Cálculo de Seguros

Cálculo de Seguros

por

ANTONIO TORRENTS Y MONNER

Contador de la Excma. Diputación provincial de Barcelona en virtud de oposiciones, ex-Catedrático de la Escuela Superior de Comercio de Barcelona, Profesor mercantil, Périto químico y agrícola, Individuo de número de la Real Academia de Ciencias y Artes, Liquidador de Averías, etc., etc.

y

FERNANDO BOTER Y MAURÍ

Profesor mercantil
ex-alumno premiado en las oposiciones á los premios extraordinarios de Contador y Profesorado mercantil

Obra basada en la Memoria de turno leída por D. Antonio Torrents y Monner en la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, en sesión de 29 Abril de 1911, titulada "Cálculo de las Probabilidades y de los Seguros", la cual ha sido debidamente ampliada y vulgarizada.

BARCELONA
Imprenta de Bayer Hermanos y C.ª - Paseo de San Juan, 10
1912

ES PROPIEDAD

AL

Sr. D. José Maluquer y Salvador

Consejero Delegado del Instituto Nacional de Previsión
Asociado en España al "Institute of Actuaries" y Vocal del Comité internacional de Congresos acturiales etc., etc.

Como humilde testimonio de admiración y respeto, dedican la presente edición

Los Autores

CARTA - PRÓLOGO
de D. José Maluquer y Salvador

Sres. D. Antonio Torrents y Monner
y D. Fernando Boter y Maurí

Muy Sres. míos y apreciados amigos: Bastaría para denominarles así—de no existir otros muchos y anteriores títulos—la benévola dedicatoria de la actual edición de su interesante obra *Cálculo de Seguros*, sino la atribuyese á mi especial significación en la materia, no refiriéndome con ello á una inmodesta presunción de significación personal, sino á la que pueda derivarse d- ser en nuestra patria portaestandarte de las aspiraciones cientíe ficas del Comité internacional de Actuarios de Seguros.

Combaten ustedes acertadamente el *horror á los números*, explicación de muchos atrasos en España y fuera de ella y que va desapareciendo, por fortuna, hasta llegar á los geniales trabajos del ilustre y malogrado Poincaré, en su concepción subjetiva matemática de la vida científica y, como su concordancia en la mentalidad española, á los ensayos del docto Ingeniero de Caminos D. Antonio Portuondo, cuando utiliza los conceptos puros de la Mecánica para representar la conexión y sucesión de los hechos sociales en su dependencia mutua.

Los números, diestramente combinados por los técnicos en la ciencia de las probabilidades, conquistan rápidamente su legítima esfera, intensificando el Seguro en las múltiples manifestaciones de la vida social y de la acción del Estado á que pueden aplicarse estas progresivas y complejas fórmulas matemáticas de la solidaridad humana.

Por esto son cada vez más necesarias publicaciones de la meritoria finalidad de la que han tenido la bondad de dedicarme y que tuvo su origen en la prestigiosa Real Academia barcelonesa de Ciencias y Artes.

Dicha publicación aparece en una atmósfera moral apropiada. A este propósito, tenía la honra de manifestar en la memorable sesión celebrada en Barcelona por el Instituto Nacional de Previsión el 28 de Enero último en el Palacio de la Diputación Provincial, de tan respeta bles y gratos recuerdos para ustedes lo mismo que para mí: «Cuando aquí se piensa en el progreso de España, se reconoce merecida y privilegiada atención á las orientaciones económicas.,...» «Esto explica la importancia que concedemos á las cifras en nuestra labor orgánica y de propaganda, así como la convicción de que nos hallamos en un medio ambiente muy adecuado para ser bien apreciadas.»

Este medio ambiente calculista de Cataluña, que felizmente he podido comprobar que se respira asimismo al presente en otras regiones españolas, es debido en buena parte á la labor inteligente y tenaz de muchos «amigos de los números», entre ellos de un autorizado Profesor mercantil, cuyas obras numerosas y utilísimas y cuyo generoso patrocinio á la acción social elogiaría pródigamente si al mismo no me dirigiese ahora y que acaba de evidenciar su apoyo á la juventud estudiosa, asociando á este trabajo á quien se distingue ya en tales materias.

Acaso hayan tenido ustedes en cuenta otra significación para la dedicatoria y es la de tener yo la honra de ser Consejero Delegado del Instituto Nacional de Previsión, cuyo Instituto expresa ostensiblemente el respeto del Estado patrio á las leyes matemáticas, que es organismo de cultivo científico y de aplicación práctica del seguro popular y también escuela de neutralidad económica en la política social.

Las dos interpretaciones expuestas merecen todo mi aprecio y si algo hay, además, en la dedicatoria de deferencia personal, crean que también la agradezco mucho y que á la misma corresponde con sincera consideración su affmo. amigo

q. b. s. m.

José Maluquer y Salvador

Madrid 27 de Julio de 1912

PRÓLOGO

Juzgan algunos que el estudio del Cálculo de Seguros, como asunto propio de las matemáticas superiores, no es asequible á la generalidad de los mortales; pues bien; á destruir semejante paradoja se encaminan nuestros pasos, ya que, como otras leyendas, tanto contribuye al contagio del *horror á los números,* causa eficiente del atraso que se observa en distintos ramos de la humana actividad.

Para llevar á cabo nuestra empresa expondremos los principios fundamentales de las Probabilidades y sus múltiples aplicaciones á toda suerte de seguros de manera que tales conocimientos sean de uso provechoso para las personas que sólo poseen elementos de cálculo, procurando al propio tiempo que en el texto venga aclarada la doctrina mediante ejemplos numéricos discretamente elegidos. Al final del presente trabajo se continúan Tablas de los valores más generalmente usados y en la dificultad de insertar todas ó la mayor parte de las que existen hemos optado por publicar tan sólo las necesarias para resolver los ejemplos numéricos del texto, pues evidente es, que sabiendo operar con ellas, ninguna dificultad ofrecerá el manejo de las demás en un todo semejantes.

Nuestro ferviente deseo estriba en poner al alcance de las personas de ilustración general ó que no hayan hecho especiales estudios de la ciencia Matemática, una materia sobre la cual en España hay escritas relativamente pocas obras y aún éstas y las extranjeras con el inconveniente, de emplearse siempre fórmulas propias de las Matemáticas superiores.

Sobradamente recompensados nos consideraríamos si lográsemos que nuestra explicación resultara sencilla, de forma didáctica que diera por resultado la difusión de los principios matemáticos en que se basan los seguros. (*)

(*) De varios de los puntos que se tratan en esta obra, se había ya ocupado D. Antonio Torrents en la *Enciclopedia Comercial* que publicó dicho señor y en la que había colaborado su aventajado y querido discípulo D. José Clausellas y Codina, (q. e. p. d.)

CÁLCULO DE SEGUROS

I

PROBABILIDADES

PRELIMINARES. — Ciertamente que no deben buscarse en la antigüedad los principios en que descansa el moderno cálculo de las probabilidades, cuya historia, por el contrario, comienza, según dice un erudito escritor, poco antes de mediar el siglo XVII. Al ilustre Galileo, cuyo peregrino y sutilísimo ingenio bien puede decirse que no hubo asunto científico en que casi siempre, con pasmoso acierto, no se ejercitara, débese el análisis matemático de la primera cuestión, referente al Cálculo de las probabilidades. Húbole alguien de preguntar porque en el juego de *tres* dados, según experiencia antigua de los jugadores, ascendía la suma de puntos á 10 ú 11 unidades con alguna mayor frecuencia que á 9 ó 12, ó porque, apostando á favor de la aparición de cualquiera de las dos primeras sumas, era *más probable* ganar que inclinándose al partido contrario, siendo así que las cuatro provenían igualmente de seis combinaciones distintas de los números ó puntos inscritos en las caras de los mencionados dados. Cierto, contestó Galileo, que los números 10 ú 11 resultan de seis combinaciones únicas y esencialmente distintas de los puntos inscritos en las caras de los dados, lo mismo que los 9 y 12, y que por este solo motivo parece que en la práctica indefinida del juego, cualquiera de aquellos números debiera reproducirse ó salir con igual frecuencia que los demás; pero no lo es que todas las combinaciones mencionadas se formen con la misma facilidad ó por el propio concurso de eventualidades y contingencias, y de aquí el misterio ó la razón del hecho. Así, por ejemplo, una de las combinaciones que producen el número 10 es la de los números 5, 3 y 2; pero esta combinación puede aparecer de seis maneras, teniendo en cuenta el orden de colocación ó salida, mientras que la combinación 3, 3, 3, que da el 9, no es variable ó descomponible por ningún concepto.

De todos modos, á quien con mayores títulos debemos considerar como fundador del *Cálculo de las probabilidades* es á Pascal, que consiguió asentar los cimientos de esta ciencia con el singular título de *Geometría del azar*.

En competencia con Pascal y por método más natural y sencillo, dió Fermat la regla que en multitud de casos parecidos y mucho más difíciles y complicados debía observarse con igual objeto.

Por otra parte el holandés Huyghens ocupóse en ordenar una obrita referente al mismo asunto que vió á luz en 1659.

Superó á ésta la obra que Santiago Bernoulli publicó á fines del siglo XVII con el título de *Art conjectandi*, pero aun le excedió en utilidad práctica el libro de Moivre *Mensura sortis*, reimpreso y mejorado en 1716 con este otro título equivalente: *The Doctrine of Chances*.

En definitiva, á pesar de las dudas y oposición de unos, y de negar otros la fecundidad del nuevo método basado en el cálculo de las probabilidades, la verdad se impuso y no hubo más remedio que admitir su doctrina, de la que han sido verdaderos apóstoles y profundos intérpretes los Leibnitz, Euler, Legendre, Lagrange, Laplace, Gauss, Poisson, Cournot, Quetelet y otros muchos ilustres matemáticos.

CÁLCULO DE LAS PROBABILIDADES. — Entendemos aquí por cálculo de las probabilidades á la determinación de las fórmulas ó reglas prácticas para resolver los distintos problemas ó cuestiones que sobre dicho ramo puedan presentarse.

PROBABILIDAD. — Ninguno de los hechos que nos presenta la naturaleza es debido al azar. Todos los acontecimientos, aun aquellos que nos parecen más fortuítos, son una consecuencia lógica de las leyes externas dadas por el Sumo Creador; mas como el hombre es una criatura y como tal tiene sus facultades limitadas, no puede las más de las veces *darse cuenta* de los sucesos que deben ocurrir.

Los acontecimientos futuros merecen distintos conceptos, á saber: se dice que es *imposible* aquel que ninguna circunstancia puede producir; *posible* ó *dudoso* el que tiene alguna en su favor; *probable* cuando se conocen alguna ó algunas de las causas que pueden ocasionarlo; así también será *cierto* cuando sean conocidas todas las que concurren para que se efectúe el tal suceso; y, por último, si se desconocen aquellas por completo, se tendrá *ignorancia* acerca la realización de un acontecimiento.

SUS DISTINTOS GRADOS. — La probabilidad admite diversos grados que en el lenguaje vulgar se expresan diciendo que un suceso es *poco favorable, tal vez probable ó muy probable.*

Mas si queremos apreciar numéricamente el mayor ó menor grado de probabilidad que existe para que tenga lugar un acontecimiento, es preciso adoptar una medida común, á cuyo efecto se ha convenido en representar la certeza por 1, y los diversos grados de probabilidad por las fracciones comprendidas entre cero y 1. Así, pues, en lugar de decir que un acontecimiento es poco probable, se dirá, por ejemplo, que se aprecia su probabilidad en $\frac{1}{10}$; en vez de expresar que es muy probable, se dirá que se estima en $\frac{8}{10}$, $\frac{99}{100}$, etc.

Pudiendo, pues, medir y expresar la probabilidad por medio de los datos que nos proporciona la observación, tendremos que sus valores entrarán en el dominio del cálculo, si bien su resultado no tiene la exactitud absoluta que ofrece el cálculo de las demás cantidades.

PROBABILIDAD MATEMÁTICA. — Es la relación que existe entre el número de lances ó acasos favorables á un acontecimiento dado y el número total de lances ó acasos que pueden ocurrir. Se entiende por *lance ó acaso* toda causa que conduce á la realización de un hecho.

Así, por ejemplo, si en una urna hay 11 bolas negras y 7 blancas (todas exactamente iguales) y se extrae una á la suerte, la probabilidad de que salga negra vendrá representada por $\frac{11}{18}$ y la de sacar blanca por $\frac{7}{18}$; porque 11 y 7 son respectivamente el número de lances favorables á uno ú otro acontecimiento, y 18 es el número total de lances; por consiguiente, las relaciones $\frac{11}{18}$ y $\frac{7}{18}$ serán las probabilidades de obtener una negra ó una blanca (*), y como $\frac{11}{18}$ es mayor que $\frac{7}{18}$ diremos que hay más probabilidad de sacar, en este caso, una bola negra que una blanca.

Si en una urna colocásemos 10 bolas blancas y 10 negras,

(*) Se designan con el título de *probabilidades contrarias* á las que se refieren á dos hechos ó conjunto de hechos, cada uno de los cuales es la negación del otro.

La probabilidad *contraria* á un suceso se estima de una manera análoga; es decir, dividiendo el número de suertes *desfavorables* por el número total de suertes. Las probabilidades *directa* y *contraria* se completan, y su suma es evidentemente igual á la unidad.

En efecto, en el ejemplo dado resultaría: $\frac{11}{18}+\frac{7}{18}=\frac{18}{18}=1.$

De consiguiente, para encontrar la probabilidad contraria á otra conocida, bastará restar ésta de la unidad.

existiría tanta probabilidad de que saliera blanca como negra, pues una y otra vendrían representadas por $\frac{10}{20}$.

Y, por último, si todas las 20 bolas fuesen negras, tendríamos $\frac{20}{20} = 1$, ó sea la certeza de que forzosamente ha de salir de este color, ya que no existe ninguna blanca, ó en otros términos, resulta que todas las suertes son favorables á un mismo suceso.

Atención que requiere el cálculo de las probabilidades. — La principal dificultad que ofrece dicho cálculo consiste precisamente, no en su determinación, pero si en que no siempre se tienen en cuenta todos los casos posibles, bien por ser desconocidos, bien por error de la inteligencia, sumamente fácil en estas cuestiones cuando no se examinan con detención los resultados á que conducirán cuantas combinaciones sea factible hacer con las diferentes hipótesis ó causas que puedan influir en la realización de los hechos.

Para convencernos del anterior aserto, bastará transcribir el ejemplo que consigna un distinguido matemático en los términos siguientes:

Suponiendo que se arrojen cuatro bolas, que llamaremos *a, b, c, d,* con intención de que penetren en un agujero, más ó menos lejano, y se pregunta si será más fácil que se introduzca en aquél un número par ó impar; en el supuesto de que entren alguna ó algunas de aquellas.

Aun no precipitándose á contestar, la mayor parte de las personas dirían: pueden entrar 1 ó 3 en número impar y 2 ó 4 en número par; luego la probabilidad es igual, y hasta no faltará quien encuentre inocente la pregunta.

Sin embargo al entrar una sola puede ser cualquiera de las

a, b, c, d,

lo que da 4 casos posibles y en realidad distintos; al entrar 2 pueden ser

ab, ac, ad, bc, bd, cd,

lo que produce otros 6; al entrar 3 podrán ser

abc, abd, acd, bcd,

lo que origina otros 4; y el caso en que entraran todas

abcd

junto con las anteriores, componen un total de 15 casos posibles, de los cuales hay 8 favorables al número impar y 7 al número par.

La primera probabilidad $\frac{8}{15}$ es, pues, mayor que la segunda $\frac{7}{15}$

por lo cual es más fácil coger ó hacer penetrar un número impar que un número par, contra lo que se cree generalmente y puede parecer al pronto.

Vemos, pues, que en este caso ha sido preciso para poder hallar el resultado real del problema, averiguar *las distintas maneras en que podrían agruparse los objetos siempre que cada grupo se diferenciase en uno de ellos por lo menos,* á cuyas agrupaciones se las distingue con el nombre de *combinaciones.*

Por consiguiente en el problema anterior el 8 indica la suma de combinaciones posibles de los 4 objetos tomados 1 á 1 y 3 á 3; y el 7 las sumas de las combinaciones de los 4 objetos tomados 2 á 2 y 4 á 4.

Teniendo esto presente podemos establecer para la aplicación é inteligencia de la regla dada para determinar la probabilidad matemática, lo siguiente:

1.º El número de casos favorables á la realización de un hecho es igual al número de combinaciones que pueden producirlo.

2.º El número total de casos que puedan ocurrir es igual al número de todas las combinaciones que pueden efectuarse.

Determinación del número de combinaciones. — En el caso últimamente estudiado para conocer el número de combinaciones posibles, se han efectuado en realidad, pero como esto sería dificultoso en muchos casos, para evitarlo se hace uso de la notación simbólica introducida por Euler,

$$C_{m,n} = \binom{m}{n}$$

que se lee *m sobre n* é indica una fracción que por numerador tienen la serie de factores en número igual á *n,* que empezando por *m* van disminuyendo de unidad en unidad, y por denominador la serie de jactores que empezando por 1, van aumentando de unidad en unidad, hasta llegar á *n.*

Ejemplo numérico. — Resolvamos, haciendo uso de esta fórmula, la última cuestión propuesta.

Al entrar las bolas en número par puede verificarse ó bien entrando dos ó bien todas cuatro, lo cual origina las combinaciones expresadas respectivamente por

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6 \text{ y } \binom{4}{4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1$$

ó sean 7 casos favorables al número par.

Al entrar las bolas en número impar puede ocurrir que entre 1 ó bien 3, lo cual producirá las siguientes combinaciones

$$\binom{4}{1} = 4 \text{ y } \binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$$

ó sean 8 casos favorables al número impar, y el número total de casos posibles serán $8+7=15$, con cuyos datos resolveríamos ya el problema como allí se hace.

Clasificación de las probabilidades. — Las probabliidades pueden ser *á priori* y *á posteriori*.

Probabilidades *á priori* son aquellas en las cuales es fácil determinar el número de lances favorables á un acontecimiento y el número total de los que puedan ocurrir.

Probabilidades *á posteriori* son aquellas cuyo número de lances ó acasos es ilimitado, debiendo deducirse aproximadamente por medio de la observación. Así, por ejemplo, la probabilidad de que un buque llegue á su destino sin contratiempo alguno, depende de infinitas causas, en su mayor parte desconocidas y, por tanto, no podrá fijarse *á priori* el número de lances favorables ó adversos al objeto que nos proponemos, sino que será necesario deducirlos *á posteriori*, teniendo en cuenta los datos que nos proporciona la observación ó la estadística.

Las probabilidades se dividen también en ***absolutas y relativas***, y las primeras se subdividen á su vez en simples y compuestas.

Probabilidad absoluta. — Es aquella en la cual comparamos el número de lances ó acasos favorables á un acontecimiento con el número total de los mismos, ó sea que la probabilidad absoluta de que un hecho ocurra, es igual al número de casos favorables á su realización, dividido por el total de los que puedan ocurrir.

