_2b_2c_2\dots$ equivaldrá á la rodadura de sus círculos primitivos, puesto que un perfil puede deducirse del otro siguiendo la marcha indicada para R y R_1 . Y esta substitución podría verificarse cuantas veces quisiéramos para ruedas de radios distintos, obteniendo así otros tantos perfiles cuya línea de en-

ralmente dentro de una misma serie según los radios de las ruedas que se consideran. El ángulo de las normales á los perfiles con la línea de los centros varía desde $1SG = \Psi$ cuando los dientes empiezan á tocarse en a y a_1 , hasta ser de 90° para el contacto en S y disminuir de nuevo alcanzando el valor $3SG' = \Psi_1$ cuando los dientes terminan su contacto en d y d_1 . Aunque los diámetros de los círculos generadores de las curvas cicloidales pueden ser cualesquiera, generalmente son iguales entre sí y guardan con el paso una relación tal, que su diámetro sea igual al radio del piñón mínimo de la serie, lo cual da lugar á perfiles rectilíneos radiales para los piés de los dientes de dicho piñón.

En el caso de la fig. 3, la línea de engrane es simplemente la recta NN' y los perfiles resultan ser arcos de *evolventes de círculo* engrandados por el punto S supuesto invariablemente unido á NN' , al rodar esta sobre los círculos marcados de trazos, cuyos centros son los mismos O y O_1 de los círculos primitivos. La longitud del engrane tiene por valor $mS + Sq_1$ y como todas las normales á los perfiles vienen á confundirse con NN' , el ángulo de estas con OO_1 es constante. Bajo este punto de vista este procedimiento es preferible al anterior, porque así se evita el cambio de esfuerzos que se produce necesariamente con la inclinación variable y la trepidación consiguiente. Pero en cambio las porciones correspondientes de los perfiles de las dos ruedas que en el método cicloidal tienen curvaturas del mismo sentido, lo tienen opuesto en el de evolventes, lo cual da lugar á que la pequeña faja de contacto que se establece al apoyarse un diente sobre otro sea menor en el último sistema, creciendo inversamente la presión superficial y por consiguiente el desgaste. Por esto, sin duda, el método cicloidal ha tenido más aceptación en la

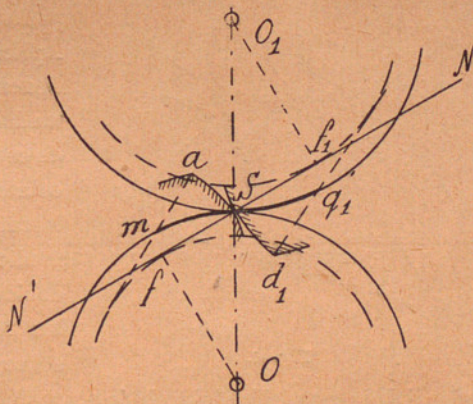


Fig. 3.

práctica y los métodos aproximados más en uso se reducen á substituir los arcos de cicloides por arcos de círculo más cómodos de trazar y cuya forma difiera bastante poco de la teórica para no afectar sensiblemente á la ley del movimiento.

El primero que vamos á estudiar debido á Willis se deriva del siguiente principio cuya demostración podrán consultar nuestros lectores en la Cinemática de Reuleaux: "Si se da á los perfiles de los dientes la forma de arcos de círculo, para que la normal común, NN (figura 4) á los dos perfiles se desvíe lo menos posible del punto central S , es necesario que las rectas Of, O_1f_1 que unen los centros de

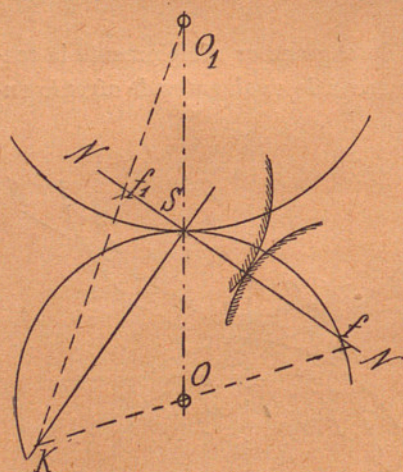


Fig. 4.

los círculos primitivos con los de los perfiles correspondientes, se corten sobre un punto K de la normal SK trazada por el punto S á la misma línea NN ." Aplicando este principio se obtienen perfiles bastante aproximados á los teóricos y á pesar de esto, las tablas de Willis calculadas en consecuencia para trazar series harmónicas por medio de arcos de círculo, han debido desecharse por dar malos resultados en la práctica, sobre todo en las ruedas destinadas á la transmisión del trabajo entre árboles que giran á velocidad angular considerable, como por ejemplo, los de transmisión de las fábricas. El distinguido profesor Unwin (Elements of machine design. Part I, pag. 309) atribuye este fracaso á la poca aproximación del sistema y propone otro que estudiaremos más adelante. Para cerciorarnos de la importancia de esta observación, calculemos analíticamente el error que se comete al substituir los perfiles teóricos por los aproximados.