Por ejemplo, si representamos por m el número de bolas blancas que existen en una urna, por n el número de encarnadas y por q el de las negras podremos deducir respectivamente las tres probabilidades absolutas siguientes:

Probabilidad de que salga bola blanca $\frac{m}{m+n+q}$ Si hacemos igual á T el número total de bolas se convertiría en $\frac{m}{T}$

Probabilidad de que salga bola encarnada $\frac{n}{m+n+q}$ Si hacemos igual á T el número total de bolas se convertiría en $\frac{n}{T}$

Probabilidad de que salga bola negra $\frac{q}{m+n+q}$ Si hacemos igual á T el número total de bolas se convertiría en $\frac{q}{T}$

Si bien se examina el problema, no es necesario saber el número de bolas de cada color ni el total de las mismas, pues basta conocer la razón del número de bolas de cada color al total. En efecto, la probabilidad de sacar una bola blanca será la misma si la urna contuviera 4 blancas, 6 negras y 8 rojas, ó 6 de las primeras, 9 de las segundas y 12 de las terceras, etc., pues en todos estos casos las fracciones que representan la probabilidad valen lo mismo.

Sumando las tres probabilidades anteriormente obtenidas, resultará:

$$\frac{m}{T}+\frac{n}{T}+\frac{q}{T}=\frac{m+n+q}{T}=\frac{T}{T}=1$$

ó sea la certeza de que al verificar la extracción ha de obtenerse una bola de uno cualquiera de los tres colores.

De lo dicho se desprende también que cuando varias probabilidades conducen á un acontecimiento dado, la probabilidad de que éste se verifique será igual á la suma de aquéllas. Así, en el ejemplo dado, la probabilidad de que salga bola blanca ó negra vendrá representada por $\frac{m}{T}+\frac{q}{T}=\frac{m+q}{T}$

PROBABILIDAD RELATIVA. — Es la que se refiere á los hechos considerados en su relación á algunos de los restantes que es posible ocurran.

De modo que consiste en el cociente que se obtiene de dividir la probabilidad absoluta de un acontecimiento por la suma de las probabilidades absolutas de las cuales se compara.

Suponiendo en el ejemplo anterior, que desea hallarse la probabilidad de que se extraiga más bien una bola blanca que una de encarnada ó negra, vendrá representada ésta probabilidad por

$$\frac{\frac{m}{T}}{\frac{m+n+q}{T}}=\frac{m\times T}{T\,(m+n+q)}=\frac{m}{m+n+q}=\frac{m}{T}$$

Ocurre aquí que la probabilidad relativa es igual á la probabilidad absoluta hallada anteriormente, lo cual proviene de que sólo se trata de la extracción de una bola y en este caso $\frac{m+n+q}{T}$ expresará siempre la certeza de que se extraerá una bola cualquiera, blanca, encarnada ó negra, y por tanto la anterior fracción siempre será igual á la unidad; luego la probabilidad relativa que según la definición dada es igual á la absoluta partida por $\frac{m+n+q}{T}=1$, será igual á esa misma absoluta.

Si se tratara, en cambio de la extracción de dos ó más bolas no sería así, pues entonces la fracción $\frac{m+n+q}{T}$ no sería igual á la unidad por no haber certidumbre de que estas dos ó más fuesen precisamente ambas blancas, negras ó encarnadas. Para mayor comprensión de lo dicho pondremos los siguientes

Ejemplos numéricos. — 1.º Si en una urna hay 8 bolas blancas, 5 negras y 11 encarnadas, al extraer de la misma una bola cual será el valor de las probabilidades siguientes: 1.º de sacar bola blanca; 2.º de sacar bola negra y 3.º de que la extraída sea encarnada?

Probabilidad de sacar bola blanca $= \dfrac{8}{8+5+11} = \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3}$

Probabilidad de sacar bola negra $= \dfrac{5}{8+5+11} = \dfrac{5}{24} = \dfrac{1}{4'80}$

Probabilidad de sacar bola encarnada $= \dfrac{11}{8+5+11} = \dfrac{5}{24} = \dfrac{1}{2'(18)}$

2.º Averígüese en el supuesto anterior la probabilidad de que al hacer una extracción se saque una bola blanca más bien que negra ó encarnada.

$$\text{Probabilidad relativa} = \frac{\dfrac{8}{24}}{\dfrac{8}{24}+\dfrac{5}{24}+\dfrac{11}{24}} = \frac{8}{8+5+11} = \frac{8}{24}$$

3.º En una urna que contuviera las mismas bolas que la anterior, al extraer dos bolas ¿cuál sería la probabilidad de que ambas fuesen blancas, ambas negras ó bien ambas encarnadas?

Número total de casos que pueden ocurrir:

$$\binom{24}{2} = \frac{24.23}{1.2} = \frac{552}{2} = 276$$

Número de casos favorables á extraer dos bolas blancas;

$$\binom{8}{2} = \frac{8.7}{1.2} = \frac{56}{2} = 28$$

Número de casos favorables á extraer dos bolas negras:

$$\binom{5}{2} = \frac{5.4}{1.2} = \frac{20}{2} = 10$$

Número de casos favorables á extraer dos bolas encarnadas:

$$\binom{11}{2} = \frac{11.10}{1.2} = \frac{110}{2} = 55$$

Probabilidad de sacar las dos bolas blancas $= \dfrac{28}{276} = \dfrac{1}{9'857}$

Probabilidad de sacar las dos bolas negras $= \dfrac{10}{276} = \dfrac{1}{27'6}$

Probabilidad de sacar las dos bolas encarnadas $= \dfrac{55}{276} = \dfrac{1}{5'018}$

4.º En el supuesto del ejemplo anterior ¿cuál sería la probabilidad relativa de extraer dos bolas blancas más bien que negras ó encarnadas?

$$\text{Probabilidad relativa} = \frac{\dfrac{28}{276}}{\dfrac{28}{276}+\dfrac{10}{276}+\dfrac{55}{276}} = \frac{28}{93} = \frac{1}{3'321}$$

Probabilidad simple. — Es la misma *absoluta* cuando se refiere á un sólo acontecimiento ó hecho, por ejemplo, si buscabamos la probabilidad que existe para que al hacer una extracción de una urna en que haya bolas blancas y encarnadas, obtengamos bola blanca

Ejemplos prácticos numéricos. — 1.º ¿Cuál será la probabilidad en un empréstito con lotes de ganar uno de los 60 premios, en el próximo sorteo, en el cual figuran los números de 49.280 obligaciones que están en circulación?

Tendremos, según lo explicado $\frac{60}{49280} = \frac{1}{821}$ aproximadamente, ó sea el tanto de probabilidad por cada título ó lámina, para que sea premiado.

2.º Si el premio otorgado fuera uno sólo, siendo las demás condiciones las mismas que las del anterior enunciado, la probabilidad quedaría reducida á $\frac{1}{49280}$

3.º Y si las láminas que poseyéramos, en el último caso, fueran 100, resultaría $\frac{100}{49280} = \frac{1}{492'80}$

PROBABILIDAD COMPUESTA. — Es la que resulta del concurso de dos ó más acontecimientos que tiene cada una de ellos su probabilidad, y de los cuales debe deducirse el acontecimiento compuesto. Por tanto, la probabilidad compuesta será igual al producto de las probabilidades simples de cada uno de los hechos de que dependa el definitivo.

Ejemplos prácticos numéricos. — 1.º Suponiendo que tenemos dos urnas, una de las cuales contiene 10 bolas blancas y 90 negras, y la otra 90 blancas y 10 negras, se desea averiguar la probabilidad de que salga sucesivamente una bola blanca de cada una de las citadas urnas.

La probabilidad del primer acontecimiento es $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$; y la del segundo $\frac{90}{100} = \frac{9}{10}$; de consiguiente, la probabilidad compuesta que resulta de las dos simples vendrá representada por

$$\frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{100}$$

2.º Descomponiendo una baraja de 40 naipes en cuatro paquetes, el primero con las 12 figuras; el segundo con 8 naipes; el tercero con 11 y el cuarto con las nueve restantes ¿cuál será la probabilidad que tendrá de sacar una figura de oros cualquier persona que ignore la combinación hecha?

Probabilidad de llevar la mano al paquete de figuras, $p = \frac{1}{4}$

Idem de extraer de ella una figura de oros (*), $p' = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

(*) Las figuras son 3: rey, caballo y sota.

Probabilidades de acontecimientos repetidos

SU CONCEPTO. — Las probabilidades *compuestas* conducen á la evaluación de las probabilidades en la repetición de acontecimientos ó sea lo que también se llama *pruebas repetidas* que se realizan permaneciendo invariables los lances.

La probabilidad de que un hecho se repita consecutivamente en las mismas circunstancias, es igual á la probabilidad simple del mismo, elevada á la potencia que indique el número de veces que ha de repetirse.

Dichas *pruebas* pueden representarse por extracciones sucesivas de una urna que contuviera *a* bolas blancas y *b* bolas encarnadas, sacando cada vez una bola que se vuelve luego á la urna al objeto de no alterar las condiciones de la suerte.

La probabilidad de obtener una bola blanca en la primera extracción, sabemos vendría representada por $\frac{a}{a+b}$, que haremos igual á p, y la probabilidad contraria, ó sea de que salga bola encarnada, sería $\frac{b}{a+b}$, que haremos igual á q.

Si efectuásemos dos extracciones sucesivas tendríamos, combinando cada probabilidad simple con ella misma y con las demás, las siguientes probabilidades compuestas:

$\frac{a}{a+b} \times \frac{a}{a+b}$ probabilidad compuesta de que en las dos extracciones salga bola blanca.

$\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b}$ probabilidad compuesta de que en la primera extracción salga bola blanca y en la segunda encarnada.

$\frac{b}{a+b} \times \frac{a}{a+b}$ probabilidad compuesta de que en la primera extracción salga bola encarnada y en la segunda blanca.

$\frac{b}{a+b} \times \frac{b}{a+b}$ probabilidad compuesta de que en las dos extracciones salga bola encarnada.

Representando á las anteriores cantidades fraccionarias por p y q, tendremos que la suma de todas ellas será

$$pp + pq + qp + qq = p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2$$

Si efectuásemos tres extracciones sucesivas, se obtendría, combinando de nuevo cada una de las anteriores probabilidades con las demás:

$$p^3 + 3\,p^2q + 3\,pq^2 + q^3 = (p + q)^3$$

Y en general si designamos por m el número de pruebas que, en el ejemplo que se está estudiando, representamos por extracciones obtendremos $(p+q)^m$, cuyos diferentes términos serán todas las probabilidades compuestas que pueden presentarse, los cuales se hallan por el desarrollo del binomio de Newton (*). Así, pues,

$$(p+q)^m = p^m + m\,p^{m-1}q + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,p^{m-2}q^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,p^{m-3}q^3 + \ldots + q^m$$

El primer término p^m representa la probabilidad de que en m extracciones salgan m bolas blancas.

El segundo término $mp^{m-1}q$ representa la probabilidad de que en m extracciones salgan $m-1$ bolas blancas y una encarnada.

El tercer término $\frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,p^{m-2}\,q^2$ representa la probabilidad de que en m extracciones salgan $m-2$ bolas blancas y dos encarnadas.

Y así sucesivamente, el término general

$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots.n}\,p^{m-n}\,q^n$ expresaría la probabilidad de obtener en m extracciones $m-n$ blancas y n encarnadas, y el último término q^m representará la probabilidad de obtener siempre bolas encarnadas; pero sin tener en cuenta para nada el orden en que han de verificarse los $m-n$ sucesos.

Si se quisiera averiguar la posibilidad de que el hecho cuya probabilidad está representada por p se verificara precisamente las $m-n$ primeras veces y que su contrario representado por q ocurriera las n restantes, entonces se comprende fácilmente que la expresión de esta probabilidad compuesta sería igual á $p^{m-n}\,.\,q^n$, valor evidentemente menor que el anotado anteriormente, como puede comprobarse en el segundo de los ejemplos prácticos numéricos que á continuación se resuelvan.

Puede también desearse saber la probabilidad no de que un hecho se repita un número determinado de veces sino por lo menos n ó á lo más $n-1$ veces.

Supongamos que siendo p la probabilidad de un hecho y q la de su contrario queremos saber la que hay de que el suceso se verifique por lo menos n veces.

(*) De modo que la probabilidad de que un suceso se reproduzca un cierto número de veces, dentro de otro mayor de hechos, es igual al valor del término del desarrollo que se obtendrá elevando por la fórmula de Newton á la potencia indicada por el total, la suma de las probabilidades simples correspondientes al hecho y á su contrario, en el cual correspondiese á la primera un exponente igual al número de veces que deba reproducirse aquél.

La probabilidad, en este caso, comprenderá la de que ocurra m, $m-1$, $m-2$,...n veces y por consiguiente será igual á la suma de los términos consecutivos del desarrollo por el binomio de Newton de la suma $(p+q)^m$ en los que aparezca la probabilidad simple p de que el hecho ocurra, con los exponentes que empezando por m desciendan hasta n.

Ahora bien, ¿qué lugar ocupará el último de estos términos que han de sumarse?

Sabemos que el desarrollo contendrá $m+1$ términos; que los exponentes de p empezarán en m y descenderán de unidad en unidad hasta 0; luego, detrás del término en que se encuentre p^n aun habrá los que contengan las potencias p^{n-1}, p^{n-2}, ..., p^0; luego el número de estos términos posteriores será siempre igual á n y por consiguiente el número de términos de que nos serviremos para encontrar la probabilidad pedida será igual á

$$(m+1)-n=m-n+1;$$

He aquí, pues, la regla:

La probabilidad de que un hecho ocurra por lo menos n *veces, dentro* m *casos, es igual á la suma de los* m—n+1, *primeros términos del desarrollo por el binomio de Newton, de la suma* $(p+q)^m$ *de la probabilidad del hecho y su contrario, elevada al número que indica el total de hechos.*

En cuanto á la probabilidad de que el suceso ocurriera á lo más $n-1$, se obtendría su valor sumando los restantes términos del desarrollo indicado en la regla anterior.

Ejemplos prácticos numéricos: — 1.º Teniendo en una urna 3 bolas blancas y una encarnada, deseamos averiguar la probabilidad de que en cinco extracciones sucesivas salga 3 veces bola blanca y 2 bola encarnada.

Para resolver este problema debe atenderse á los exponentes de las letras p y q del desarrollo anterior, las cuales suponemos que representan respectivamente las probabilidades simples de sacar bola blanca y encarnada.

Así, pues, como en el ejemplo propuesto el valor de m, que representa el número de extracciones, es 5, sustituiremos este valor en cada uno de los términos del anterior desarrollo hasta que nos resulten los exponentes 3 y 2 en las letras p y q respectivamente, y en su consecuencia, observamos que el término del cual hemos de valernos para resolver el problema anterior es el tercero $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2} p^{m-2} q^2$, puesto que verificando la sustitución antedicha nos dá $\frac{5\,(5-1)}{1\,.\,2} p^{5-2} q^2 = \frac{5\,(5-1)}{1\,.\,2} p^3 q^2$; pero en dicho ejemplo $p = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$, y $q = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$; por tanto la probabilidad de que en cinco extracciones sucesivas salga 3 veces bola blanca y 2 veces encarnada, será:

$$\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}p^{m-2}q^{2}=\frac{5\times 4}{1\,.\,2}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}=10\times\frac{27}{64}\times\frac{1}{16}=\frac{270}{1024}=$$
$$=\frac{135}{512}=\frac{1}{3'792}$$

2.º Se desea saber la probabilidad de que al hacer cinco extracciones sucesivas en la misma urna anterior, ocurra que en las 3 primeras salga cada vez bola blanca y en las dos últimas bola encarnada.

Aquí la probabilidad buscada estaría compuesta de la de que se extrajera tres veces bola blanca y de la de que extrajera dos veces bola encarnada, ó sea $p^{m-n}q^{n}$, y sustituyendo por los valores hallados en el ejemplo anterior.

$$\text{Probabilidad}=\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}=\frac{27}{64}\times\frac{1}{16}=\frac{27}{1024}=\frac{1}{37'92}$$

3.º Si en el ejemplo anterior nos propusimos hallar el acontecimiento que tiene mayor probabilidad de éxito en las cinco extracciones sucesivas, debería averiguarse, en primer lugar, todas las probabilidades que pueden ocurrir, las cuales son las siguientes:

1.ª Que salga en todas las cinco extracciones bola blanca.
2.ª Que salga 4 veces bola blanca y una vez encarnada.
3.ª Que salga 3 veces bola blanca y 2 encarnada.
4.ª Que salga 2 veces bola blanca y 3 encarnada.
5.ª Que salga 1 vez bola blanca y 4 encarnada.
6.ª Que salga en todas las cinco extracciones bola encarnada.

Ahora bien, si comparamos entre sí los términos del siguiente desarrollo, cada uno de los cuales representa la respectiva probabilidad de las seis que acabamos de enumerar, tendremos:

$$(p+q)^{5}=p^{5}+5\,p^{4}q+10\,p^{3}q^{2}+10\,p^{2}q^{3}+5\,pq^{4}+q^{5}=$$
$$=\left(\frac{3}{4}\right)^{5}+5\left(\frac{3}{4}\right)^{4}\frac{1}{5}+10\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}+10\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}+5\times\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^{5}=$$
$$=\frac{243}{1024}+\frac{405}{1024}+\frac{270}{1024}+\frac{90}{1024}+\frac{15}{1024}+\frac{1}{1024}=1,\ \text{ó sea la certeza.}$$

Y, de consiguiente, el término mayor es el 2.º, ó sea:

$$5\,p^{4}q=\frac{405}{1024}$$

lo cual nos indica que si en una urna tenemos tres bolas blancas y una encarnada al ejecutar cinco extracciones, el acontecimiento más probable será que salga cuatro veces bola blanca y una vez encarnada.

4.º En una urna hay 3 bolas blancas y 1 encarnada ¿cuál será la probabilidad de que en 5 extracciones el menor número de veces que salga bola encarnada sea 3 y cuál la de que no llegue á salir 2?

Sabemos que el valor de $p=\frac{3}{4}$ y el de $q=\frac{1}{4}$.

Formaríamos ante todo el desarrollo de $(p+q)^m$, que será:

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^5=\left(\frac{3}{4}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)+\binom{5}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2+$$
$$+\binom{5}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3+\binom{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^4+\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

y hallando el valor numérico de cada término tendríamos:

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^5=\frac{243}{1024}+5\cdot\frac{81}{256}\cdot\frac{1}{4}+10\cdot\frac{27}{64}\cdot\frac{1}{16}+10\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{64}+$$
$$+5\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}=$$
$$=\frac{243}{1024}+\frac{405}{1024}+\frac{270}{1024}+\frac{90}{1024}+\frac{15}{1024}+\frac{1}{1024}$$

La primera probabilidad pedida sabemos por la regla, que será igual á la suma de los $m-n+1=5-3+1=3$, primeros términos, luego:

$$P=\frac{243}{1024}+\frac{405}{1024}+\frac{270}{1024}=\frac{918}{1024}$$

y la segunda probabilidad pedida sería igual á la suma de los restantes términos.

$$P'=\frac{90}{1024}+\frac{15}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{106}{1024}$$

La suma de ambas probabilidades será igual á la unidad

$$\frac{918}{1024}+\frac{106}{1024}=\frac{1024}{1024}=1$$

Probabilidades á posteriori

Su objeto. — Constituyen el cálculo de tales probabilidades (cual definición hemos expuesto), los procedimientos que tienen por objeto determinar la probabilidad de sucesos futuros por la consideración de pruebas anteriores.