Si, basándose en el principio de Willis antes enunciado, suponemos que el punto K (fig. 4) se aleja al infinito sobre la recta SK , las rectas Of, O_1f_1 se convierten en paralelas á SK (fig. 5) y los centros f, f_1 de los perfiles son los pies de las normales trazadas por O y O_1 á

la recta NN' . Si el ángulo O_1SN es igual al designado por las mismas letras en la fig. 3, los perfiles obtenidos haciendo centro en f y f_1 pueden considerarse como una aproximación de las evolventes, cuyos radios de curvatura en S valen también Sf y Sf_1 . Pero este sistema participa del inconveniente antes citado para los perfiles de evolventes y sin duda por esta razón se ha generalizado poco, entendiéndose vulgarmente por método de Willis el que vamos á describir que imita con bastante aproximación el método cicloidal (véase fig. 6.)

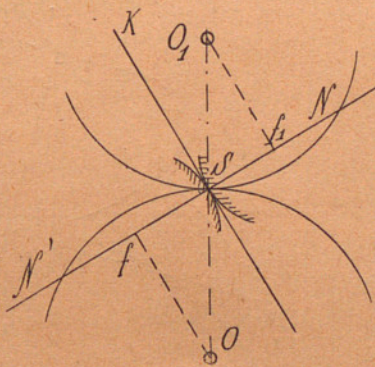


Fig. 5.

Sobre la normal á NN' levantada por el punto S se toman dos magnitudes iguales SK, SK' y uniendo los centros O y O_1 de los círculos primitivos con K y K' se obtienen por intersección con NN' los puntos f, f' y sus correspondientes f_1, f'_1 . Tomando luego desde S sobre NN' y por cada lado la mitad del paso, se obtienen los puntos n, n' , cuyas distancias á los puntos f, f_1, f', f'_1 , dan los siguientes radios:

fn	para el perfil del pie del diente de la rueda	R
f_1n	para el id. de la cabeza de id.	R_1
$f'n'$	para el id. de la id. de id.	R
f'_1n'	para el id. del pie id.	R_1

Combinando los perfiles de cabezas y piés de manera que coincidan sobre el correspondiente círculo primitivo, se obtienen los perfiles totales de aspecto parecido á los cicloidales, con dos sentidos de curvatura. Adoptando un ángulo constante para OSN y una misma longitud SK para todas las ruedas de igual paso, se obtiene una serie harmónica. Willis propuso $OSN = 75^\circ$ y para SK una magnitud tal que para un piñón de 12 dientes, la recta $O'K'$ sea paralela á NN' , con lo cual el centro f'_1 se aleja al infinito y el perfil del pie del diente es una recta perpendicular á NN' . Partiendo de este principio, están calculadas las conocidas tablas que dan directamente las distancias $Sf, Sf', Sf_1, Sf'_1, \dots$ en función del paso y número de dientes de cada rueda.

Para investigar los errores que resultan de sustituir este trazado

al cicloidal, recordaremos que el método de Willis ofrece perfecta identidad con el de Reuleaux, según demostró nuestro ilustrado co-

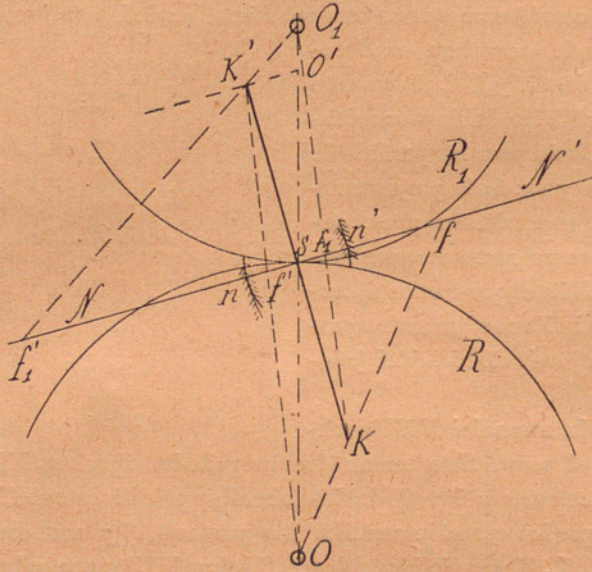


Fig. 6

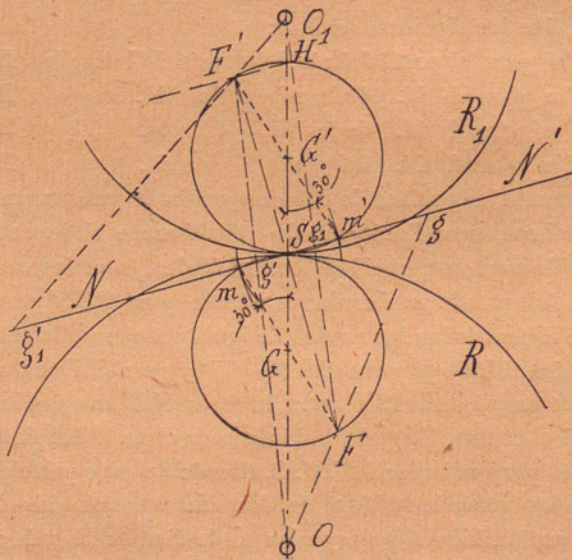


Fig. 7

lega Sr. Canalda en un artículo publicado hace algunos años en esta misma Revista (Abril de 1896, pág. 129), con tal que el piñón mínimo adoptado para el trazado de Reuleaux sea también de 12 dientes. La simple observación de las figuras 6 y 7 corrobora esta identidad.— Reuleaux se limita á sustituir los perfiles cicloides que darían los círculos generadores de centros G y G' (fig. 7) al rodar sobre los círculos primitivos, por arcos de circunferencia cuyos radios $gm, g'm'$, etc., son los de curvatura de las cicloides en los puntos m, m' , correspondientes á una rotación de 30° de los círculos generadores.— La construcción gráfica que sirve para determinar los centros g, g' ... es la misma que la de Willis, puesto que la línea FF' ha de pasar por S por razón de simetría y ser normal á NN' por estar el ángulo FSm inscrito en una semicircunferencia. Además, siendo $SGm = 30^\circ$, el ángulo NSG debe valer 75° , es decir lo mismo que el NSO de la figura 6 y como por otra parte ya dijimos al tratar del método cicloidal, que el diámetro HS del círculo generador debe ser igual al radio del piñón mínimo, si adoptamos el de 12 dientes, el punto H de la fig. 7 corresponderá al O de la fig. 6 y la recta HF' paralela á NN' á la OK' ; por lo tanto las distancias $SF' SF'$, serán iguales á las SK, SK' del trazado de Willis. Finalmente, llamando t al paso, el diámetro HS , igual al radio del piñón mínimo, valdrá

$$HS = \frac{12t}{2\pi} \text{ y por lo tanto:}$$

$$Sm = Sm' = \frac{HS}{2} \times 2 \times \text{sen. } 15^\circ = \frac{6t}{\pi} \times \text{sen } 15^\circ = 0.494t$$

en vez de $0.5t$ que habíamos tomado para determinar los puntos nn' en el método de Willis; de modo que pueden considerarse los dos trazados como perfectamente iguales.

Comprobada esta identidad, estableceremos analíticamente la comparación del método cicloidal con el de Reuleaux, y para abarcar los casos más extremos que pueden presentarse en las ruedas de transmisión de trabajo, calcularemos los errores en los dos siguientes:

1.º Trazado del perfil de la cabeza de los dientes de una rueda de dieciocho.

2.º Trazado del mismo perfil para una cremallera.

No entraremos en el trazado de los perfiles de los piés, puesto que la longitud utilizada es menor y el radio de curvatura mayor que en

$$r_0 = \frac{6}{2\pi} = 0.95 \text{ aproximadamente } (*) \text{ y}$$

$$n = \frac{r_0}{r} = \frac{12}{2 \times 18} = \frac{1}{3}; \text{ de donde } n + 1 = \frac{4}{3} \text{ y } \frac{n + 1}{n} = 4$$

Para $\varphi = 30^\circ$, tendremos las coordenadas del punto m (fig. 8), cuyo valor será:

$$x_1 = 0.95 (4 \operatorname{sen.} 10^\circ - \operatorname{sen.} 40^\circ) = 0.049212$$

$$y_1 = 0.95 (4 \operatorname{cos.} 10^\circ - \operatorname{cos.} 40^\circ) = 3.014529$$

El centro de curvatura g de la epicycloide en el punto m tendrá por coordenadas.

$$(3) \quad x_2 = \frac{r_0}{2n+1} \left[\frac{n+1}{n} \operatorname{sen.} n\varphi + \operatorname{sen.} (n+1)\varphi \right] =$$

$$0.95 \times \frac{3}{5} (4 \operatorname{sen.} 10^\circ + \operatorname{sen.} 40^\circ) = 0.762308.$$

$$(4) \quad y_2 = \frac{r_0}{2n+1} \left[\frac{n+1}{n} \operatorname{cos.} n\varphi + \operatorname{cos.} (n+1)\varphi \right] =$$

$$0.95 \times \frac{3}{5} (4 \operatorname{cos.} 10^\circ + \operatorname{cos.} 40^\circ) = 2.682003.$$

Como comprobación veamos si la distancia gm es igual al radio de curvatura cuya expresión directa es:

$$\rho = \frac{4(n+1)}{2n+1} r_0 \operatorname{sen.} \frac{\varphi}{2} \quad (5) \text{ y por lo tanto valdrá en este caso:}$$

$$\rho = \frac{16}{5} \times 0.95 \times \operatorname{sen.} 15^\circ = 0.786810.$$