Ejemplos prácticos numéricos. — 1.º Supongamos que se tienen varias urnas todas con tres bolas, pero en un cierto número de ellas estas tres bolas son blancas, en las de otro grupo hay dos bolas blancas y una negra, y por fin un tercer grupo de urnas que contienen una bola blanca y dos negras, y de cada una de estas tres clases de urnas hay el mismo número.

Se ha tomado una urna á la suerte, y de ella se ha extraído una bola, que resulta blanca; ¿cuáles son las probabilidades de que la extracción se ha hecho de una urna de la primera, de la segunda ó de la tercera clase?, ó, lo que es lo mismo, ¿cuál es la probabilidad de que la causa que ha originado el hecho realizado, sea la que le atribuye una probabilidad 1, $\frac{2}{3}$ ó $\frac{1}{3}$?

Puesto que existe el mismo número de urnas de cada clase, la probabilidad de sacar bola de las urnas de una ó de otra clase es $\frac{1}{3}$, y por consiguiente, *á priori*, la probabilidad de sacar una bola blanca es antes de toda prueba, en virtud de los principios de las probabilidades compuestas y totales:

$$\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad (*)$$

Si se designan respectivamente por A_1, A_2, A_3 los casos de extracción de bola blanca de las urnas de la primera, de la segunda y de la tercera clase, y si se repite un gran número m de veces la prueba que consiste en elegir fortuítamente una urna y de ésta hacer una extracción á la suerte, el número de casos A_1 será sensiblemente $\frac{1}{3}m$; el de A_2 será casi igual á $\frac{2}{9}m$, y por fin el de A_3 no diferirá gran cosa de $\frac{1}{9}m$.

Recíprocamente se debe admitir que si se ha sacado una bola blanca de aquella urna, las probabilidades de que provenga de una urna de la primera, de la segunda ó de la tercera clase son entre sí como los números 3, 2 y 1. Por otra parte, la suma de estas probabilidades *á posteriori* debe ser igual á la unidad, puesto que una de las tres hipótesis se verifica necesariamente. La probabilidad de que la bola sacada provenga de la primera, de la segunda ó de la tercera urna es, por consiguiente, igual al número correspondiente á cada una de estas urnas dividido por la suma de los tres números, ó á

$$\frac{3}{6}, \frac{2}{6} \text{ y } \frac{1}{6}$$

Este ejemplo hace comprender el sentido de la regla siguiente, atribuída al geómetra inglés Bayes, que viene á ser como el teorema inverso del de Bernoulli. Las probabilidades de las causas (ó de las hipótesis) son proporcionales á las probabilidades que es-

(*) $$\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

tas causas dan para los hechos observados. La probabilidad de una de estas causas ó hipótesis es una fracción que tiene por numerador la probabilidad del hecho por efecto de esta causa, y por denominador la suma de todas las probabilidades semejantes, relativas á todas las causas ó hipótesis.

2.º Se han sacado sucesivamente de una urna tres bolas blancas y una de negra, teniendo cuidado de meter la que se saca antes de extraer otra; se sabe que el número total de bolas es 4, pero se desconoce las que hay de uno y otro color y se desea averiguar la composición probable de la urna.

Sobre esta composición se pueden hacer las tres hipótesis siguientes:

3 bolas blancas y 1 negra;
2 bolas blancas y 2 negras;
1 bola blanca y 3 negras;

y las probabilidades de cada una de estas hipótesis posibles al hecho de sacar tres bolas blancas (p) y una negra (q) están expresadas por

$$p = \frac{3}{4}, \; q = \frac{1}{4}$$

para el primer caso,

$$p = \frac{2}{4}, \; q = \frac{2}{4}$$

para el segundo, y

$$p = \frac{1}{4}, \; q = \frac{3}{4}$$

para el tercero.

La probabilidad del hecho completo, compuesto de la extracción de tres bolas blancas y una negra, será en las tres hipótesis

$$4\,p^3 q = \frac{27}{64} \text{ ó } \frac{16}{64} \text{ ó } \frac{3}{64}$$

Las probabilidades de las tres hipótesis sobre la composición de la urna son, por tanto, entre sí, como 27 : 16 : 3, y valen respectivamente, según lo dicho en las probabilidades relativas,

$$27+16+3=46 \left\{ \begin{array}{l} h = \dfrac{27}{46} = \dfrac{27}{64} : \dfrac{46}{64} \\ h' = \dfrac{16}{46} = \dfrac{16}{64} : \dfrac{46}{64} \\ h'' = \dfrac{3}{46} = \dfrac{3}{64} : \dfrac{46}{64} \end{array} \right.$$

Cuando se ha determinado la probabilidad de cada hipótesis posible se deduce fácilmente la probabilidad de los sucesos que pueden verificarse en las tiradas sucesivas.

En el ejemplo precedente, cada una de las composiciones posibles de la urna tiene una probabilidad cuyo valor hemos hallado; se conoce también para cada una de estas composiciones la probabilidad de tirar una bola blanca; luego, según el principio de las probabilidades compuestas, la probabilidad de que salga una bola blanca en la quinta tirada será:

$$\frac{27}{46} \cdot \frac{3}{4} + \frac{16}{46} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{46} \cdot \frac{1}{4} = \frac{29}{46}, \ (*)$$

y la de que salga una bola negra

$$\frac{27}{46} \cdot \frac{1}{4} + \frac{16}{46} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{46} \cdot \frac{3}{4} = \frac{17}{46}. \ (**)$$

De suerte que la probabilidad de un nuevo hecho ó suceso sencillo se obtiene calculando por la consideración de los sucesos pasados, la probabilidad de las diversas hipótesis posibles, y sumando los productos de estas probabilidades por las del suceso en cada hipótesis.

Las probabilidades *á posteriori* constituyen el fundamento de los seguros, pues para calcular la probabilidad de vida ó muerte tenemos en cuenta las indicaciones de las Tablas acerca de los fallecidos y supervivientes de una edad determinada, en una época pasada.

Probabilidad moral

Concepto de la misma. — Las *probabilidades medias* que pueden establecerse en virtud de los hechos observados cuando se desconocen, en todo ó en parte, las causas que los motivan, conducen á la llamada *probabilidad moral* que consiste en la tendencia á creer que cierto hecho se verificará; ó sea la predicción de los futuros sucesos ó fenómenos teniendo en cuenta los acontecidos.

Coeficientes de divergencia. — Se llama coeficiente de divergencia al cociente que resulta de dividir el valor de la desviación resultante de las observaciones efectuadas, por la desviación que dá la fórmula E; la cual consignamos más adelante.

Ejemplo práctico numérico. — Si nos propusiéramos averiguar el número de varones que nacerán en cierto período ó lapso futuro de tiempo, en proporción al número total de nacimientos que ocurran en una localidad determinada, deberá procederse en la siguiente forma:

Ante todo es preciso tener á la vista una estadística, previa-

---

(*) $\frac{27}{46} \cdot \frac{3}{4} + \frac{16}{46} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{46} \cdot \frac{1}{4} = \frac{81}{184} + \frac{32}{184} + \frac{3}{184} = \frac{116}{184} = \frac{29}{46}$

(**) $\frac{27}{46} \cdot \frac{1}{4} + \frac{16}{46} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{46} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{184} + \frac{32}{184} + \frac{9}{184} = \frac{68}{184} = \frac{17}{46}$

mente formada, que abarque un número sucesivo de años (cuantos más mejor) pasados, que nos proporcione los datos de lo acontecido acerca el particular.

En el supuesto de que en París, durante once años, han ocurrido 524.738 nacimientos, de los cuales eran varones 266.747 y hembras 257.991 (*); la probabilidad de que en cada uno de los nacimientos resultara varón, en dicho intervalo de tiempo fué de

$$\frac{266747}{524738}=0'508343$$

Por lo tanto, si en uno de los referidos años el total de nacimientos ascendió á 37.451, la probabilidad del número de varones que existieran de entre aquéllos sería $37.451 \times 0{,}508343 = 19{,}038$; pero como el número real que hubo ascendió á 19.073, resultó una diferencia ó desviación en más de $19{,}073 - 19.038 = 35$.

Buscando asimismo las desviaciones ó errores acontecidos en los otros años, y sumando el valor de aquéllas durante los 11 años, que suponemos alcanzaron á 949; tendremos designado por E la suma del valor absoluto de todas las desviaciones, mediante la aplicación de la fórmula de Stirling, $E = 0'80\sqrt{\frac{n\ A\ (S-A)}{S}}$ (**)

$$E = 0'80 \sqrt{\frac{11 \times 266747 \times 257991}{524738}} = 961$$

De manera que el *coeficiente de divergencia* será $\frac{949}{961} = 0'98$ que, conforme vemos, se acerca, en este caso, á la unidad; lo cual nos dice que las desviaciones entre los nacimientos de los dos sexos sigue una marcha normal y están conformes, con mucha aproximación, á las indicaciones de la teoría (***).

Análogamente podríamos hallar los coeficientes de divergencia entre el número de hijos naturales comparado con el total de nacimientos; el de delincuentes que no saben leer ni escribir con respecto al número total, etc., etc.

Problemas acerca los fenómenos meteóricos. — Por lo que respecta á ciertos fenómenos meteóricos, la estadística cuida

---

(*) La experiencia ha demostrado ya, que es algo mayor el número de varones nacidos que el de hembras.

(**) Esta fórmula se presenta también así: $E = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{n\ A\ (S-A)}{S}}$

(***) Por el contrario, si el citado coeficiente fuera mucho menor, por ejemplo 0'66, probaría que una causa axcepcional, como guerras, epidemias, escasez, etc. habia modificado la normalidad haciéndola disminuir, ó que otras causas desconocidas, influyendo sobre las consideradas, hacían escapase aquél á las leyes de las probabilidades medias.

ya de anotar las cantidades y las medias que representan los mismos, pero sin indicación del número de pruebas correspondientes á los valores obtenidos. De modo que si bien en las observaciones meteorológicas se fija la cantidad de agua de lluvia caída cada día en un lugar, el estado de la atmósfera, la dirección de los vientos, etcétera, para inquirir las oportunas consecuencias deberá aplicarse (por extensión) la misma fórmula consignada anteriormente, que presentamos aquí bajo la forma:

$$0'80 \sqrt{n\,A\left(1 - \frac{A}{S}\right)}$$

Mas como en las cuestiones en que ahora interviene puede considerarse á S mucho mayor, en comparación á A, se puede admitir por desviación media el valor

$$E' = 0'80 \sqrt{n\,A}$$

Y para hallar el límite máximo de este coeficiente (*) que resulta de la correspondiente fórmula modificada, debe emplearse la que han deducido los matemáticos:

$$\frac{2'50 \times (n-1)}{n\sqrt{n}} \sqrt{A}$$

Ejemplo práctico numérico. — En cierta localidad, durante un mes entero cayó un espesor de agua de 630 ^{dm}, repartidos de la manera siguiente:

2 el día 3, 26 el 5, 15 el 7, 2 el 8, 13 el 12, 33 el 13, 12 el 14, 48 el 15, 7 el 17, 145 el 18, 85 el 20, 145 el 22, 44 el 25 y 53 el 28. El término medio diario es de 20; las desviaciones de esta medida son 6 el 15, 13 el 13, 28 el 15, 125 el 18, 65 el 20, 125 el 22, 24 el 25 y 33 el 28. La suma de las desviaciones en más es 419 y la suma de las en más y en menos es el doble, ó sea 838.

(*) El límite *inferior* del coeficiente de divergencia es generalmente cero.

La desviación máxima, cuando todos los acontecimientos observados han tenido lugar dentro de la misma serie de pruebas, tendrá entonces por valor $2A\frac{n-1}{n}$, lo cual da para el *máximo* coeficiente de divergencia.

$$\frac{2\,A\,\frac{n-1}{n}}{0'80\sqrt{\frac{n\,A\,(s-A)}{s}}} = \frac{5}{2} \times \frac{(n-1)}{n\sqrt{n}} \sqrt{\frac{s\,A}{s-A}} =$$

$$= \frac{2'50 \times (n-1)}{n} \sqrt{s\frac{p}{q}}$$

De modo que el coeficiente de divergencia, será:

$$\frac{838}{0'80 \times \sqrt{30 \times 630}} = 8$$

El límite máximo de este coeficiente es

$$\frac{2'50 \times 29\ (*)}{30 \sqrt{30}} \sqrt{630} = 11$$

Buscando el coeficiente para cada mes del año, en la misma localidad, se encontraría que el límite máximo era siempre 11, de lo cual cabría deducir que el fenómeno de la lluvia no es un azar, sino que es debido á causas generales que ejercen su influencia durante todos los días del mes.

(*) El factor (n—1) de la fórmula correspondiente, es en este ejemplo 30—1=29.

II

APLICACIONES

GENERALIDADES. — En el vastísimo horizonte de las *Matemáticas* cabe el estudio, desde el insondable *infinito* hasta los rudimentales cálculos que exigen las operaciones más triviales de la vida.

Las artes todas y los oficios tienen sus reglas fundadas en principios matemáticos; las ciencias físicas y naturales no pueden dar un paso sin el apoyo de aquellos; la estadística, la economía política, la administración y, en general, las ciencias sociales piden frecuentemente á las matemáticas la exactitud necesaria para sus datos.

El mismo *Debe y Haber* del comerciante no es más que otra de tantas aplicaciones de la ciencia de los números, las cuales van extendiéndose cada día en beneficio de la humanidad. Dígalo sino el cálculo de las probabilidades, sirviendo de base á los seguros sobre la vida y otras instituciones de previsión que constituyen uno de los más preciados adelantos del último siglo, ya que armonizan admirablemente los intereses materiales con las afecciones morales del individuo, que, por instinto de conservación, desea perpetuarse entre los seres queridos ó de los cuales es sostén y apoyo.

Interesantísimas son las cuestiones á que las probabilidades tienen aplicación, como las de Estadística, vida probable (*), teoría de los errores (**), y singularmente para estimar en su justo valor los datos siempre meramente aproximados á la verdad, que la observación y la experiencia dan en el cultivo de las ciencias

(*) Las tablas de mortalidad y de supervivencia, tienen á su vez aplicación á diversas cuestiones, como son por ejemplo, todas aquellas en que desée compararse el total de población con el número de los niños de corta edad recogidos en los asilos, con los que concurren á las escuelas, con los mozos obligados á formar parte del ejercito, con el número de electores y con cuantos se rozan con la higiene y salubridad, mortalidad de diversos pueblos; años, etc.

(**) Y aun á las mismas operaciones de bolsa, para averiguar la mayor ó menor probabilidad de que uno ó más titulos de un empréstito, salgan amortizados ó premiados en un sorteo dado.

de la naturaleza, datos que son la base sobre que descansa el edificio de aquéllas.

APLICACIÓN DEL CÁLCULO DE LAS PROBABILIDADES Á LAS INVESTIGACIONES ESTADÍSTICAS. — Reconocido por los estadísticos que sólo en los *grandes números* podía encontrarse sólido fundamento para sus deducciones y que la llamada *Estadística matemática* proporcionaba no sólo fórmulas exactas para la expresión de los hechos observados, sino que además medios eficacísimos de inducción para el descubrimiento de las leyes que gobiernan aquéllos, pronto hicieron aplicación del cálculo de las probabilidades á la indicada ciencia, así como para resolver las cuestiones inherentes á las probabilidades de vida y á la composición de las tablas de mortalidad.

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS. — La medida cuantitativa normal de un hecho, ó sea la normalidad de éste, depende de la acción de las causas constantes que concurren á su producción, no influídas por las desviaciones en el propio hecho. Para conseguir, pues, la media estadística, es necesario extender suficientemente la serie de las observaciones, á fin de que las causas anormales hayan podido obrar en todos sentidos sobre los datos recogidos y resulten compensadas las desviaciones positivas de aquellos números mayores del término medio con las negativas de los que son inferiores.

A esta ley, en virtud de la cual *los hechos sociales análogos se equilibran al multiplicarse y, considerados en largas series, presentan un orden final de reproducción que no es alterado por las variaciones accidentales,* se le llama *ley de los grandes números* (*).

APLICACIÓN DE LAS PROBABILIDADES AL RECLUTAMIENTO DEL EJÉRCITO. — En el caso de que en un alistamiento figuren inscritos N mozos, entre los cuales suponemos hay n que tienen exención legal ó inutilidad física, y que el cupo ó contingente es de c mozos; se quiera averiguar la probabilidad de que al número x le corresponda, por órden de numeración, incorporarse en filas, procederemos, siguiendo á Liagre, del modo que va á exponerse:

Ante todo han de aceptarse las hipótesis de que el número x no tiene motivo de exención y que la distribución de los $(x—1)$ números anteriores no es conocida.

Los $(N—1)$ números distintos del núm. x pueden estar distribuídos de cualquier forma entre los $(N—1)$ inscritos; siendo el número de sucesos posibles $A_{(N—1)}$.

Para que el núm. x no deba ingresar en filas, es preciso que, por lo menos, haya c mozos útiles de entre los $(x—1)$ números anteriores. Busquemos, pues, el número de coordinaciones de $(N—1)$ elementos tomados de $(x—1)$ á $(x—1)$ que, por lo menos,

---

(*) Quetelet ha demostrado que la *precisión de los términos medios crece en razón directa de la raiz cuadrada del número de las observaciones.*

contengan c elementos entre los $(N-n-1)$ designados, correspondiendo estos últimos á los mozos útiles inferiores al número x.

El valor que se busca es, con arreglo á Liagre,

$$S r_{c,\ (c+1)\ ,\ (c+2)\ .\ .\ .\ (x-1)} = T$$

Luego á la serie de los $(x-1)$ números de cada una de estas coordinaciones se agrega el núm. x, para completar la distribución entera de los N números $(N-x)$ números que pueden ser distribuídos en cualquier forma entre el mismo número de los restantes inscritos; en su consecuencia, el número M de lances favorables es:

$$T \times A_{(N-x)}$$

y la probabilidad que se busca igual á

$$\frac{M}{A_{(N-1)}}$$

Suponiendo $N=10$, $n=3$, $c=5$, $x=7$, tendremos:

$$r_5 = 6c_5 \ .\ 3c_1 \times A_6 \quad \text{y} \quad r_6 = 6c_6 \times A_6$$

de donde

$$M = 6.3.2.3.4.5.6.2.3. + 2.3.4.5.6.2.3$$

y la probabilidad que buscábamos será $\frac{19}{84}$

Cuanto más pudiéramos añadir acerca el particular (después de todo lo dicho anteriormente), se verá desarrollado en los siguientes capítulos dedicados al estudio de las leyes de mortalidad, de los seguros y de otras instituciones de previsión que tanta trascendencia encierran dentro del organismo social de los presentes tiempos; lo cual constituye el objeto preferente de nuestro trabajo.