El mismo radio obtenido por la distancia de g á m valdrá:

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} =$$

$$\sqrt{(0.049212 - 0.762308)^2 + (3.014529 - 2.682003)^2} =$$

$$0.786810; \text{ valor igual al obtenido directamente.}$$

En la figura 8 la curva de trazo seguido representa la epicycloide y la de trazos interrumpidos es un arco de círculo trazado haciendo centro en g con radio gm . Desde S hasta m el arco de círculo se des-

(*) La adopción de un valor aproximado para r_0 no altera sensiblemente los resultados, con tal que el valor de r se deduzca del anterior por la relación $r_0 : r = n$, tomada con toda exactitud.

vía del cicloidal en el sentido de las x negativas, coincide en m donde hay un contacto de segundo orden y de m hacia arriba se desvía en el sentido de las x positivas. Para apreciar el valor de estas desviaciones, calcularemos las distancias del centro g á los puntos S y a del arco de epicicloide que suponemos limitado en este último punto y las restaremos del radio ρ .

$$\begin{aligned} \text{Distancia } gS &= \sqrt{x_2^2 + (y_2 - r)^2} = \\ &= \sqrt{0.762308^2 + (2.682003 - 3 \times 0.95)^2} = 0.78060 \end{aligned}$$

Diferencia: $\rho - gS = 0.78681 - 0.78060 = 0.00621$ veces el paso.

Como no conocemos las coordenadas del extremo a del perfil, vamos á calcularlas partiendo del ángulo φ , correspondiente en el círculo generador, que á su vez deduciremos de la altura h del diente en sentido del radio. La distancia del punto a al origen vale $r + h$; por lo tanto: $(r + h)^2 = x^2 + y^2$, y sustituyendo en vez de las coordenadas sus valores deducidos de las ecuaciones (1) y (2), tendremos:

$$\begin{aligned} (r + h)^2 &= x^2 + y^2 = r_0^2 \left[\frac{n+1}{n} \text{sen. } n\varphi - \text{sen. } (n+1)\varphi \right]^2 + \\ &+ r_0^2 \left[\frac{n+1}{n} \text{cos. } \varphi - \text{cos. } (n+1)\varphi \right]^2 = \\ &= r_0^2 \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^2 + 1 - 2 \frac{n+1}{n} \text{cos. } \varphi \right] \end{aligned}$$

Substituyendo en vez de $\frac{r_0}{r}$ su igual n y simplificando, resulta:

$$\text{cos. } \varphi = 1 - \frac{1}{n+1} \times \frac{h}{r_0} - \frac{n}{2(n+1)} \times \left(\frac{h}{r_0} \right)^2 \quad (6)$$

fórmula general que nos da el ángulo φ de giro del círculo generador en función de la altura h de un punto cualquiera de la epicicloide sobre el círculo de base, medida en sentido del radio de este último.

En el caso particular que estudiamos, haremos siguiendo la costumbre $h = 0.3$, puesto que tomamos el paso como unidad y por lo tanto

$$\text{cos. } \varphi_1 = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{0.3}{0.95} - \frac{1}{8} \times \left(\frac{0.3}{0.95} \right)^2 = 0.750693$$

de donde $\varphi_1 = 41^\circ 20' 57''$.

Para mayor sencillez en los cálculos tomaremos $\varphi_1 = 41^\circ 30'$ lo cual equivale á considerar un punto algo más elevado, pero siempre perteneciente á la epicloide. Sustituyendo este valor en las fórmulas (1) y (2), tendremos las coordenadas del punto a .

$$x_3 = 0.95 \left(4 \operatorname{sen.} \frac{1}{3} \times 41^\circ 30' - \operatorname{sen.} \frac{4}{3} \times 41^\circ 30' \right) =$$

$$0.95 (4 \times \operatorname{sen.} 13^\circ 50' - \operatorname{sen.} 55^\circ 20') = 0.12722$$

$$y_3 = 0.95 (4 \operatorname{cos.} 13^\circ 50' - \operatorname{cos.} 55^\circ 20') = 3.14944$$

Por lo tanto:

$$\text{Distancia } g a = \sqrt{(0.762308 - 0.12722)^2 + (2.682003 - 3.14944)^2} = 0.78856.$$

Diferencia $\rho - g a = 0.78681 - 0.78856 = -0.00175$ veces el paso.

Estas diferencias nos darían los errores que buscamos, si el arco de epicloide se substituyera por el de círculo que le es osculador en m ; pero en realidad no es así, sino que después de determinado el radio $\rho = g m$, se trazan los perfiles con el mismo, pero haciéndolos pasar por S , lo que equivale á trasladar paralelamente á sí mismo el arco de trazos hasta ocupar la posición indicada de trazo y punto que es el verdadero perfil que se sustituye al cicloidal. Por lo tanto, el error que se comete en la sustitución del método exacto por el aproximado es nulo en S y va creciendo hacia el extremo a del diente donde alcanza su máximo que, despreciando la influencia de la inclinación del radio $g S$ sobre el $g a$, puede obtenerse por la suma de las diferencias calculadas para S y a ; ó sea en este caso:

$$0.00621 + 0.00175 = 0.00796 \text{ veces el paso}$$

En el caso de la cremallera, siguiendo la misma marcha tendremos; (fig. 9):

Ecuaciones de la cicloide referida á los ejes coordinados Sx , Sy .

$$x = r_0 (\varphi - \operatorname{sen.} \varphi) \quad (7)$$

$$y = r_0 (1 - \operatorname{cos.} \varphi) \quad (8)$$

Coordenadas del punto m

$$x_1 = 0.95 \left(2 \pi \times \frac{30^\circ}{360^\circ} - \operatorname{sen.} 30^\circ \right) = 0.022419.$$

$$y_1 = 0.95 (1 - \operatorname{cos.} 30^\circ) = 0.127276.$$

Coordenadas del centro de curvatura g de la cicloide en m :

$$(9) \quad x_2 = r_0 (\varphi + \text{sen. } \varphi) = 0.95 (2\pi \times \frac{30}{360} + \text{sen. } 30^\circ) = 0.972419$$

$$(10) \quad y_2 = -r_0 (1 - \text{cos. } \varphi) = -0.95 (1 - \text{cos. } 30^\circ) = -0.127276$$

Dimensión del radio de curvatura:

$$(11) \quad \rho = 4 r_0 \text{sen. } \frac{\varphi}{2} = 4 \times 0.95 \times \text{sen. } 15^\circ = 0.983512.$$

Comprobación de la distancia de g á m :

$$gm = \rho = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(0.022419 - 0.972419)^2 + (0.127276 + 0.127276)^2} = 0.983513$$

valor que solo difiere del anterior en una millonésima.

$$\text{Distancia } gS = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{0.972419^2 + 0.127276^2} = 0.980713$$

$$\text{Diferencia } \rho - gS = 0.983513 - 0.980713 = 0.0028 \text{ veces el paso.}$$

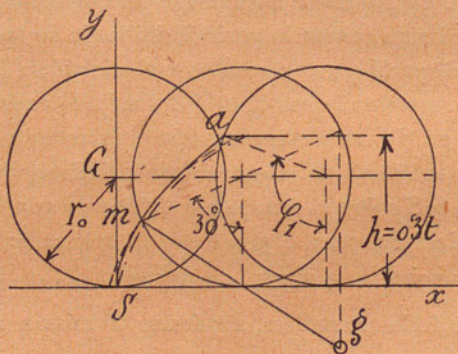


Fig. 9

En este caso conocemos la ordenada del extremo a del perfil $y_3 = 0.3$, de la cual podemos deducir φ_1 por medio de la fórmula (8) que transformada nos dá:

$$(12) \quad \text{cos. } \varphi_1 = 1 - \frac{y_3}{r_0} = 1 - \frac{0.3}{0.95} = 0.684211; \text{ de donde } \varphi_1 =$$

$$46^\circ 49' 35'' = 46.8264 \text{ grados.}$$

Substituyendo valores, tendremos:

$$\cos. \varphi_2 = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{0.2}{0.95} - \frac{1}{8} \times \left(\frac{0.2}{0.95} \right)^2 = 0.836565$$

de donde $\varphi_2 = 33^\circ 13' 14''$. Para mayor sencillez tomaremos $\varphi_2 = 33^\circ$, lo cual ha de tener muy poca influencia en los resultados que buscamos.

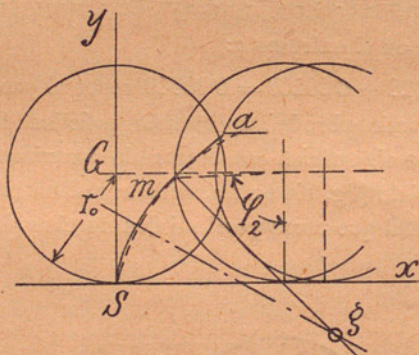


Fig. 11

Los valores correspondientes de x é y serán:

$$x_1 = 0.95 (4 \operatorname{sen.} 11^\circ - \operatorname{sen.} 44^\circ) = 0.06515$$

$$y_1 = 0.95 (4 \operatorname{cos.} 11^\circ - \operatorname{cos.} 44^\circ) = 3.04682$$