III

LEYES DE MORTALIDAD Y DE SUPERVIVENCIA

GENERALIDADES. — Una de las más interesantes aplicaciones del Cálculo de las probabilidades consiste, sin duda alguna, en el estudio de las cuestiones relacionadas con las llamadas tablas de mortalidad y supervivencia.

La duración natural de la vida es la que viene determinada por las condiciones intrínsecas de la organización de cada individuo. Mas si, como ha dicho Bichat, «la vida no es más que la resistencia á la muerte», su duración *media real* deberá ser inferior á su duración natural, puesto que no es posible substraerse, en absoluto, á las distintas causas accidentales de destrucción que rodean al hombre por todas partes.

TABLA DE MORTALIDAD. — Esta tabla, propiamente dicha, consiste en un resumen estadístico en el cual se consignan á cada edad las defunciones que probablemente ocurrirán, en el transcurso de un año, sobre un número dado de individuos.

Por medio de esta tabla se forma fácilmente la que debería llamarse de *supervivencia,* la cual determina sobre un número dado de individuos de cero años cuantos sobrevirán á cada edad.

El tomar nota ó sea la formación de la estadística de los nacimientos y defunciones, ha tenido lugar desde la más remota antigüedad. Así vemos que los romanos nos han dejado los registros que llevaban ya 578 años antes de J. C. Probablemente estos registros sirvieron de base al célebre jurisconsulto Ulpiano para calcular la tabla de mortalidad que dió á luz 170 años después de J. C.

Varias son las tablas formadas (*) en vista de los registros oficiales y particulares siendo, de entre ella, las más conocidas: la de Deparcieux (tabla I) la de Duvillard (tabla II) y la adoptada por veinte Compañías inglesas de seguros. Todas estas tablas difieren entre sí, pues está basado el cálculo de cada una de las mismas en datos de distinta índole, ya que son varias las

(*) La primera tabla de mortalidad verdaderamente tal, fué construída por Halley y publicada en 1693, en vista de los registros de la ciudad de Breslau en la Silesia.

causas que influyen en la mayor ó menor mortalidad que se observa en los distintos países ó localidades.

Entre estas varias causas figuran, en primer término: la *edad*, factor importantísimo y al mismo tiempo difícil de ocultar, pero que no obstante no debe reputarse como único digno de tenerse en cuenta, pues dos personas de igual edad pueden tener una probabilidad de vida diferente, dependiendo principalmente de la salud que ambas disfruten; el *sexo*, pues se ha observado que no es igual la mortalidad para ambos sexos; la *profesión* por la mayor ó menor exposición que ésta pueda acarrear; el *clima* donde habite ó se proponga habitar, pues desde luego se comprende que las indicaciones de una tabla de mortalidad formada para Europa no son aplicables á países del continente africano ó asiático; *el género de vida, hábitos y costumbres* del individuo observado, por ser evidente que un temperamento ganoso de aventuras ó entregado al vicio, al alcoholismo, ó bien sumido en la miseria y por consiguiente mal alimentado, no ofrece las mismas condiciones de vida que un individuo en estado normal, que esté en situación desahogada y que lleve una vida ordenada observando las reglas de higiene, etc.; de importancia es también el tener noticias sobre la probable herencia *fisiológica* que sus padres ó abuelos pudieren haberle transmitido, y en fin, otras varias causas cuya enumeración sería casi interminable.

En cuanto á las causas que no residen en el sujeto mismo ha de tenerse en cuenta la *época* pues tablas que fueron tenidas como muy aproximadas á la realidad en otro tiempo, hoy día no se usan en la práctica, por diferir notablemente sus indicaciones de la realidad. Esta diferencia proviene principalmente de los incesantes progresos de la higiene y de la medicina, que aun cuando no pueden modificar la parte digamos del azar á que está sometida la duración de la vida humana, no obstante pueden ó prolongar la existencia ó evitar en muchas ocasiones la muerte de individuos que en otra época, en las mismas circunstancias, probablemente hubieran sucumbido.

PROBABILIDAD DE VIDA Y MUERTE. — Se entiende por tal la que tiene una persona ó cierto número de individuos, de vivir ó morir en determinado momento, ó período de tiempo.

Por ejemplo: Habiendo observado repetidas veces para una misma localidad ó número de individuos que de 10.000 de 30 años de edad, mueran 80 antes de cumplir los 31, resulta que la probabilidad de muerte para una persona ó tanto de mortalidad á dicha edad, podrá apreciarse en $\frac{80}{10000} = 0'008$ así como la probabilidad de vida en $1 - \frac{80}{10000} = \frac{9920}{10000} = 0'992$

CONSTRUCCIÓN DE UNA TABLA DE MORTALIDAD. — La construcción de las tablas de mortalidad puede hacerse ó bien tomando como base las observaciones hechas sobre un número determinado de individuos escogidos ó bien sobre grupos de población y en ambos casos esta construcción es sumamente complicada, pues el supuesto de que todos los individuos que sirven de base á la tabla tienen las mismas condiciones de vida dista mucho de ser cierto como puede comprenderse fácilmente.

De los dos procedimientos generales de construcción el que puede ofrecer más exactitud será el que tome como base de sus observaciones varias cabezas escogidas, pero ofrece la gran dificultad de su construcción, pues precisa conocer y anotar la fecha del nacimiento de los sometidos á observación y la de defunción cuando ésta ocurra; para ello tampoco es posible escoger los individuos de un modo arbitrario, pues sería materialmente imposible conocer el fallecimiento de cada uno de los escogidos, por estar esparcidos los datos en distintas comarcas ó países. Estos datos para construir tablas por este procedimiento suelen basarse, pues, en la observación de personas cuyo fallecimiento se tenga la posibilidad de conocer, y entre éstas han de citarse las órdenes religiosas, los militares, y principalmente los asegurados en Compañías de seguros por la homogenidad relativa que ofrecen estos últimos en virtud del reconocimiento á que se les somete al ingreso.

Un inconveniente de este procedimiento será el que si se desea construir la tabla con los datos actuales su resultado será siempre tardío por tenerse que aguardar á que se extinga el grupo ó grupos observados y ofrecerá entonces la mortalidad de una época pasada, ocurriendo lo propio si se tomaron los datos de estadísticas anteriores.

La tabla de mortalidad construída sobre el conjunto de la población de una ciudad ó país, no dá los mismos resultados que cuando aquélla se ha formado mediante la observación de un grupo de cabezas ó personas determinadas ó elegidas de una misma edad.

En el primer caso no pueden, como en el segundo, registrarse los hechos ciertos que ocurren en las cabezas que se han escogido, sino que será preciso establecer diversas hipótesis, y de consiguiente adoptar alguno de los cuatro métodos principales que se exponen á continuación, mediante los cuales obtendremos resultados más ó menos aproximados á la realidad.

Método de Halley ó de las defunciones. — Para aplicar este método basta conocer, durante algunos años consecutivos, el número de fallecimientos á cada edad y calcular el término medio.

Para adoptar tal. dato, lleno de inexactitudes, es preciso admitir las hipótesis que en un siglo:

1.ª No ha variado la ley de mortalidad.
2.ª Que no ha habido emigración ni inmigración.
3.ª Que el número de nacimientos anuales ha sido el mismo.

Se ha tratado de corregir, en parte, el error añadiendo á los sobrevivientes de cada edad el correspondiente tanto por 100.

Supongamos que durante un número de años se ha observado que morían por término medio:

100 personas de 0 á 1 años de edad.
190 personas de 1 á 2 años de edad.
100 personas de 2 á 3 años de edad.
....
....
1 persona de 99 á 100 años de edad.

Sea 4.000 la suma de los sumandos 100+190+100+....+1 correspondientes á los fallecimientos medios de las edades comprendidas entre 0 y 100 años, es decir, el total de fallecidos en un siglo.

Con estos datos construiremos la tabla de mortalidad en la que se anotará que de 4.000 personas de cero años de edad, mueren 1.000 el primer año, 190 el segundo año, 100 el tercero, etc.

Halley que imaginó este método, apercibió ya las causas de error apuntadas anteriormente, aun antes de construir la tabla que llevó su nombre, pues en lugar de escoger una ciudad populosa en donde estos errores hubieran sido de consideración, se concretó tan sólo á los datos que le sumistró la villa de Breslau, en Silesia, que consideró como formada de una población poco sometida á variaciones.

Si por ejemplo, se tomó como punto de partida un año en que nacieron 1.000 individuos y en otro año de los siguientes vieron la luz 1.400 el número de sobrevivientes de este año se aumenta en 40 por 100, haciendo lo propio para todas las edades.

Método del censo ó empadronamiento. — Valiéndose del empadronamiento de los vecinos de una localidad, podrán construirse tablas de mortalidad, restando el número de vivos de una edad del correspondiente á la anterior.

En este método no se supone que la ley de mortalidad sea constante, porque todos los fallecimientos se refieren á un mismo año, ó al término medio de algunos años consecutivos; pero si que obliga á admitir el absurdo de que ha sido nula la emigración ó inmigración y que no existe crecimiento en el número de vecinos durante todo el tiempo que abraza la tabla.

Supongamos que de los empadronamientos de cierta población en un año determinado se desprende que hay 1.000 habitantes de á 0 á 1 año de edad, 800 de 1 á 2 años, 700 de 2 á 3 años etcétera, etc.

Según este método ha de admitirse que el año anterior al que se considera hubo 1.000 nacimientos ó sea existían 1.000 niños de 0 á 1 años de edad, que ahora contarían de 1 á 2 años; luego como en el año de la observación sólo hay 800, habrán ocurrido 1.000—800=200 defunciones de esta edad; si en el año anterior se supone existían 800 habitantes de 1 á 2 años de edad, éstos en el actual tendrían de 2 á 3 años, y como sólo existen 700, habrán fallecido 800—700=100 de esta edad.

Se comprende fácilmente lo falso de estos razonamientos, aun cuando se compulsen empadronamientos de distintos años para deducir un término medio.

MÉTODO DE LOS REGISTROS DEL ESTADO CIVIL, LLAMADO TAMBIÉN DE LOS NACIMIENTOS. — El fundamento de este método estriba en anotar los nacimientos en un año determinado, según los datos proporcionados por los registros de nacimientos y luego anotar así mismo el número de fallecidos en los años sucesivos según los datos proporcionados por los registros de defunciones.

Por lo general se toma como punto de partida el término medio del número de nacidos en dos años seguidos, cuyo término medio se supone representa los nacidos al principiar el segundo año de los dos observados.

Si en una ciudad, por ejemplo, durante el año 1899, nacieron 990 niños y en 1900 nacieron 1.010, el término medio sería

$$\frac{990+1010}{2}=1000$$

con lo cual supondremos que en 1.º de Enero de 1900 nacieron 1.000 niños, cuyo número tomaremos como punto de partida y procuraremos para formar la tabla ir siguiendo este grupo de 1.000 niños en sus variaciones por los fallecimientos que ocurran hasta llegar á su total extinción.

Así, en 1901, las estadísticas nos dicen que han fallecido 200 niños de 1 á 2 años, supondremos que éstos 200 pertenecían á nuestro grupo y deduciremos que éste ha quedado reducido á 1.000—200=800 niños y que el tanto de mortalidad es para la edad de 0 á 1 años de

$$\frac{200}{1000}=0'200$$

Si en 1912 nos indica la estadística que han fallecido 100 niños de 2 á 3 años de edad, haciendo análoga suposición á la anterior, anotaremos que el grupo inicial de 1.000 ha quedado reducido á 800—100=700 niños y que el tanto de mortalidad para la edad de 1 á 2 años es de

$$\frac{100}{800}=0'125$$

y así en todos los demás años, hasta llegar á una edad, por ejemplo 100 años, en que no hubiera ningún fallecido de la misma, en cuya época consideraríamos que se ha extinguido totalmente el grupo de 1.000 niños.

Este método presenta análogas causas de error que los anteriores, además de otras que son peculiares del mismo, como es el considerar que los 2000 nacimientos ocurridos en 1899 y 1900 están igualmente repartidos en todos los meses de cada año.

Para corregir en parte los errores apuntados se acostumbra á calcular otros grupos de nacidos teóricamente en 1901, en 1902, en 1903, etc., es decir, en el número de años que se crean necesarios, con los cuales se sigue la misma marcha y cuyos resultados sirven para corregir en lo posible á los primitivamente obtenidos.

MÉTODO DIRECTO. — En este método se combinan los datos del censo ó empadronamiento de población con los del registro de defunciones.

Así es que para una misma edad basta dividir el número de fallecidos durante un período de tiempo por el de los vivos, y el cociente será el tanto de mortalidad.

Si para los 30 años dá, por ejemplo, el padrón 5.000 vivientes y el registro presenta 200 fallecimientos durante un año, el tanto será $\frac{200}{5000} = 0'04$

Para disminuir el error en las edades que figuran en los padrones, con frecuencia inexactas, se aconseja, atendiendo á que unas serán mayores y otras menores que las verdaderas, que los cálculos se efectúen para media docena anterior y posterior, por ejemplo, para todos los de 25 á 35 años y obtendremos, con mucha mayor aproximación, el tanto correspondiente á los 30 años y así análogamente para los demás.

NOTICIA SOBRE DISTINTAS TABLAS DE MORTALIDAD. — Expuestos ya los diferentes procedimientos y métodos usados en la construcción de las tablas de mortalidad, veamos las más principales, aun cuando alguna de ellas hayan caído ya en desuso.

TABLA DE MORTALIDAD DE .DEPARCIEUX. — Este autor construyó dos tablas, una para la generalidad de la población y otra de especial para los religiosos, basadas en los datos de cerca de 10.000 individuos, que publicó en 1746, pero que luego han sido corregidas y completadas, si bien continúan usándose con el mismo nombre.

La primera de las citadas tablas, tal como hoy se presenta, (*) está formada bajo el supuesto de que á cero años hay 1.286 sobrevivientes, ó sea que se verifica la observación respecto del citado número de personas que nacieron en un mismo día. Mas como en la práctica sería imposible verificar aquella observación respecto de determinados individuos, se halla la relación que existe entre el número de personas dado y el de las que anualmente fallecen á cada edad.

Así, pues, frente de un año hay escrito el número 1.071 sobrevivientes, de lo cual se desprende que, antes de llegar á 1 año de edad, han fallecido 215 de entre 1.286, pues 1.286—1.071=215. Enfrente de dos años vemos el número 1.006, lo cual indica que, después del primer año del nacimiento y antes de cumplir dos años fallecen 280, etc.

TABLA DE MORTALIDAD DE DUVILLARD. — Fué publicada en

(*) Esta tabla es la 1.ª que continuamos en el apéndice.

1806 en la obra del mismo autor titulada «Análisis de la influencia de la viruela sobre la mortalidad», pero sin explicar los medios de que se valió para su cálculo.

Esta tabla se ha usado en Francia durante mucho tiempo, pero en la época actual acusa una mortalidad demasiado rápida en las edades correspondientes á la juventud y á la edad madura y demasiado lenta en la vejez.

Por esta causa ni la de Deparcieux, ni la de Duvillard se usan en nuestros días, y si tan solo se estudian por haber sido las primeras cuyo uso fué casi general.

Tabla de las veinte Compañías inglesas. — En el año 1843 se había publicado ya una tabla de mortalidad basada en los datos de las 17 principales Compañías inglesas de seguros.

El *Institute of Actuaries*, de Londres, tomó la iniciativa en 1862 de reunir los datos y documentos de las 20 compañías inglesas más importantes y formar con estos elementos una nueva tabla más aproximada á la realidad.

El resultado de estos trabajos se publicaron en 1869 en una obra itulada «*Mortality experience of life assurance Companies*», en la que se comprendían cuatro tablas; la llamada H^m (*Healthy lives, male*) que anotaba la mortalidad deducida para los hombres observados; la denominada H^F (*Healthy lives female*) para el sexo femenino; la señalada con las iniciales H^{MF} que era la combinación de las dos anteriores y por último la conocida por D^{MF}, destinada á aplicarse á aquellos asegurados cuyo estado de salud no es absolutamente satisfactorio en el momento de firmarse el contrato.

Tablas francesas llamadas AF y RF. — Siguiendo el ejemplo dado por las Compañías inglesas, las Sociedades francesas de seguros concibieron la idea de construir una tabla basada en sus observaciones, y al efecto se reunieron en 1876 las seis Compañías siguientes: *le Phénix, la C.ie d'Assurances générales, la Nationale, l'Union, la Paternelle* y *l'Urbaine.*

En 1895 publicaron como fruto de su trabajo una obra titulada «*Tables de mortalité du Comité des Compagnies d'assurances á prime fixe sur la vie*», en la cual constaban dos tablas; la llamada A F (asegurados franceses) y la RF (rentistas franceses), que se usan por un gran número de Compañías francesas, españolas y de otros países.

Las tablas de mortalidad y de supervivencia pueden aplicarse á la resolución de un gran número de cuestiones generales que se desprenden de su misma naturaleza, y las cuales estudiamos á continuación.

Cantidad de existencia. — La cantidad de existencia para un grupo de individuos de una misma edad, es igual á la suma total de los años que cada uno de ellos vivirá.

Para determinar la cantidad de existencia de un grupo de individuos de una misma edad, m años, por ejemplo, comprendido en la tabla de Deparcieux, se halla la suma de los sobrevivientes de cada edad, á partir de los $m+1$ años hasta el límite de la tabla, y se le agrega la mitad del número de sobrevivientes á los m años.