El centro g del arco de círculo estará en la intersección de la normal mg con una perpendicular en el punto medio de la recta mS . La ecuación de la normal en un punto (x_1, y_1) de la epicycloide tiene por expresión:

$$(13) \quad y - y_1 = (x - x_1) \times -\operatorname{tg.} \left(n\varphi + \frac{\varphi}{2} \right); \text{ donde substituyendo}$$

valores, tendremos $y - 3.04682 = (x - 0.06515) \times -\operatorname{tg} 27^\circ 30'$; ó sea

$$(14) \quad y = -0.52057 x + 3.08073.$$

La ecuación de la perpendicular en el punto medio de una recta que une los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ es:

$$(15) \quad 2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y - x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 0 \quad \text{ó}$$

$$\text{substituyendo valores} \quad 2 \times 0.06515 x + 2(3.04682 - 2.85)y - 0.06515^2 - 3.04682^2 + 2.85^2 = 0$$

$$\text{ó sea} \quad (16) \quad 0.13030 x + 0.39364 y - 1.16485 = 0$$

Resolviendo las ecuaciones (14) y (16) resultan las coordenadas del punto g $x_4 = 0.64125$ " $y_4 = 2.74691$.

El radio del arco de círculo que pasa por m y S valdrá:

$$\rho^1 = Sg = \sqrt{0.64125^2 + (2.85 - 2.74691)^2} = 0.64948$$

y la distancia de g al extremo a del arco de epicycloide calculado anteriormente

$$ga = \sqrt{(0.64125 - 0.12722)^2 + (3.14944 - 2.74691)^2} = 0.65288$$

existiendo por lo tanto un error:

$$\rho^1 - ga = 0.64948 - 0.65288 = -0.00340 \text{ veces el paso.}$$

En el caso de la cremallera, tendremos siguiendo la misma marcha (fig. 11).

Angulo φ_2 correspondiente á m . Haciendo $y_1 = 0.2$ en la fórmula (12) $\cos \varphi_2 = 1 - \frac{0.2}{0.95} = 0.789474$; de donde $\varphi_2 = 37^\circ 51' 58'' = 37.8662$ grados y por lo tanto $x_1 = 0.95 \left(\frac{2\pi \times 37.8662}{360} - \text{sen. } 37^\circ 51' 58'' \right) = 0.044718$.

Ecuación de la normal en $m (x_1, y_1)$

$$y - y_1 = \frac{\cos. \varphi - 1}{\text{sen. } \varphi} (x - x_1) \quad (17)$$

ó sea sustituyendo valores y simplificando

$$y = -0.342978 x + 0.215337 \quad (18)$$

Ecuación de la perpendicular en el punto medio de mS . Substituyendo valores en (15):

$$2 \times 0.044718 x + 2 \times 0.2 y - 0.044718 - 0.2 = 0; \\ \text{ó sea } 0.089436 x + 0.4 y - 0.042 = 0 \quad (19)$$

Resolviendo (18) y (19) resultan las coordenadas de g

$$x_4 = 0.92419 \quad " \quad y_4 = -0.10164$$

$$\text{Radio } \rho' = \sqrt{0.92419^2 + 0.10164^2} = 0.92976$$

$$\text{Distancia } ga = \sqrt{(0.92419 - 0.08359)^2 + (0.3 + 0.10164)^2} = 0.93162$$

$$\text{Error } \rho' - ga = 0.92976 - 0.93162 = -0.00186 \text{ veces el paso.}$$

tir, es muy aventurado el atribuir á falta de exactitud el fracaso del método de Willis.

En opinión de los constructores prácticos, los dientes trazados por este método resultan demasiado apuntados; pero los cálculos que acabamos de hacer demuestran que lo mismo ha de ocurrir adoptando el método cicloidal ó su aproximado de Unwin si el piñón mínimo de la serie es el de 12 dientes como hemos considerado hasta aquí. La figura 12 representa tres dientes de una rueda de 40, trazados por los tres procedimientos y las diferencias son apenas sensibles á la vista. Investiguemos las causas y efectos de dicho apuntamiento concretándonos al trazado cicloidal que estudiaremos con toda generalidad.

Para ello partiremos del ángulo Ψ (fig. 2) que la normal a m al perfil en su extremo forma con el radio $O m$ del círculo primitivo correspondiente al pié de dicha normal. Cuanto más agudo sea este ángulo, mayor será la inclinación del perfil respecto del círculo primitivo y la forma del diente será tanto más apuntada. El valor de Ψ en cada caso puede calcularse fácilmente deduciéndolo del ángulo φ correspondiente á la rodadura del círculo generador necesaria para describir el punto a , puesto que ambos ángulos pertenecen al triángulo isósceles $a G'' m$ y por lo tanto $\Psi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \varphi$. Por otra parte la fórmula (6) permite calcular φ en función de la altura del diente h , del radio r_0 del círculo generador y de la relación $n = r_0 : r$ entre este último y el radio del círculo de base. Expresando estos valores en función del paso t y de los números de dientes Z de la rueda y Z_0 del piñón mínimo cuyo radio es doble de r_0 tendremos:

$$h = 0.3 t \quad r_0 = \frac{Z_0 t}{4 \pi} \quad r = \frac{Z t}{2 \pi} \text{ y por lo tanto}$$

$$\frac{h}{r_0} = \frac{0.3 \times 4 \pi}{Z_0} = \frac{3.77}{Z_0} \text{ y } n = \frac{r_0}{r} = \frac{Z_0}{2 Z}$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula (6) y simplificando, tendremos la fórmula:

$$\cos. \varphi = 1 - \frac{7.54 Z}{(2 Z + Z_0) Z_0} - \frac{14.21}{(2 Z_0 + 4 Z) Z_0} \quad (20)$$

que nos dá φ en función del número de dientes de la rueda que se

considera y del piñón mínimo de la serie. De la simple observación de la fórmula se desprende que para una misma rueda, siendo Z constante, á medida que Z_0 aumenta, $\cos \varphi$ se acerca á la unidad y por lo tanto φ tiende á cero y Ψ á $\frac{\pi}{2}$. Para valores de Z algo considerables el tercer término del segundo miembro se hace muy pequeño respecto de los demás, de modo que puede despreciarse sin gran error. Si al mismo tiempo sustituimos $\cos \varphi$ por los dos primeros términos de su desarrollo en serie, puesto que se trata de un ángulo pequeño, tendremos:

$$1 - \frac{\varphi^2}{2} = 1 - \frac{7.54 Z}{(2 Z + Z_0) Z_0}; \text{ de donde } \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{3.77 Z}{2 Z + Z_0} \times \frac{1}{Z_0}} \text{ y}$$

$$\text{por lo tanto } \Psi = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{3.77 Z}{2 Z + Z_0} \times \frac{1}{Z_0}} \quad (21)$$

Evaluatede esta manera el apuntamiento, recordemos que el ángulo Ψ (fig. 2) mide la inclinación según la cual el extremo a del diente que consideramos, empieza á empujar al diente correspondiente de la otra rueda y que esta inclinación varia para la cabeza del diente hasta el contacto en S donde la normal comun es perpendicular á la línea de los centros. Si suponemos que sólo trabaja un diente de cada rueda, como en general el momento de rotación que hay que vencer es constante, la presión de empuje será variable y esta variación dará lugar á trepidaciones que serán tanto menores cuanto menos difiera Ψ de $\frac{\pi}{2}$, lo cual nos indica la conveniencia de aumentar Z_0 todo lo posible.

En realidad, si el engranaje está bien trazado, deben tocar varios dientes á la vez y esto contrarresta algo el efecto del cambio de inclinación de las normales comunes, puesto que el esfuerzo con que una rueda impulsa á la otra es la resultante de varias presiones y su inclinación respecto de la línea de los centros se hace menos variable á medida que aumenta la duración del engrane. En la obra de Keller antes citada está el cálculo de esta duración en función de los números de dientes Z, Z_1 de las ruedas que engranan y el Z_0 del piñón mínimo; el resultado viene dado por la fórmula:

$$p = \sqrt{\frac{0.3}{\pi} \times \frac{ZZ_0}{2Z + Z_0}} + \sqrt{\frac{0.3}{\pi} \times \frac{Z_1 Z_0}{2Z_1 + Z_0}} \quad (22)$$

que nos dice que para valores dados de Z y Z_1 , la duración p crece con Z_0 y confirma la necesidad de aumentar en lo posible el valor de Z_0 si se quiere obtener un movimiento libre de trepidaciones.

El piñón mínimo de *doce* dientes adoptado por Willis es sin duda alguna la causa principal del mal resultado práctico que han dado sus tablas para las ruedas de transmisión de trabajo, que no debe imputarse en nuestra opinión á poca exactitud del trazado, sino á un defecto común á todas las series armónicas obtenidas por el trazado cicloidal exacto ó por los aproximados que de él se derivan, cuando se quieren hacer extensivas á piñones de pocos dientes.

Por la misma razón se explica que algunos constructores renuncien á emplear series armónicas á pesar de la economía que reportan y estudien un trazado especial para cada caso, adoptando como diámetro de los círculos generadores los radios de las mismas ruedas. En estas condiciones los perfiles de los piés de los dientes son rectos y radiales y los valores de Ψ y p pueden calcularse substituyendo para cada rueda en lugar de Z_0 el número de dientes de la otra.