En efecto, si para la edad m nos muestra la tabla que hay v_m vivientes y al año siguiente nos indica que probablemente sólo habrá v_{m+1}, es evidente que el número de fallecidos durante el año habrá sido de $v_m - v_{m+1}$, los cuales se supone que por término medio sólo han vivido medio año y por consiguiente la cantidad de existencia que representan es de $\frac{1}{2}(v_m - v_{m+1})$

Si al terminar el segundo año el número de sobrevivientes es de v_{m+2} se entiende que durante el mismo han fallecido $v_{m+1} - v_{m+2}$ suponiéndose asimismo que por término medio sólo han vivido medio año á partir de $m+1$. Pero como los $v_{m+1} - v_{m+2}$ fallecidos vivían ya el año anterior, aquí la cantidad de existencia será igual á tantas veces un año y medio como fallecidos ha habido, ó sea

$$1\frac{1}{2}(v_{m+1} - v_{m+2}) = \frac{3}{2}(v_{m+1} - v_{m+2})$$

Para el tercer año con análogas suposiciones encontraríamos que la cantidad de existencia sería

$$2\frac{1}{2}(v_{m+2} - v_{m+3}) = \frac{5}{2}(v_{m+2} - v_{m+3})$$

Para el cuarto año $m+3$ que podremos suponer límite de la tabla la cantidad de existencia será

$$3\frac{1}{2}(v_{m+3}) = \frac{7}{2}(v_{m+3})$$

Ahora bien; la cantidad de existencia que corresponderá á todos los grupos conjuntamente será pues, la suma de las expresiones correspondientes á cada uno de ellos y por consiguiente será:

$$\frac{1}{2}(v_m - v_{m+1}) + \frac{3}{2}(v_{m+1} - v_{m+2}) + \frac{5}{2}(v_{m+2} - v_{m+3}) + \frac{7}{2}(v_{m+3})$$

y verificando las multiplicaciones indicadas por los parentesis, igual á

$$\frac{1}{2}v_m - \frac{1}{2}v_{m+1} + \frac{3}{2}v_{m+1} - \frac{3}{2}v_{m+2} + \frac{5}{2}v_{m+2} - \frac{5}{2}v_{m+3} + \frac{7}{2}v_{m+3}$$

y observando que las sustracciones $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}$; $\frac{5}{2} - \frac{3}{2}$; y $\frac{7}{2} - \frac{5}{2}$ dan todas ellas un resto $\frac{2}{2}$ igual á la unidad, tendremos que la expresión anterior se convertirá en

$$\frac{1}{2}v_m + v_{m+1} + v_{m+2} + v_{m+3}$$

que patentiza la regla dada.

Ejemplo: ¿Cuál será la cantidad de existencia para el grupo de 48 personas que viven á los 85 años?

Según la regla anterior se tendrá:

	años	
Suma de los sobrevivientes á cada edad, á partir de 85+1=86 años hasta el límite de la tabla	130	(*)
Mitad de sobrevivientes á los 85 años ó sea $\frac{48}{2}$	24	»
Cantidad de existencia	154	años

La cantidad de existencia sirve de base, conforme vamos á ver para hallar la duración media de la vida de cada individuo á una edad dada. (**)

VIDA MEDIA Ó DURACIÓN MEDIA DE LA VIDA. — La vida media para el grupo de individuos de una misma edad, consiste en el cociente que resulta de dividir la cantidad de existencia relativa al citado grupo por el número de individuos de que el mismo se compone.

Ejemplo: Averiguar la duración media de la vida para el grupo de 48 personas de 85 años.

La cantidad de existencia para el grupo á que nos referimos, según se obtuvo en el anterior ejemplo, es de 154, y como aquél se compone de 48 personas, la vida media de cada una de ellas será:

$$\frac{154}{48}=3 \text{ años, 2 meses, aproximadamente.}$$

que es el número que viene consignado en la columna de vida media de la tabla.

VIDA PROBABLE Ó DURACIÓN PROBABLE DE LA VIDA. — Se entiende por vida probable de una persona, el número de años que puede vivir según las leyes de la probabilidad.

Para averiguar la duración de la vida de un individuo,

(*) Nos ahorramos el tener que calcular esta cantidad, toda vez que se encuentra en la correspondiente columna de la tabla al frente de los 86 años.

(**) Una vez hallada la cantidad de existencia, que podemos designar por *C*, para un grupo *V* de individuos que se halle exactamente contenido en la tabla, será fácil averiguar la cantidad *c* de existencia que corresponde á otro grupo cualquiera *v* que siendo diferente de V_a se encuentre comprendido entre los grupos de sobrevivientes V_{a-1} y V_{a+1} que á su vez comprenden en la tabla el referido número V_a. El número *c* se hallará evidentemente por medio de la siguiente proporción:

$$V_a : C :: v : c \text{ ; de donde } c = \frac{C + v}{V_a}$$

Así la cantidad de existencia para un grupo de 52 personas de 85 años, será, según esta fórmula:

$$C = \frac{154 \times 52}{48} = 166'83 \text{ ó sean 167 años aproximadamente.}$$

debemos conocer ante todo la edad que probablemente alcanzará; en efecto, si suponemos que una persona que tiene n años ha de alcanzar hasta la edad m, es evidente que el número de años que aún vivirá, será $m—n$. Así, pues, debe hallarse, en primer lugar, la edad que alcanzará un individuo de n años para lo cual se divide por 2 el número de sobrevivientes á los citados años, y la edad que se busca vendrá representada por los años que se encuentren escritos en la tabla al lado de un número de sobrevivientes igual al cociente obtenido.

Si el referido cociente no está contenido con exactitud en la columna de sobrevivientes, se restará de aquél el número consecutivo menor que exista en la tabla, á cuyo residuo llamaremos d; asimismo se buscará la diferencia D que haya entre el citado número menor y el inmediato superior de la tabla, pasando luego á resolver la siguiente proporción:

$$D : 12 \text{ meses} :: d : x \text{ meses}$$

$$x = \frac{12 \times d}{D}$$

El resultado son los meses que deben deducirse del número de años que corresponden al menor número de sobrevivientes de la tabla á que nos hemos referido.

Por último, pasaremos á determinar el número de años que puede todavía esperar vivir una persona, restando, conforme dijimos, de la edad que alcanzará el número de los años que haya cumplido.

Ejemplo: ¿Cuántos años puede esperar vivir un individuo que ha cumplido la edad de 23?

Según Deparcieux, los sobrevivientes á 23 años son 790, cuyo número dividido por 2, dá 395, que se halla exactamente contenido en la correspondiente columna de la tabla al frente de los 65 años, y, por lo tanto, tendremos:

Edad que probablemente alcanzará un individuo de 23 años..	65 años
A deducir el número de años que ha cumplido	23 »
Duración probable de la vida para el referido sujeto	42 años

Cuya cantidad es precisamente la estampada en la columna de vida probable de la tabla.

Otro ejemplo: Determínese la vida probable de una persona que tiene 24 años.

Los vivientes á 24 años son 782, y como su mitad, ó sea 391, no se encuentra en la tabla, buscaremos la diferencia que hay entre este número y 380, que es el menor de la tabla que más se le aproxima, 391—380=11; asimismo hallaremos la que existe entre el citado número y su inmediato superior 395, ó sea 395 -- 380 =15.

Con los anteriores datos pasaremos á plantear la siguiente proporción:

$$15 : 12 :: 11 : x \qquad x = \frac{11 \times 12}{15} = 8'8 \text{ meses,}$$

y toda vez que el referido número 380 corresponde á 66 años, resulta:

Edad que probablemente alcanzará una persona de 24 años........ 66 años — 8'8 meses..	65 años 3 meses
A deducir el número de años que ha cumplido	24 »
Número de años que aún puede esperar vivir la citada persona, ó sea vida probable de la misma	41 años 3 meses

que es la cantidad que se consigna en la correspondiente columna de la tabla de Deparcieux.

Comparación entre distintas tablas. — Averiguar, por ejemplo, comparando los sobrevivientes de 40 años, que tabla dá una mortalidad más rápida, si la de Deparcieux ó la de Duvillard.

La primera arranca de 1.286 nacimientos y la segunda de 1.000.000, resultando á los 40 años 657 y 369.404 sobrevivientes respectivamente, y como en la segunda corresponderían á 1.286, tenemos:

$$x = \frac{1286 \times 369404}{1000000} = 475 < 657$$

De donde resulta que la de Duvillard dá una mortalidad mucho más alta.

Cuestiones más frecuentes relacionadas con la vida probable. — Varios son los problemas á que pueden dar lugar las citadas cuestiones, y, como práctica de los mismos, presentamos á continuación los siguientes:

1.º De un grupo de 600 personas de 30 años, ¿cuántas probablemente, alcanzarán la edad de 60 años?

Según Deparcieux, de los 734 individuos que llegan á 30 años, sólo 463 alcanzan los 60, y, de consiguiente, el problema se resolverá por medio de esta proporción:

$$734 : 463 :: 600 : x$$

$$x = \frac{600 \times 463}{734} = 378 \text{ personas}$$

2.º De 600 personas de 40 años, ¿qué edad tendrán los sobrevivientes cuando queden reducidos á 300?

A 40 años sólo viven, según Deparcieux, 657 individuos, y, por consiguiente, se tendrá:

$$600 : 300 :: 657 : x \qquad x = \frac{657 \times 300}{600} = 328$$

Cuyo número está comprendido entre 310 y 329 de la tabla, que corresponden respectivamente á 70 y 69 años, y, en su consecuencia, diremos que la edad pedida es de 69 á 70 años.

3.º La probabilidad que tiene una persona de m años para alcanzar otra edad n, viene representada por el cociente que resulta de dividir el número de sobrevivientes á la edad n por el de sobrevivientes á los m años.

Si, por ejemplo, tratamos de hallar la probabilidad que tiene una persona de 20 años para alcanzar los 40, tendremos:

Número de sobrevivientes á los 40 años, según Deparcieux. 657
Número de sobrevivientes á los 20 años, según Deparcieux. 814

Ahora bien, el número de lances ó acasos favorables para que el individuo de 20 años viva hasta los 40, es 657, y el número total de lances ó acasos posibles es 814, porque este número de sobrevivientes á los 20 años representa la suma de las personas que mueren en el intervalo de los 20 á 40 años y de las que sobreviven á dichos 40 años. Luego la probabilidad simple de que una persona de 20 años alcance los 40, será:

$$\frac{657}{814}$$

De análoga manera encontraríamos que la probabilidad de que una persona de 70 años alcance los 80, es

$$\frac{118}{310}$$

Por otra parte, si comparamos los resultados $\frac{657}{814}$ y $\frac{118}{310}$ obtenidos anteriormente, observaremos que el primero es mayor que el segundo, lo cual indica que es más probable que un individuo de 20 años llegue á los 40 años que uno de 70 alcance los 80.

Probabilidad de que dos personas de distintas edades vivan ó hayan muerto al transcurrir cierto número de años. — Por ejemplo: tratándose de un matrimonio en el que el marido tiene 30 años y la esposa 25, se desea saber:

1.º Cual es la probabilidad de que ambos vivan dentro de diez años.

El hecho de que ambas personas existan durante los diez años siguientes, depende de dos acontecimientos distintos, esto es, de que viva el marido y de que viva la esposa, y, por consiguiente, es una probabilidad compuesta, la cual se obtiene, conforme dijimos, verificando el producto de las probabilidades simples. Así, pues, se buscará, en primer lugar, la probabilidad de que cada una de las dos personas viva dentro de diez años, ó sea de que el marido alcance los $30+10=40$ años, y la esposa los $25+10=35$ años. En su consecuencia tendremos:

	Edad	Edad que desean alcanzar	Sobrevivientes según tabla de Deparcieux		
Marido	30 años	40 años	á los 30 años 734 Id. » 40 » 657	$\frac{657}{734}$	Probabilidad de que alcance los 40 años.
Esposa	25 años	35 años	Id. » 25 » 774 Id. » 35 » 694	$\frac{694}{774}$	Probabilidad de que alcance los 35 años.

y por lo tanto la probabilidad de que ambos vivan al cabo de diez años, será:

$$\frac{657}{734}\times\frac{694}{774}=\frac{657\times694}{734\times774}=\frac{455958}{568116}=\frac{227979}{284058}, \text{ ó sea aproximadamente } \frac{23}{28}$$

2.º Cuál es la probabilidad de que ambos mueran dentro de diez años.

Según hemos visto en el caso anterior, las probabilidades simples de vida á los diez años, son $\frac{657}{734}$ para el marido, y $\frac{694}{774}$ para la esposa. Por lo tanto es evidente que si á cada una de ellas agregamos las probabilidades de muerte que, no siéndonos conocidas, representaremos por x é y respectivamente, se obtendrá una suma igual á la unidad, ya que, según vimos, la suma de todas las probabilidades dá la certeza. Sentados estos preliminares, resolveremos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{657}{734}+x=1; \text{ de donde } x=1-\frac{657}{734}=\frac{734}{734}-\frac{657}{734}=\frac{77}{734}$$ probabilidad de que muera al marido á los 10 años.

$$\frac{694}{774}+y=1; \text{ de donde } y=1-\frac{694}{774}=\frac{774}{774}-\frac{694}{774}=\frac{80}{774}$$ probabilidad de que muera la esposa á los 10 años.

y, por consiguiente, la probabilidad de que ambos mueran dentro de los diez años, será:

$$\frac{77}{734}\times\frac{80}{774}=\frac{6160}{568116}=\frac{3080}{284058}=\frac{1540}{142029}$$

3.º Cuál es la probabilidad de que dentro de los diez años el marido viva y la esposa muera.

Siguiendo la ley general de que la probabilidad compuesta es el producto de las simples, se tendrá:

Probabilidad de vida del marido $\frac{657}{734}$

Probabilidad de muerte de la esposa $\frac{80}{774}$

Luego la probabilidad pedida será:

$$\frac{657}{734} \times \frac{80}{774} = \frac{52560}{568116} = \frac{26280}{284058}$$

4.º Cuál es la probabilidad de que dentro de los diez años muera el marido y viva la esposa.

Procediendo de análoga manera al caso anterior, tendremos:

Probabilidad de vida de la mujer $\frac{694}{774}$

Probabilidad de muerte del marido $\frac{77}{734}$

y, por lo tanto, la probabilidad pedida será:

$$\frac{694}{774} \times \frac{77}{734} = \frac{53768}{568116} = \frac{26884}{284058}$$

Por último, si analizamos los cuatro distintos casos del problema anterior, observaremos que el mayor resultado obtenido es $\frac{227979}{284058}$ ó sea el correspondiente al primer caso, de lo cual puede deducirse que la probabilidad que representa mayor éxito es la relativa á que el marido y su esposa vivan ambos al cabo de los diez años.

Debemos advertir, una vez más, que todos los resultados obtenidos anteriormente, tan sólo pueden tomarse como guía para un número dado de personas, pero no como á dato fijo para determinados individuos, pues las condiciones de existencia de cada persona están sujetas á infinidad de causas que únicamente son conocidas de Dios.

Determinar el número de habitantes. — Cuántos habitantes poblarán una ciudad en la que, durante un año, han nacido 10.000 niños?

Mediante la tabla de Deparcieux, resultará, tomando la mitad de los 1.286 nacimientos, y agregándole la suma de todos los restantes números de sobrevivientes

$$643 + 50197 = 50840$$

y por lo tanto, si á 1.286 nacimientos corresponden 50.840, á 10.000 de los primeros corresponderá un número de habitantes

$$\frac{50840 \times 10000}{1286} = 395334$$

2.º En cierta población y en el decurso de un año han nacido 100 niños de ambos sexos: ¿cuántos probablemente llegarán á la edad de 20 años?

Según Deparcieux los vivientes al nacer, ó sea á cero años, son 1.286, de los cuales sobreviven 814 á los 20 años, luego suponiendo que la mortalidad de los citados 100 nacidos sea proporcional á la que ofrece la referida tabla, se tendrá:

Nacidos		Sobrevivientes á 20 años		Nacidos		Sobrevivientes á 20 años
1286	:	814	::	100	:	x

de donde

$$x = \frac{814 \times 100}{1286} = 63'2970 \text{ ó sean } 63 \text{ aproximadamente.}$$

IV

SEGUROS

Generalidades. — Entendemos por *seguro* en general, el contrato bilateral aleatorio en que una de las partes se obliga, mediante cierto precio, á responder á la otra del daño ó perjuicio que pueden causarle ciertos casos fortuítos.

Se llama *asegurador* el que se obliga á responder de los riesgos; *asegurado,* aquel á quien se responde indemnizarle de los daños ó perjuicios que experimente; *prima,* el precio que exige el asegurador en recompensa de los riesgos que toma á su cargo, y *póliza* la escritura ó documento en el cual se consigna el contrato.

Distintas clases de seguros. — Los seguros pueden recaer sobre las personas ó bien sobre las cosas.

Se clasifican también en seguros á *prima fija y mutuos.* En el seguro á prima fija el asegurado satisface una cuota única ó constante, como precio del seguro, la cual se estipula, generalmente, á razón de un tanto por ciento. En el seguro mutuo, el asegurado es, á la vez, asegurador, y, por lo tanto, viene obligado á satisfacer mayor ó menor cantidad según el número de daños ó perjuicios que deben indemnizarse.

Hay varias especies de seguro, según la naturaleza de las cosas aseguradas y la clase de riesgos por los cuales se aseguran; así pues, el actual Código de Comercio español trata del seguro sobre la vida, del seguro contra incendios, del seguro de transporte terrestre y de los seguros marítimos.

En rigor, puede haber tantas clases de seguros como riesgos á asumir, y cada día van surgiendo sociedades destinadas á indemnizar nuevos perjuicios: accidentes del trabajo, rotura de cristales, pérdida de cosechas, muerte del ganado, etc.

Gracias al contrato de seguro, las operaciones mercantiles han adquirido verdadera fijeza, perdiendo mucho del carácter aleatorio á que antes estaban sujetas por completo.

Seguros sobre las personas

Generalidades. — Las probabilidades de la duración de la vida humana combinadas con el acrecentamiento de los capitales colocados á interés compuesto, han dado lugar á la importantísima rama de los Seguros sobre la vida, ó sean seguros sobre las personas. (*)

En su consecuencia éstos se distinguen notablemente de todas las demás clases de seguro tanto por el objeto asegurado como por las causas que lo motivan.

Sus combinaciones. — Las combinaciones á que se prestan los seguros sobre la vida son tan variadas como distintas las situaciones en que puede encontrarse el hombre. Para dar una ligera idea de ellos, los dividiremos en tres grupos generales, á saber: *Seguros para el caso de vida,* ó sean *rentas vitalicias* (**); *Seguros para el caso de muerte,* ó sean *Seguros sobre la vida propiamente dichos,* y *Seguros mixtos.*

Seguros caso de vida

Renta vitalicia. — Muchas son las formas y combinaciones á que se presta este seguro. La renta vitalicia puede constituirse sobre una ó varias vidas ó cabezas, y puede ser *inmediata, diferida* y *temporal,* según que se abone al año de firmar el contrato de seguro, ó después de una fecha convenida, pero en ambos casos mientras viva el asegurado, ó que sólo se abonen durante un cierto tiempo.

(*) De tal modo es cierto lo expuesto, que varios problemas de seguros sobre la vida pueden resolverse sin necesidad del empleo de las fórmulas especiales que se deducen del estudio de aquellos.

Ejemplo: Una persona sin familia y que tiene 45 años de edad, cede á una compañía de seguros una casa y una finca rústica de su propiedad, valorada la primera en 20000 $ y la segunda en 15000 $, con el objeto de que la indicada compañía le entregue durante su vida, la mayor renta posible atendiendo á la probabilidad de existencia y á la tasa del 5 por 100 de interés.

Para averiguar el importe de la renta, una vez encontrado en la tabla de Duvillard que el mencionado sujeto tiene veinte años de vida probable, bastará calcular la anualidad que debe satisfacerse para amortizar en 20 años, un capital de 35000 $ con sus intereses compuestos á razón del 5 por 100.