No creemos, sin embargo, que sea necesario recurrir á este extremo, sobre todo si se tiene en cuenta que el número de dientes de las ruedas de transmisión no suele hacerse menor de 24 (v. Bach-Die Maschinen elemente), lo cual permite adoptar este número para el piñón mínimo de la serie. Haciendo $Z_0 = 24$ en la fórmula (21), tendremos para las ruedas extremas:

$$\text{Piñón mínimo: } Z = Z_0 = 24, \Psi = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{3.77 \times 24}{2 \times 24 + 24} \times \frac{1}{24}} = \frac{\pi}{2} - 0.229; \text{ equivalente á } 76^\circ 50'$$

$$\text{Cremallera: } Z = \infty, \Psi = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{3.77}{2} \times \frac{1}{24}} = \frac{\pi}{2} - 0.280; \text{ equivalente á } 73^\circ 40'$$

En los casos estudiados para $Z_0 = 12$, hubiéramos obtenido:

$$\text{Rueda de 18 dientes: } \Psi = 90^\circ - \frac{1}{2} \varphi = 90^\circ - \frac{1}{2} \times 41^\circ 20' = 69^\circ 20'$$

Cremallera: $\Psi = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi = 90^\circ - \frac{1}{2} \times 46^\circ 50' = 66^\circ 35'$

ángulos mucho más agudos.

La substitución de los arcos de cicloide por arcos de círculo po-

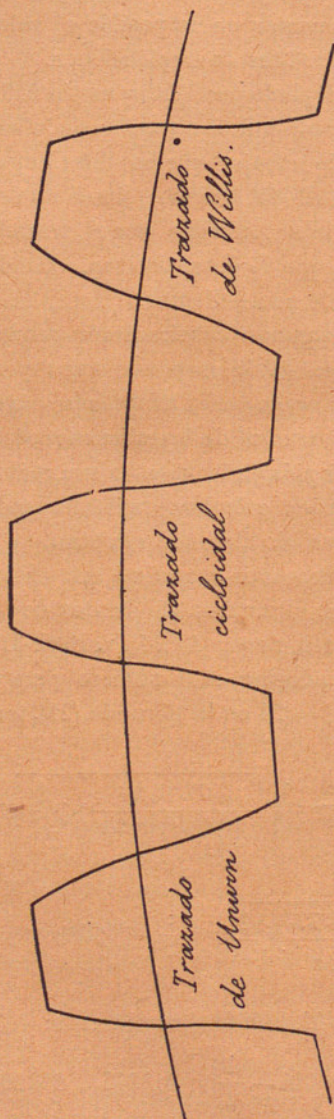


Fig. 12

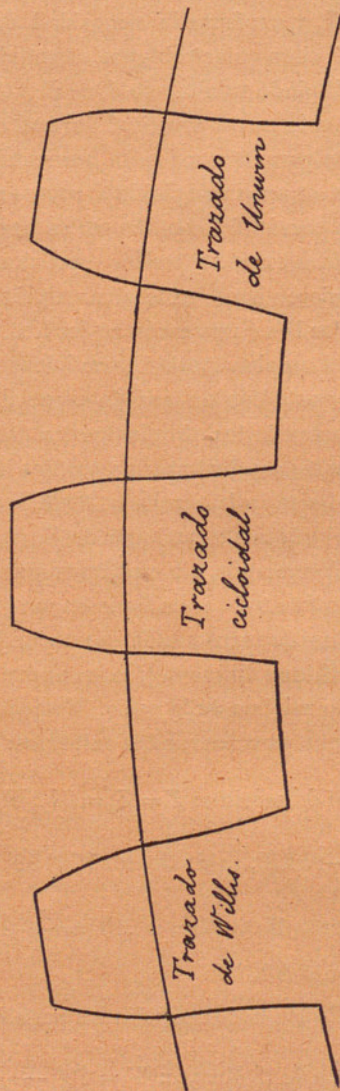


Fig. 13

dría hacerse de la misma manera que en los métodos usuales; ya sea empleando la construcción de Unwin; ya sea por el método de Reuleaux, tomando como radio del círculo generador:

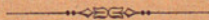
$$r_0 = \frac{24 \times t}{4 \pi} = 1.90$$

veces el paso y para el ángulo SGm (fig. 7), veinte grados en lugar de treinta. Este último trazado sería equivalente al de Willis si se adoptara para NSO (fig. 6), ochenta grados en vez de setenta y cinco, se determinara K' de manera que el punto f' , se alejase al infinito

$$\text{para el piñón de 24 dientes y se tomara } S_n = \frac{12 t}{\pi} \times \text{sen } 10^\circ = 0.66 t$$

ó sea dos tercios del paso en vez de una mitad. Con arreglo á estas bases se han trazado los perfiles de la fig. 13 correspondientes á una rueda de 40 dientes, cuya forma es mucho menos apuntada que en la figura 12.

La adopción del piñón mínimo de 24 dientes ofrece sin embargo el inconveniente de excluir los piñones de pocos dientes que se emplean en engranajes de gran relación y poca velocidad como por ejemplo en los mecanismos de las gruas; pero esta dificultad podría solventarse adoptando dos series distintas: una para las ruedas de transmisión de trabajo con un piñón mínimo de 24 dientes y otra para las ruedas de transmisión de fuerza, cuyas trepidaciones tienen menos importancia, con un piñón mínimo de 12 ú 11, lo cual permitiría aplicar las tablas de Willis, el método usual de Reuleaux ú otro análogo.



RF-3-36