Mediante la tabla de amortización hallamos que para extinguir en 20 años el capital 100 y sus intereses compuestos del 5 por 100, se ha de satisfacer la anualidad de 8'024, y de consiguiente formularemos la siguiente proporción:

$$100 : 35000 :: 8'024 : x = 2808'40 \ \$$$

renta que cobrará el asegurado mientras viva, la cual asciende á más del 8 por 100 limpio anual, del capital que ha traspasado á la Compañía.

(**) Las rentas en general, se clasifican en *ciertas* y *contingentes.* Serán ciertas cuando todos sus términos son fijos ó conocidos (º), y contingentes cuando dependen de alguna condición ó circunstancia eventual, como por ejemplo de la vida de una ó más personas; en cual caso reciben el nombre especial de *rentas vitalicias.*

(º) Véase el estudio de éstas, en el «Curso teórico-práctico de Cálculo mercantil» del señor Torrents y Monner.

El capital necesario para obtener una renta vitalicia inmediata se paga por entero en el momento de firmar el contrato, y entonces hay *prima única*; pero las rentas vitalicias diferidas se pueden obtener pagando de una vez el capital ó por anualidades adelantadas hasta que se comienza á percibir la renta, y entonces hay *prima anual.*

Renta vitalicia inmediata sobre una cabeza

TEORIA. — Se llama renta vitalicia ó *violario* á las anualidades que percibe una persona mientras viva, en equivalencia de un capital que ha impuesto.

El contrato de *Renta vitalicia inmediata* es, conforme hemos dicho, aquel en virtud del cual la compañía aseguradora se obliga á pagar la pensión convenida desde el día en que se ha firmado.

La fórmula general para la renta vitalicia inmediata depende de la resolución del siguiente problema:

Hallar el capital C que una persona de n años deberá entregar á un banquero, al objeto de que éste satisfaga la pensión ó renta vitalicia a mientras viva aquella, para lo cual debe fijarse también el interés del dinero y la probabilidad de vida del asegurado.

Devengando el capital C interés compuesto á razón de r por 1 al año, tendremos:

Para que el banquero satisfaciera al fin del primer año la pensión $1+r$ debería únicamente recibir 1 al principio del mismo año; mas como, según el problema propuesto, la pensión que ha de pagar es a, resulta:

$$1 + r : 1 :: a : x \qquad x = \frac{a}{1 + r}$$

Para satisfacer la pensión $(1+r)^2$ al cabo de dos años (*), tan sólo debería el banquero cobrar 1 al principio del primer año, y, de consiguiente, para pagar a en idénticas condiciones debe recibir:

$$(1 + r)^2 : 1 :: a : x \qquad x = \frac{a}{(1 + r)^2}$$

Y así sucesivamente hallaríamos las cantidades $\frac{a}{(1 + r)^3}$ $\frac{a}{(1 + r)^4}$ etc., que debería recibir el banquero para pagar al rentista las pensiones relativas al fin del 3.º, 4.º, etc. años.

Mas como las rentas vitalicias se extinguen con la muerte

(*) Con arreglo á la fórmula del interés compuesto, 1 moneda prestada á r por uno anualmente se convierte al fin del segundo año en $(1+r)^2$.

del rentista, es de ahí que deben intervenir en su cálculo las probabilidades de que aquél alcance los años sucesivos á n.

Así, pues, representando por V_n, V_{n+1}, V_{n+2}, V_{n+k} el número de sobrevivientes á la edad n, $n+1$, $n+2$ . . . $n+k$. las probabilidades de que el rentista llegue á $n+1$. $n+2$ . . . $n+k$ años, serán. respectivamente,

$$\frac{V_{n+1}}{V_n}, \frac{V_{n+2}}{V_n} \ldots \ldots \frac{V_{n+k}}{V_n}$$

De lo dicho se desprende que estas probabilidades han de afectar á los valores $\frac{a}{1+r}$; $\frac{a}{(1+r)^2}$; $\frac{a}{(1+r)^3}$; etc., disminuyéndolos, lo cual es muy justo, en virtud de la posibilidad de que el rentista muera y deje, por lo tanto, de percibir todas ó parte de las pensiones que se habían calculado.

De modo que la cantidad que debe recibir el banquero para satisfacer la pensión a al fin del primer año, vendrá representada por el producto que resulta de multiplicar el valor $\frac{a}{1+r}$, por la probabilidad de que el rentista alcance los $n+1$ años, ó sea:

$$\frac{a}{1+r} \times \frac{V_{n+1}}{V_n}$$

De igual manera, la cantidad que deberá cobrar el banquero con destino á la segunda pensión será:

$$\frac{a}{(1+r)^2} \times \frac{V_{n+2}}{V_n}$$

y así sucesivamente.

Observemos ahora que la cantidad total que ha de recibir el banquero se ha de componer de tantas cantidades parciales cuantos sean los k años que medien desde n edad del rentista, hasta el límite de la tabla.

Por lo tanto, la cantidad que deberá imponer el rentista para percibir la pensión a al finalizar el último de los $n+k$ años, límite de la tabla, será:

$$\frac{a}{(1+r)^k} \times \frac{V_{n+k}}{V_n}$$

Ahora bien, la suma de todas las esperanzas matemáticas, ó sean las partidas parciales que debería cobrar el banquero al principiar el primer año, las haremos iguales á C, y, de consiguiente,

$$C = \frac{a}{1+r} \times \frac{V_{n+1}}{V_n} + \frac{a}{(1+r)^2} \times \frac{V_{n+2}}{V_n} + \frac{a}{(1+r)^3} \times \frac{V_{n+3}}{V_n} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{a}{(1+r)^k} \times \frac{V_{n\ \ k}}{V_n}$$

que constituye la esperanza total, ó sea el valor actual de la renta vitalicia.

Separando el factor común $\frac{a}{V_n}$, tendremos:

$$C = \frac{a}{V_n}\left(\frac{V_{n+1}}{1+r} + \frac{V_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{V_{n+3}}{(1+r)^3} + \cdots\cdots + \frac{V_{n+k}}{(1+r)^k}\right)$$

Si llamamos S_n á la suma de los términos del anterior paréntesis, resulta:

$$C = \frac{a}{V_n} \times S_n = a \times \frac{S_n}{V_n}$$

Y representando por A_n el cociente $\frac{S_n}{V_n}$, se simplificará notablemente esta fórmula, pues quedará reducida á

$$C = a \times A_n$$

De la última fórmula general se deducen fácilmente las siguientes:

$$a = \frac{C}{A_n} \qquad\qquad A_n = \frac{C}{a}$$

Pasando ahora á determinar el valor de $\frac{S_n}{V_n}$ que hemos representado por A_n, tenemos que V_n, número de sobrevivientes á la edad *n*, es conocido, toda vez que se encuentra en la tabla de mortalidad; pero no sucede lo propio con S_n, que debe hallarse efectuando la suma de

$$\frac{V_{n+1}}{1+r} + \frac{V_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{V_{n+3}}{(1+r)^3} + \cdots\cdots + \frac{V_{n+k}}{(1+r)^k}$$

operación sumamente larga y engorrosa.

Al objeto de obtener con mayor facilidad el valor de S_n compararemos la igualdad

$$S_n = \frac{V_{n+1}}{1+r} + \frac{V_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{V_{n+3}}{(1+r)^3} + \cdots\cdots + \frac{V_{n+k}}{(1+r)^k}$$

con la que resultaría, suponiendo que el rentista tiene un año más de edad, ó sea $n+1$

$$S_{n+1} = \frac{V_{n+2}}{1+r} + \frac{V_{n+3}}{(1+r)^2} + \frac{V_{n+4}}{(1+r)^3} + \cdots\cdots + \frac{V_{n+k}}{(1+r)^{k-1}}$$

Si dividimos esta igualdad por $1+r$ y la restamos de la primera, resulta:

$$S_n - \frac{S_{n+1}}{1+r} = \frac{V_{n+1}}{1+r}; \text{ de donde } S_n = \frac{V_{n+1}}{1+r} + \frac{S_{n+1}}{1+r} =$$

$$= \frac{S_{n+1} + V_{n+1}}{1+r}$$

Por medio de esta fórmula podemos hallar los distintos valores que representa S_n, y dividiéndolos por los correspondientes á V_n, obtendremos todos los de A_n.

Tabla de los valores de A_n. — Con el propósito de facilitar aún más la resolución de los problemas á que dan lugar las rentas vitalicias se han construído distintas tablas para los valores de A_n, ó sea *la cantidad necesaria para producir una unidad monetaria de renta;* á cuyo fin insertamos en el Apéndice, con el número III, la correspondiente al interés del 4 por 100 anual (*) tomando por base la mortalidad, según Deparcieux y Duvillard (**).

Para que no quede duda alguna respecto á la formación de dicha tabla y para confirmar, al mismo tiempo, la teoría expuesta anteriormente, buscaremos los siguientes valores de A_n.

1.º Hallar los valores que á 94 y á 93 años corresponden á A_n, según la mortalidad de Deparcieux.

Si el individuo tiene 94 años, la igualdad

$$S_n = \frac{V_{n+1}}{1+r} + \frac{V_{z+u}}{(1+r)^2} + \ldots\ldots + \frac{V_{n+k}}{(1+r)^k}$$

se convertirá, teniendo en cuenta que V_{95}, (***) representa el límite de la tabla de mortalidad y que, por lo tanto, es igual á cero, en

$$S_{94} = \frac{V_{95}}{1+r} = \frac{0}{1+r} = 0$$

y como $A_n = \frac{S_n}{V_n}$, resulta $A_{94} = \frac{S_{94}}{V_{94}} = \frac{0}{1} = 0$, que es lo que figura en la tabla de los valores de A_n.

Sabiendo ahora que $S_{94} = 0$, podemos, por medio de la fórmula $S_n = \frac{S_{n+1} + V_{n+1}}{1+r}$, hallar fácilmente S_{93}, y de consiguiente resultará:

(*) El tipo del 4 por 100 es el más comunmente usado por las Compañías de Seguros sobre la vida.

(**) Debemos manifestar que varias Compañías de seguros sobre la vida emplean la tabla de Duvillard, por arrojar una mortalidad rápida, cuando calculan la suma que han de pagar al asegurado; pero se sirven de la de Deparcieux, ó de otras que consignan una mortalidad más lenta, cuando contratan la renta qne han de satisfacer durante la vida del asegurado. Además, las referidas Compañías forman ó modifican las anteriores tablas con arreglo á las circunstancias del país ó localidad en que operan.

(***) Sustituyendo el valor del subíndice *n* en V_{n+1}; resulta $V_{94+1} = V_{95}$.

$$S_{93} = \frac{S_{94} + V_{94}}{1 + r} = \frac{0 + 1}{1 + 0'04} = \frac{1}{1'04} = 0'9615$$

luego $A_{93} = \frac{S_{93}}{V_{93}} = \frac{0'9615}{2} = 0'4808$

que es precisamente el valor de A_{93} que se consigna en la tabla tomando por base la mortalidad de Deparcieux, y fijando el interés á razón del 4 por 100.

Siguiendo el mismo procedimiento, determinaríamos los valores de A_{92}, A_{91}, etc.

2.º Calcular los valores que á 107, 108 y 109 años corresponden á A_n, según la mortalidad de Duvillard.

Si el individuo tiene 109 años, hallaremos de una manera análoga al problema anterior (*), que

$$S_{109} = \frac{V_{110}}{1 + r} = \frac{0}{1'04} = 0$$

y, de consiguiente,

$$S_{108} = \frac{S_{109} + V_{109}}{1 + r} = \frac{0 + 1}{1'04} = 0'9615$$

$$S_{107} = \frac{S_{108} + V_{108}}{1 + r} = \frac{0'9615 + 2}{1'04} = 2'84759$$

por lo tanto

$$A_{109} = \frac{S_{109}}{V_{109}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$A_{108} = \frac{S_{108}}{V_{108}} = \frac{0'9615}{2} = 0'4808$$

$$A_{107} = \frac{S_{107}}{V_{107}} = \frac{2'84759}{4} = 0'7119$$

Siendo precisamente éstos los valores de A_{109}, A_{108} y A_{107} que se consignan en la tabla tomando por base la mortalidad de Duvillard, y la tasa á razón del 4 por 100 anual.

EJEMPLOS PRÁCTICOS NUMÉRICOS DE RENTA VITALICIA INMEDIATA. — 1.º Qué cantidad deberá imponer una persona de 28 años, al objeto de hacerse una renta vitalicia inmediata de 1.000 duros anuales?

Para resolver este ejemplo, debemos valernos de la fórmula $C = a \times A_n$. Sustituyendo $a = 1000$ $ y $A_{28} = 17'0659$, según Deparcieux (Tabla III) resultará:

$$C = 17'0659 \times 1000 = 17065'90 \text{ \$}$$

(*) El límite de la tabla de mortalidad, según Duvillard, es 110 años.

2.º ¿Cuál será la renta vitalicia inmediata que podrá percibir una persona de 28 años que entrega á un banquero ó compañía aseguradora el capital de 17.065'90 duros?

$$a = \frac{C}{A_n} = \frac{17065'90}{17'06590} = 1000 \ \$$$

3.º ¿Cuál será la edad de un individuo que, con el capital de 17.065'90 duros se procuró una renta vitalicia inmediata de 1.000 duros?

$$A_n = \frac{C}{a} = \frac{17065'90}{1000} = 17'06560$$

cuyo número se halla en la tabla de los valores de A_n, enfrente de los 28 años, que es la edad que buscamos.

4.º ¿A qué edad, con un capital C, podrá una persona hacerse una renta vitalicia inmediata que importe anualmente el 20 por ciento de dicho capital?

En este ejemplo, *a* debe representar el 20 por 100 del capital C, que equivale á 0'20 por 1, y de consiguiente, $a = 0'20 \times C$; de donde

$$A_n = \frac{C}{a} = \frac{C}{0'20 \times C} = \frac{1}{0'20} = 5$$

cuyo número está comprendido entre 4,9455 y 5,2218 de la tabla de los valores de A_n, según Deparcieux, los cuales corresponden á 75 y 74 años respectivamente. Por lo tanto, ésta será la edad en la cual, entregando el capital C, podrá percibirse la citada renta vitalicia inmediata.

Rentas vitalicias pagaderas por fracciones de año. — La fórmula $C = a \times A_n$ deducida anteriormente, representará, según se ha dicho, el capital C que un individuo deberá entregar á la Compañía para que ésta le satisfaga durante su vida la renta *a, cada año.*

No obstante el asegurado puede preferir que el pago de la renta se verifique por fracciones de año, semestres, trimestres, meses, etc., en cuyo caso el valor de A_n, y por consiguiente el de C, aumentará á consecuencia de que la Compañía retiene menos tiempo la renta *a*.

El importe de este aumento está expresado por una fórmula que por exigir conocimientos superiores no puede desarrollarse aquí, pero en la práctica se admite con muy poco error que el valor de C en estos casos está dado por la expresión.

$$C = a \left(A_n + \frac{m - 1}{2\ m} \right)$$

en la cual *m* representa las partes en que se considera fraccionado el año; así las fórmulas aproximadas de la renta semestral, trimestral y mensual serán respectivamente:

$$C = a\left(A_n + \frac{2-1}{2 \cdot 2}\right) = a\left(A_n + \frac{1}{4}\right); \; C = a\left(A_n + \frac{4-1}{2 \cdot 4}\right) = a\left(A_n + \frac{3}{8}\right)$$

$$C = a\left(A_n + \frac{12-1}{2 \cdot 12}\right) = a\left(A_n + \frac{11}{24}\right)$$

Ejemplo práctico numérico de renta vitalicia inmediata cobrable por fracciones de año. — Resolver el problema primero del párrafo anterior suponiendo que la renta de 1.000 duros anuales, se desea percibir por períodos trimestrales.

Emplearemos la expresión aproximada

$C = a\left(A_n + \frac{3}{8}\right) = a\ (A_n + 0'375)$ y como quiera que el valor de A_n es el mismo que en el problema antedicho, tendremos que:

$$C = 1000\ (17'0659 + 0'375) = 1000 \times 17'4409 = 17440'90\ \$$$

De análogo modo buscaríamos el valor de C y de los demás datos cuando el período fuese semestral ó mensual (*).

Renta vitalicia diferida

Teoría. — El seguro de *Renta vitalicia diferida* es aquel en que la compañía aseguradora no debe principiar á satisfacer la pensión hasta pasado cierto número de años después de firmado el contrato.

Vamos, pues, á determinar el capital C_d que deberá imponer una persona de $n—t$ años para percibir una renta vitalicia a desde los n años.

Representando por V_{n-t}, V_{n+1}, V_{n+2}, ... V_{n+k} el número de sobrevivientes á la edad $n—t$, $n+1$, $n+2$, ... $n+k$, las probabilidades de que el rentista alcance los $n+1$, $n+2$, ... $n+k$ años, serán respectivamente

$$\frac{V_{n+1}}{V_{n-t}}, \quad \frac{V_{n+2}}{V_{n-t}} \; \ldots\ldots \; \frac{V_{n+k}}{V_{n-t}}$$

Ahora bien: deseando el rentista principiar á devengar las pensiones a desde que cumpla los n años de edad, evidentemente percibirá la primera al fin del año n, ó sea cuando habrá alcanzado los $n+1$ años, y como cada unidad del capital que ha entregado al banquero gana interés compuesto á razón de r al año durante $(n+1)—(n—t) = n—n+1+t = t+1$ años, es evidente que 1 moneda al fin de este tiempo se habrá convertido en $(1+r)^{t+1}$. Por lo tanto, la cantidad que deberá cobrar el banquero para satisfacer

(*) En todas las fórmulas que se consignen en los párrafos siguientes, se entenderá siempre si no se expresa taxativamente lo contrario, que la renta es cobrable por años, al objeto de evitar confusiones.

5

a al cabo de $t+1$ años, ó sea cuando el rentista haya alcanzado los $n+1$ años, será $\frac{a}{(1+r)^{t+1}}$. Mas por idéntica razón á la indicada al tratar de las rentas inmediatas, deberá multiplicarse el anterior valor por la probabilidad de que el rentista llegue á la referida edad de $n+1$ años. Hallándose de análoga manera las cantidades correspondientes á $n+2$, $n+3$, ... $n+k$ años, según es de ver á continuación:

Cantidad que debe recibir el banquero para satisfacer la pensión *a* al principio del año $n+1$.... $\frac{a}{(1+r)^{t+1}} \times \frac{V_{n+1}}{V_{n-t}}$

Id. id. id. id. del año $n+2$.... $\frac{a}{(1+r)^{t+2}} \times \frac{V_{n+2}}{V_{n-t}}$

Id. id. id. id. del año $n+3$.... $\frac{a}{(1+r)^{t+3}} \times \frac{V_{n+3}}{V_{n-t}}$

Id. id. id. id. del año $n+k$.... $\frac{a}{(1+r)^{t+k}} \times \frac{V_{n+k}}{V_{n-t}}$

La suma de las anteriores cantidades será igual al capital C_d, que debe recibir el banquero. Por lo tanto:

$$C_d = \frac{a}{(1+r)^{t+1}} \times \frac{V_{n+1}}{V_{n-t}} + \frac{a}{(1+r)^{t+2}} \times \frac{V_{n+2}}{V_{n-t}} + \frac{a}{(1+r)^{t+3}} \times \frac{V_{n+3}}{V_{n-t}} + \dots$$

$+\frac{a}{(1+r)^{t+k}} \times \frac{V_{n+k}}{V_{u-t}}$; y separando el factor común $\frac{a}{(1+r)^t \, V_{n-t}}$, se tendrá:

$$C_d = \frac{a}{(1+r)^t \, V_{n-t}} \left(\frac{V_{n+1}}{1+r} + \frac{V_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{V_{n-3}}{(1+r)^3} + \dots \dots + \frac{V_{n+k}}{(1+r)^k} \right)$$

Pero como $\frac{V_{n+1}}{1+r} + \frac{V_{n+2}}{(1+r)^2} + \dots \dots + \frac{V_{n+k}}{(1+r)^k} = S_n$, según vimos al tratar de la renta vitalicia inmediata, resulta:

$$C_d = \frac{a}{(1+r)^t \, V_{n-t}} \times S_n$$

Recordando ahora que $A_n = \frac{S_n}{V_n}$, tendremos $S_n = A_n \times V_n$ y sustituyendo

$$C_d = \frac{a}{(1+r)^t} \times \frac{V_n}{V_{n-t}} \times A_n$$

Cuya fórmula general nos proporciona el medio para resolver, con facilidad, los problemas á que den lugar las rentas vitalicias diferidas, toda vez que el valor de $\frac{V_n}{V_{n-t}}$ se deduce de las tablas de mortalidad, y el correspondiente á A_n viene consignado en la tabla del valor actual de una renta vitalicia de 1 peseta.

De la anterior fórmula general se deduce fácilmente la siguiente:

$$a = \frac{C_d\,(1+r)^t\,V_{n-t}}{V_n\;A_n}$$

Ejemplos prácticos numéricos de renta vitalicia diferida. — 1.º Tratando un individuo de 20 años de edad de obtener una renta vitalicia de 1.000 duros anuales, cobradera desde que cumpla los 50 años hasta el término de su vida, desea saber el capital que deberá entregar á una sociedad de seguros que abona intereses compuestos á razón del 4 por 100 anual.

Sustituyendo en la fórmula general los valores que se consignan en el enunciado de este ejemplo, y los que se determinan en las correspondientes tablas, según la mortalidad de Deparcieux, tendremos:

$$a = 1000$$
$$r = 0'04$$
$$t = 50-20=30$$

Tabla I.ª de mortalidad $V_n = V_{50} = 581$ número de sobrevivientes á los 50 años

Id. id. $V_{n-t} = V_{50-30} = V_{20} = 814$ id. á los 20 años

Tabla III valor de $A_n = A_{50} = 12'5256$ á los 50 años

Según Deparcieux

Por lo tanto,

$$C_d = \frac{a}{(1+r)^t} \times \frac{V_n}{V_{n-t}} \times A_n = \frac{1000}{(1+0'04)^{30}} \times \frac{V_{50}}{V_{20}} \times A_n = \frac{1000}{3'2434} \times$$
$$\times \frac{581}{814} \times 12'5256 = \frac{7277373'60}{2640'12} = 2756'456 \text{ \$}$$

2.º Una persona que al cumplir 20 años entrega á un banquero 2.756,456 duros, desea averiguar qué renta vitalicia podrá percibir desde la edad de 50 años.

$$a = \frac{C_d\,(1+r)^t\,V_{n-t}}{V_n\;A_n} = \frac{2756'456 \times 3'2434 \times 814}{581 \times 12'5356} = 1000 \text{ \$}$$

Renta vitalicia temporal

Teoria. — La renta vitalicia se llama temporal cuando la Compañía aseguradora se obliga tan sólo á satisfacer la pensión durante un número determinado de años, con tal que viva el interesado.

La renta temporal puede ser también inmediata y diferida.

RENTAS VITALICIAS TEMPORALES INMEDIATAS. — Para averiguar el capital necesario C_p al objeto de que un individuo de $n-t$ años pueda formarse una renta temporal inmediata a hasta los n años de edad, deberemos restar de la fórmula de la renta inmediata á los $n-t$ años $C = a \times A_{n-t}$, la correspondiente á la diferida para los n años $C_d = \frac{a}{(1+r)^t} \times \frac{V_n}{V_{n-t}} \times A_n$

En su consecuencia, verificando ordenadamente la resta y haciendo $C - C_d = C_p$, resulta:

$$C_p = a \times A_{n-t} - \frac{a}{(1+r)^t} \times \frac{V_n}{V_{n-t}} \times A_n = a\left(A_{n-t} - \frac{V_n}{V_{n-t}} \times \frac{A_n}{(1+r)^t}\right)$$

De cuya fórmula general se deduce fácilmente el valor de a, pues

$$a = \frac{C_p}{A_{n-t} - \frac{V_n}{V_{n-t}} \times \frac{A_n}{(1+r)^t}}$$

EJEMPLOS PRÁCTICOS NUMÉRICOS DE RENTA VITALICIA TEMPORAL INMEDIATA. — 1.º Averiguar el capital que habrá de imponer una persona de 30 años, al objeto de conseguir la renta de 1.000 duros anuales durante 20 años, ó sea hasta la edad de 50.

Del enunciado del ejemplo propuesto se deduce:

$$n - t = 30 \qquad a = 1000$$
$$t = 20 \qquad n = 50$$

y de las tablas de Deparcieux, suponiendo el interés al 4 por 100, resulta:

Tabla III.ª . . $A_{n-t} = A_{30} = 16'8095$	Tabla I.ª . . $V_n = V_{50} = 581$
Tabla I.ª . . $V_{n-t} = V_{30} = 734$	Tabla III.ª . . $A_n = A_{50} = 12'5256$

Por lo tanto, sustituyendo los anteriores valores en la fórmula general, tendremos:

$$C_p = a\left(A_{n-t} - \frac{V_n}{V_{n-t}} \times \frac{A_n}{(1+r)^t}\right) = 1000\left(16'8095 - \frac{581}{734} \times \frac{12'5256}{1'04^{20}}\right) =$$

$$= 1000\left(16'8095 - \frac{581}{734} \times \frac{12'5256}{2'191}\right) = 1000 \times 12'281 = 12281 \$$$

2.º ¿Cuál será la renta anual que durante 20 años podrá percibir un individuo que á la edad de 30 años impuso el capital de 12.281 duros?

$$a = \frac{C_p}{A_{n-t} - \frac{V_n}{V_{n-t}} \times \frac{A_n}{(1+r)^t}} = \frac{12281}{16'8095 - \frac{581}{734} \times \frac{12'5256}{1'04^{20}}} =$$

$$= \frac{12281}{12'281} = 1000 \ \$$$

RENTAS VITALICIAS TEMPORALES DIFERIDAS. — Si una persona de $n-t$ años de edad desea constituir una renta que empieze á cobrarse al llegar á n años de edad y dure por espacio de m años, se dirá que esta renta es temporal por m años y diferida al mismo tiempo por t.

Para encontrar su expresión, del valor que se obtuvo para la renta diferida por t años, restaremos el valor de la diferida por $m+t$.

Hemos visto que la fórmula de la diferida en n años era igual á

$$C_d = \frac{a}{(1+r)^t} \times \frac{V_n}{V_{n-t}} \times A_n$$

y la diferida por $m+t$ será

$$\frac{a}{(1+r)^{m+t}} \times \frac{V_{m+n}}{V_{n-t}} \times A_{m+n}$$

luego si llamamos C_{pd} al capital necesario para formar una vitalicia temporal diferida, tendremos que

$$C_{pd} = \frac{a}{(1+r)^t} \times \frac{V_n}{V_{n-t}} \times A_n - \frac{a}{(1+r)^{m+t}} \times \frac{V_{m+n}}{V_{n-t}} \times A_{m+n} =$$

$$= a\left(\frac{V_n}{V_{n-t}} \times \frac{A_n}{(1+r)^t} - \frac{V_{m+n}}{V_{n-t}} \times \frac{A_{m+n}}{(1+r)^{m+t}}\right)$$

EJEMPLO PRÁCTICO NUMÉRICO DE RENTA VITALICIA TEMPORAL DIFERIDA. — Hallar el capital necesario para que un individuo de 60 años de edad pueda disfrutar desde los 65 una renta vitalicia de una unidad anual durante 15 años.

La renta en este problema es diferida por 5 años y temporal por 15.

Por consiguiente tendremos:

$$n - t = 60 \qquad m = 15$$
$$t = 5 \qquad n = 65$$
$$a = 1$$

y según las tablas de Deparcieux y suponiendo el 4 % de interés

Tabla I. . $V_n = V_{65} = 395$	Tabla I. . $V_{m+n} = V_{80} = 118$
» I. . $V_{n-t} = V_{60} = 463$	» III. . $A_n = A_{65} = 8'0394$
» III. . $A_{m+n} = A_{80} = 3'5962$	$(1+r)^t = 1'04^5 = 1'2166$

$$(1+r)^{m+t} = 1'04^{20} = 2'191$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior tendremos que

$$C_{pd} = \frac{V_{65} \times A_{65}}{V_{60} \times 1'2166} - \frac{V_{80} \times A_{80}}{V_{60} \times 2'191} = \frac{395 \times 8'0943}{463 \times 1'2166} - \frac{118 \times 3'5962}{463 \times 2'191} =$$

$$= \frac{3175'563}{563'2858} - \frac{424'3516}{1014'433} = 5'637 - 0'418 = 5'129$$

El individuo en cuestión debería entregar, pues, á la Compañía 5,219 pesetas por cada peseta que deseare percibir en concepto de renta anual.

Rentas vitalicias á capital reservado

Así como hasta aquí se ha supuesto que el asegurado en caso de muerte renunciaba el capital entregado en favor de la Compañía, otra de las combinaciones que pueden presentarse en los seguros consiste en los llamados *á capital reservado,* en los cuales el asegurado no renuncia al capital entregado sino únicamente á los intereses.

Supongamos que un individuo de $n-t$ años de edad, desea percibir una renta vitalicia anual determinada pero con la condición de que si llega á la edad n la Compañía deberá devolverle todo el capital que impuso, cesando, como es natural, de percibir la renta.

En este caso la Compañía sólo se comprometerá á entregar al asegurado los intereses al tanto x del capital impuesto, y como que x debe cobrarse hasta que el asegurado llega á la edad n, el cobro de esta cantidad constituirá una renta vitalicia temporal durante $n-(n-t)=t$ años; luego si el asegurado desea cobrar cada año el tanto por uno x del capital que impuso, la Compañía le exigirá atendiendo únicamente á esta condición, el valor que resultaría de sustituir a por x en la fórmula de las temporales inmediatas.

$$x \left(A_{n-t} - \frac{V_n}{V_{n-t}} \times \frac{A_n}{(1+r)^t} \right)$$

esta expresión, pues, indicará la cantidad de que ha de disponer la Compañía al formalizar el contrato.

Por otra parte, de cada unidad que entregue el asegurado, habrá que rebajar el valor actual de ésta, suponiendo que al cabo de t años haya de devolverse si vive. El valor actual mencionado será

$$\frac{1}{(1+r)^t} \times \frac{V_n}{V_{n-t}}$$

y verificando la resta tendremos

$$1 - \frac{V_n}{(1+r)^t \ V_{n-t}} = \frac{(1+r)^t \ V_{n-t} - V_n}{(1+r)^t \ V_{n-t}}$$

esta expresión indicará, por consiguiente la cantidad de que la Compañía podrá disponer para el cálculo de la renta por cada unidad entregada.

Igualando, pues, ambas fórmulas tendremos:

$$x\left(A_{n-t}-\frac{V_n\ A_n}{V_{n-t}(1+r)}\right)=\frac{(1+r)^t\ V_{n-t}-V_n}{(1+r)^t\ V_{n-t}}$$

de donde, despejando x,

$$x=\frac{\dfrac{(1+r)^t\ V_{n-t}-V_n}{(1+r)^t\ V_{n-t}}}{A_{n-t}-\dfrac{V_n\ A_n}{V_{n-t}(1+r)^t}}$$

y como quiera que $A_{n-t}-\dfrac{V_n\ A_n}{V_{n-t}(1+)^t}$ si la resta se efectúa, equivale á $\dfrac{A_{n-t}(V_{n-t}(1+r)^t)-V_n\ A_n}{(1+r)^t\ V_{n-t}}$, tendremos que podremos suprimir los denominadores del dividendo y del divisor y haciéndolo resultará:

$$x=\frac{(1+r)^t\ V_{n-t}-V_n}{A_{n-t}(V_{n-t}(1+r)^t)-V_n\ A_n}$$

cuya fórmula expresará la renta que la Compañía pagará al asegurado por cada unidad que en concepto de capital éste entregue al principiar el contrato en las condiciones apuntadas.

Ejemplo práctico numérico. — Una persona de 45 años entrega un capital de 1 peseta, con objeto de percibir una renta vitalicia hasta los 70 años, con la condición de que al cumplir éstos, si aun vive, se le devuelva la peseta que impuso. ¿Cuál será la renta que se le podrá entregar?

De los datos del problema se desprende que $n-t=45$; $n=70$; $t=25$, y r será como siempre igual á 0,04.

Verificando ahora la sustitución necesaria, en la fórmula hallada anteriormente tendremos que se convertirá en

$$x=\frac{(1+0'04)^{25}\,V_{45}-V_{70}}{A_{45}\,(V_{45}\times 1'04^{25})-V_{70}\,A_{70}}$$

para cuya fórmula encontraremos los siguientes valores:

Tabla I..$V_{45}=622$	Tabla III..$A_{70}=6'3938$
» I..$V_{70}=310$	$(1+0'04)^{25}=2'6657$
» III..$A_{45}=13'9042$	$V_{45}\times 1'04^{25}=1658'0654$

y sustituyendo

$$x = \frac{1658'0654 - 310}{13'9042 \times 1658'0654 - 310 \times 6'3938} = \frac{1658'0654 - 310}{23054'07293468 - 1982'078} =$$

$$= \frac{1348'0654}{21071'994934368} = 0'063974 \text{ ptas.}$$

Si imponiendo una peseta obtenemos 0,063974 pesetas de renta anual, para averiguar la que se obtendría al imponer un capital *c* bastaría una simple multiplicación.

Renta vitalicia diferida constituída por imposiciones anuales

TEORÍA. — Cuando se trató de la renta vitalicia diferida, supusimos que el rentista entregaba de una sola vez al banquero ó á la compañía de seguros el capital necesario.

Mas debe advertirse que la entrega de dicho capital (ó prima única) puede efectuarse también por medio de imposiciones que tengan lugar dentro de un número dado de años, las cuales quedarán por completo á favor de la Compañía en el caso de que el rentista muera antes de gozar de la renta vitalicia.

Así, pues, podremos considerar que cada una de dichas imposiciones anuales equivale á la renta temporal que se disfrutaría entregando inmediatamente un capital igual al necesario para formar la renta diferida; pero debiendo atenderse á que el pago de la imposición empieza un año antes que la renta, pues aquélla se entrega al principio de cada año y ésta al fin del mismo.

Representando por x á cada una de las referidas imposiciones tendremos que el capital C_p correspondiente á una renta temporal x, será:

$$x \left(A_{n-t} - \frac{V_n}{V_{n-t}} \times \frac{A_n}{(1+r)^t} \right)$$

Y el capital C_d necesario para formar la renta diferida a, pagadera á los n años, es igual á

$$\frac{a}{(1+r)^t} \times \frac{V_n}{V_{n-t}} \times A_n$$

Igualando las dos expresiones anteriores, después de haber añadido á la primera el valor de x, ó sea el importe de una imposición, toda vez que, conforme hemos dicho, el pago de ésta se efectúa un año antes que el de la renta vitalicia, resultará:

$$\frac{a}{(1+r)^t} \times \frac{V_n}{V_{n-t}} \times A_n = x + x \left(A_{n-t} - \frac{V_n}{V_{n-t}} \times \frac{A_n}{(1+r)^t} \right)$$

y despejando x se obtiene:

$$x = \frac{\frac{a}{(1+r)^t} \times \frac{V_n}{V_{n-t}} \times A_n}{1 + A_{n-t} - \frac{V_n}{V_{n-t}} \times \frac{A_n}{(1+r)^t}} = \frac{a \times V_n \times A_n}{(1+A_{n-t})(1+r)^t \times V_{n-t} - V_n \times A_n}$$

Esta fórmula sirve para determinar el importe de la imposición anual que deberá entregarse al objeto de constituir una renta vitalicia diferida.

Ejemplo práctico numérico de renta vitalicia diferida formada por imposiciones anuales. — ¿Cuál será la imposición anual que deberá pagar una persona de 20 años para disfrutar, al llegar á los 60, una renta vitalicia de 5.000 pesetas anuales?

Del enunciado del ejemplo propuesto se deduce:

$a = 5000$	$t \ldots = 60 - 20 = 40$
$n = 60$	$n - t = 20$

y de las tablas de Deparcieux, suponiendo el interés al 4 por 100, resulta:

$A_n = A_{60} = 9'713$	$V_n = V_{60} = 463$
$A_{n-t} = A_{20} = 17'9380$	$V_{n-t} = V_{20} = 814$

Sustituyendo ahora los anteriores valores en la fórmula general, tendremos:

$$x = \frac{a \times V_n \times A_n}{(1 + A_{n-t})\ (1 + r)^t \times V_{n-t} - V_n \times A_n} =$$

$$= \frac{5000 \times 463 \times 9'713}{(1+17'938)1'04^{40} \times 814 - 463 \times 9'713} = \frac{22485595}{74042'55} = 303'68 \text{ ptas.}$$

Renta vitalicia sobre dos cabezas

Teoría. — La renta vitalicia puede constituirse, también, sobre dos vidas ó cabezas, lo cual tiene lugar cuando la Compañía aseguradora se obliga á satisfacerla mientras vivan las dos personas á la vez, ó una sola.

Los cálculos á que dan lugar las rentas vitalicias sobre dos cabezas son análogos á los que hemos estudiado cuando se constituyen aquéllas á favor de una sola persona.

Representemos por n la edad de una de las dos personas, y por m la edad de la otra.

Las probabilidades de que la primera persona viva á los $n+1$, $n+2$ .... $n+k$ años, son, respectivamente,

$$\frac{V_{n+1}}{V_n}, \quad \frac{V_{n+2}}{V_n}, \ldots \frac{V_{n+k}}{V_n}$$

y las de que la segunda coexista á los $m+1$, $m+2$ ... $m+k$, son:

$$\frac{V_{m+1}}{V_m}, \quad \frac{V_{m+1}}{V_m}, \quad \ldots \quad \frac{V_{m+k}}{V_m}$$

y de consiguiente, los productos

$$\frac{V_{n+1} \times V_{m+1}}{V_n \times V_m}; \quad \frac{V_{n+2} \times V_{m+2}}{V_n \times V_m}; \quad \ldots \quad \frac{V_{n+k} \times V_{m+k}}{V_n \times V_m}$$

representan las probabilidades compuestas de que las dos personas vivan al cabo de uno, dos, tres, etc., años.

Por lo tanto, sustituyendo estas probabilidades en lugar de las $\frac{V_{n+1}}{V_n}$, $\frac{V_{n+2}}{V_n}$ .... $\frac{V_{n+k}}{V_n}$ que figuran en las fórmulas de la renta vitalicia inmediata sobre una cabeza, se obtendrá la siguiente para cuando se contrata aquélla sobre dos cabezas:

$$C = \frac{a}{V_n \times V_m} \left(\frac{V_{n+1} \times V_{m+1}}{1+r} + \frac{V_{n+2} \times V_{m+2}}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{V_{n+k} \times V_{m+k}}{(1+r)^k} \right)$$

Si llamamos $S_{n,m}$ á la suma de los términos del anterior paréntesis, resultará

$$C = \frac{a}{V_n \times V_m} \times S_{n,m} = a \times \frac{S_{n,m}}{V_n \times V_m}$$

Y representando por $A_{n,m}$ el cociente $\frac{S_{n,m}}{V_n \times V_m}$, se simplifica notablemente esta fórmula, pues quedará reducida á

$$C = a \times V_{n,m}$$

Efectuando de análoga manera la sustitución de las probabilidades antes mencionadas obtendríamos las fórmulas para la renta diferida y temporal constituídas sobre dos babezas.

Al determinar el valor de la expresión $\frac{S_{n,m}}{V_n \times V_m}$ que se ha designado por $A_{n,m}$ observaremos que el divisor $V_n \times V_m$ es el producto de los sobrevivientes á las edades *n, m,* y que el valor de $S_{n,m}$ puede obtenerse por medio de la siguiente fórmula:

$$S_{n,m} = \frac{S_{n+1,\, m+1} + V_{n+1} \times V_{m+1}}{1 + r}$$

Hallados los distintos valores que representa $S_{n,m}$ y dividiéndolos por los correspondientes á $V_n \times V_m$, obtendremos todos los de $A_{n,m}$.

Formación de las tablas de los valores de $A_{n,m}$. — Para facilitar aún más la resolución de los problemas á que dan lugar las rentas vitalicias sobre dos cabezas, se han construído las correspondientes tablas IV y V (que insertamos en el Apéndice) de los valores de $A_{n,\,m}$ para las diferencias de edad de cinco en cinco años, de diez en diez, etc., al interés del 4 por 100 anual, y tomando por base la mortalidad según Duvillard y Deparcieux.

Al objeto de que no quede duda alguna respecto á la formación de las citadas tablas y para confirmar al mismo tiempo la teoría que expusimos anteriormente, hallaremos los siguientes valores de $A_{n,m}$

1.º Determinar los valores de $A_{n,m}$ para dos personas que tienen una misma edad, tomando por base la ley de mortalidad, según Deparcieux.

Si suponemos que cada una de las dos personas tiene 94 años, la siguiente igualdad

$$S_{n,m} = \frac{V_{n+1} \times V_{m+1}}{1+r} + \frac{V_{n+2}\, V_{m+2}}{(1+r)^2} + \cdots \cdots + \frac{V_{n+k} \times V_{m+k}}{(1+r)^k}$$

se convertirá, teniendo en cuenta que 95 es el límite de la tabla de mortalidad y que, por lo tanto, es igual á cero, en

$$S_{94,94} = \frac{V_{95} \times V_{95}}{1+r} = \frac{0}{1+r} = 0$$

y como

$$A_{n,m} = \frac{S_{n,m}}{V_n \times V_m}$$

tendremos:

$$A_{94,94} = \frac{S_{94,94}}{V_{94} \times V_{94}} = \frac{0}{1} = 0$$

que es lo que figura en la tabla de los valores de $A_{n,m}$.

Sabiendo ahora que $S_{94,94} = 0$, podemos por medio de la fórmula

$$S_{n,m} = \frac{S_{n+1,m+1} + V_{n+1} \times V_{m+1}}{1+r}$$

hallar fácilmente $S_{93,93}$, y, por lo tanto, resultará:

$$S_{93,93} = \frac{S_{94,94} + V_{94} \times V_{94}}{1+r} = \frac{0+1}{1+r} = \frac{1}{1'04} = 0'96154$$

luego

$$A_{93,93} = \frac{S_{93,93}}{V_{93} \times V_{93}} = \frac{0'96154}{2 \times 2} = \frac{0,96154}{4} = 0'24039$$

que es la cantidad que se consigna en la columna correspondiente del cero enfrente de los 93 años, de la tabla V de los valores de $A_{n,m}$, según la ley de mortalidad de Deparcieux y calculando los intereses á razón del 4 por ciento anual.

Siguiendo este procedimiento, hallaríamos los valores $A_{92,92}$, $A_{91,91}$, etc.

2.º Hallar los valores de $A_{n,m}$ para dos individuos que se llevan 5 años de diferencia, tomando por base la ley de mortalidad según Deparcieux.

Si suponemos que el más joven tiene 89 años y el otro 93, el paréntesis que representa $S_{n,m}$ se convertirá en

$$S_{89,94} = \frac{V_{90} \times V_{95}}{1 + r} = \frac{11 \times 0}{1 + r} = \frac{0}{1 + r} = 0$$

y, de consiguiente

$$A_{89,94} = \frac{S_{89,94}}{V_{89} \times V_{94}} = \frac{0}{16} = 0$$

que es lo que se consigna en la columna correspondiente de la tabla de los valores de $A_{n,m}$.

Sabiendo, pues, que $S_{89,94} = 0$, podemos, por medio de la fórmula simplificada que dá los valores de $S_{n,m}$, hallar fácilmente $S_{88,93}$, y tendremos:

$$S_{88,93} = \frac{S_{89,94} + V_{89} \times V_{94}}{1 + r} = \frac{0 + 16 \times 1}{1'04} = \frac{16}{1'04} = 15'3846$$

De consiguiente:

$$A_{88,93} = \frac{S_{88,93}}{V_{88} \times V_{93}} = \frac{15'3846}{22 \times 2} = \frac{15'3846}{44} = 0'34965$$

que precisamente es la cantidad estampada en la respectiva columna de la tabla de los valores de $A_{n,m}$, según la ley de mortalidad de Deparcieux.

De análoga manera encontraríamos los distintos valores de $A_{87,92}$, $A_{86,91}$, etc., así como también los correspondientes para las diferencias de edad de 10 en 10 años, de 15 en 15, de 20 en 20, etc.

PROBLEMAS PRÁCTICOS DE RENTAS VITALICIAS SOBRE DOS CABEZAS. — Mejor que ampliar más la teoría, sobre el asunto que estamos estudiando, juzgamos será de mayor utilidad para los lectores á quienes nos dirigimos, resolver una serie de problemas discretamente elegidos, en los cuales se haga directa aplicación numérica de las respectivas fórmulas matemáticas.

1.º *Renta vitalicia inmediata, pagadera hasta el último fallecimiento de las dos personas designadas.*

Hallar el valor actual de una renta de 5.000 pesetas anuales pagadera hasta el último fallecimiento de dos personas de 30 y 45 años.

Dando valores á la fórmula $P = C\,(A_a + A_b - A_{a,b})$ (*)

(*) P representa el valor actual llamado también *prima única*. A^a, A_b, $A_{a,b}$ podría expresarse por A_n, A_m, $A_{n;m}$; en que *n* es la edad del más joven y *m* los años del otro.

$C \;=\; 5000$

$A_{30} \;=\; 16'8095$ (Enfrente de los 30 años de la tabla III de valores de A_n, según mortalidad de Deparcieux, interés del 4 por 100.)

$A_{45} \;=\; 13'9042$ (Enfrente de los 45 años de la tabla III de los valores de A_n, según mortalidad de Deparcieux, interés del 4 por 100.)

$A_{30;\,15} = 12'1289$ (En el punto de encuentro de los 30 años y diferencia de 15 años de la tabla V de Deparcieux.)

Tendremos: $P = 5.000\,(16{,}8095 + 13{,}9042 - 12{,}1289) = 5.000 \times \times 18{,}5848 = 92.924$ pesetas, *prima única*, que debería entregarse á la Compañía aseguradora.

2.º ¿Cuál será la renta anual que podrá exigirse de una Compañía hasta el último fallecimiento de dos personas de 30 y 45 años de edad respectivamente, á la cual entregan, de una sola vez, 92.924 pesetas?

Despejando la C de la anterior fórmula $C = \dfrac{P}{(A_a + A_b - A_{a;b})}$

y sustituyendo los valores correspondientes:

$$C = \frac{92924}{18'5848} = 5000 \text{ pesetas anuales}$$

3.º *Renta vitalicia diferida pagadera al primer fallecimiento de dos personas designadas.*

¿Qué prima única deberá percibir la Compañía que asegure una renta de 5.000 pesetas anuales, diferida por 30 años, sobre dos individuos de edad 20 años cada uno?

$P = C \times \dfrac{A_{a+d,b+d} \times V_{a+d} \times V_{b+d}}{V_a \times V_b \times (1+r)^d}$ sustituyendo los respectivos valores:

$C = 5000$

$A_{30+20,\,50} = 9'6232$ (En el punto de encuentro de los 50 años y 0 de diferencia de la tabla V.)

$V_{50} = 581$ (En la tabla I de mortalidad, según Deparcieux, frente los 50 años.)

$V_{50} = 581$ (Idem, Idem. Idem.)

$V_{20} = 814$ En la tabla I de mortalidad según Deparcieux, frente los 20 años.)

$V_{20} = 814$ (Idem. Idem. Idem.)

$(1+r)^d = 1'04.^{30} = 3'2432$

$$\text{Tendremos } P = 5000 \times \frac{9'6232 \times 581 \times 581}{814 \times 814 \times 3'2433} =$$

$$= \frac{11430485076}{2148987'61} = 5319 \text{ pesetas}$$

4.º Resolver el ejemplo anterior suponiendo que la edad de los dos asegurados es de 20 y 25 años respectivamente.

$$P = 5000 \times \frac{8'9271 \times 581 \times 526}{814 \times 774 \times 3'2433} = \frac{13640876613}{2043395'76} =$$
$$= 6695 \text{ pesetas}$$

5.º *Renta vitalicia diferida pagadera al último fallecimiento de las dos personas designadas.*

Se calcula de análoga manera que la renta inmediata.

Rentas vitalicias constituidas sobre más de dos cabezas. — Este caso raramente se presenta en la práctica, no existiendo tampoco tablas adrede para calcular sus términos, pues su construcción sería sumamente fatigosa.

Sin embargo cuando excepcionalmente ocurre determinar este valor se utiliza el método aproximado de Simpson, el cual consiste en hallar por medio de la tabla de los valores de $A_{n,m}$ la edad que puede reemplazar á dos de las dadas; luego, combinando la hallada con la tercera dada, encontrar del mismo modo una segunda edad equivalente á las tres dadas y así sucesivamente para las demás.

Ejemplo práctico numérico. — Buscar el valor aproximado del término de la renta vitalicia de una unidad, correspondiente á tres personas de edad de 20, 30 y 40 años respectivamente.

En primer lugar buscaremos en la tabla el valor del término correspondiente á 20 y 30 años, que será

$$A_{20,30} = 14'3489. \text{ (Tabla V)}$$

En la tabla III buscaríamos los dos valores más cercanos á $A_{20,30}$ y encontraríamos serían $A_{34} = 14{,}3839$ y $A_{35} = 14{,}2138$; de donde para hallar la edad equivalente á los 20 y 30 años haríamos la siguiente proporción

$$(14'3839 - 14'2138) : (35 - 34) :: 14'3839 - 14'3489) : x$$

$$0'1701 : 1 :: 0'035 : x, \qquad x = \frac{0'035}{0'1701} = 0'20$$

La edad equivalente á 20 y 30 sería, pues, 34,20 años. Ahora combinaríamos esta edad con la otra dada de 40 años, y como quiera que 34,20 no está en la tabla buscaríamos su inferior á 30 y su superior 35 y tendremos que $A_{30,40} = 12{,}9715$ y $A_{35,40} = 12{,}7329$, es decir, que en cinco años corresponden 12,9715—12,7329=0,2386 de disminución, luego para saber lo que corresponderá en 4,20 años haremos la siguiente proporción:

$$5 : 0'2386 :: 4'20 : x, \qquad x = \frac{0'2386.4'20}{5} = 0'2004$$

de donde el valor aproximado de $A_{34'20,\,40}$ será

$$A_{34'20,\,40} = 12'9715 - 0'2004 = 12'7711$$

y por consiguiente podremos admitir como valor aproximado

$$A_{20,30,40} = 12'7711$$

Procedimiento de M. Maas para el cálculo de los valores de A_n.

El método que se ha empleado para la construcción de la Tabla de los valores de A_n recibe el nombre de *método directo*.

No obstante, las innumerables combinaciones de que son susceptibles las cuestiones de seguros, haría que en muchos casos el empleo del *método directo* diese lugar á que el despeje de los distintos valores fuesen tarea sumamente laboriosa y expuesta á errores. De aquí la necesidad de emplear *Tablas auxiliares* que una vez construídas sirven para todos los casos que puedan presentarse.

Entre las más importantes de estas Tablas merecen citarse las de Maas, cuyo método de construcción dió á conocer en su obra *Theorie elementaire des Annuites viagéres,* publicada en 1865 (*).

He aquí una breve noticia de la construcción de estas Tablas:

En la página 52 hemos encontrado como valor de la cantidad C que debería percibir el banquero para satisfacer anualmente durante la vida de una persona la renta *a*, la siguiente expresión:

$$C = \frac{a}{(1+r)} \times \frac{V_{n+1}}{V_n} + \frac{a}{(1+r)^2} \times \frac{V_{n+2}}{V_n} + \cdots\cdots + \frac{a}{(1+r)^k} \times \frac{V_{n+k}}{V_n}$$

Si en esta expresión hacemos $a = 1$; $n + k = w$, límite de la tabla, de donde $k = w - n$ y ponemos las fracciones, $\frac{a}{(1+r)}$, $\frac{a}{(1+r)^2}$, equivalentes aquí para $a = 1$, á $\frac{1}{(1+r)}$, $\frac{1}{(1+r)^2}$ etc., bajo la forma $(1+r)^{-1}$, $(1+r)^{-2}$, etc., tendremos

$$C = (1+r)^{-1} \frac{V_{n+1}}{V_n} + (1+r)^{-2} \frac{V_{n+2}}{V_n} + \;,,,\; + (1+r)^{-(w-n)} \frac{V_w}{V_n}$$

Si multiplicamos ambos miembros por $V_n\,(1+r)^{w-n}$ tendremos:

$$C.\ V_n\,(1+r)^{w-n} = (1+r)^{w-n-1}\ V_{n+1} + (1+r)^{w-n-2}\ V_{n+2} + \ldots + V_w$$

Si observamos los términos del segundo miembro veremos que

(*) De esta obra que se halla completamente agotada, nos ha cabido la fortuna de poder procurarnos un ejemplar.

empezando por el último no son más que los valores de la tabla de mortalidad, V_w, V_{w-1}, V_{w-2}, ..., V_{w-a-1}, multiplicados por $(1+r)^0$, $(1+r)^1$, $(1+r)^3$, ... $(1+r)^{w-a-1}$

Luego llamando T_n, á $V_n(1+r)^{w-n}$; $T_{n+1} = V_{n+1}(1+r)^{w-a-1}$ etcétera, y sustituyendo

$$C. T^n = T_{n-1} + T_{n+2} + T_{n+1} + \ldots + T_w$$

Y si se hace $T_{n+1} + T_{n+2} + T_{n+3} .. + T_w = G_{n+1}$ y sustituímos

$$C. T_n = G_{n+1}, \text{ de donde } C = \frac{G_{n+1}}{T_n}$$

que nos dará el capital C necesario para percibir 1 peseta anual de renta, para cuyo caso convinimos en designar á C, por A_n, y por consiguiente

$$A_n = \frac{G_{n+1}}{T_n}$$

He aquí como, después de estos razonamientos, opera M. Maas para formar las *Tablas auxiliares* de los valores

$$T_n = (1+r)^{w-n} V_n \text{ y, } G_{n+1} = T_{n+1} + T_{n+2} + T_{n+3} + \ldots + T_w$$

Aunque en realidad son dos los valores que hay que buscar hallados los de T_n, queda determinado G_{n+1}.

Según la Tabla de mortalidad de Deparcieux en que $w=94$, tenemos que los sobrevivientes á los 94,93, 92, 91, 90, ... años de edad, son respectivamente 1, 2, 4, 7, 11, ... etc., cuyos números indican los valores de V_w, V_{w-1}, V_{w-2}, ... V_{w-a-1}. Luego multiplicando estos valores V_n, por $(1+r)^0$, $(1+r)^1$, $(1+r)^2$ etc., según quedó dicho más arriba, tendremos que

$$T_w = 1(1+r)^0 \,;\; T_{w-1} = 2(1+r)^1 \,;\; T_{w-2} = 4(1+r)^2$$

de donde sumando los valores de T_n necesarios, obtendremos los de G_n para cada edad, de este modo, siendo $1 = 0'04$;

		T_n	G_n
para 94 años	$1\ (1+0'04)^0 =$	1'00	1'00
» 93 »	$2\ (1'04)^1 =$	2'08	3'08
» 92 »	$4\ (1'04)^2 =$	4'33	7'41
» 91 »	$7\ (1'04)^3 =$	7'87	15'28
» 90 »	$11\ (1'04)^4 =$	12'87	28'15

Para encontrar, pues, el valor de A_{91}, haríamos

$$A_{91} = \frac{G_{91+1}}{T_{91}} = \frac{G_{92}}{T_{91}} = \frac{7'41}{7'87} = 0'9410$$

que es el mismo valor que se inserta en la Tabla III para esta edad.

Estas fórmulas son de gran utilidad para el cálculo de las diferidas, temporales, etc., que quedan al emplearlas rápida y fácilmente resueltos.

Hay que advertir que los valores encontrados en la tabla anterior para T_n y para G_n no son exactos y sí tan solo aproximados y por consiguiente, también será aproximado el valor hallado para A_{91} (*).

Procedimiento de Morgan para el cálculo de los valores de A_n.

Análogo al método de Maas fué el procedimiento introducido por Morgan para hallar los valores de la anualidad vitalicia A_n.

La notación que adoptó fué la siguiente:

$$D_n = (1+r)^{-n} V_n \qquad N_n = D_{n+1} + D_{n+2} + D_{n+3} + \dots + D_w$$

de cuyos valores construyó tablas para todas las edades.

Veamos en que consiste su procedimiento.

Si encontramos el cociente de dividir D_{n+a} por D_n tendremos:

$$\frac{D_{n+a}}{D_n} = \frac{(1+r)^{-n-a}}{(1+r)^{-n}} \times \frac{V_{n+a}}{V_n} = (1+r)^{-a} \times \frac{V_{n+a}}{V_n} =$$

$$= \frac{1}{(1+r)^a} \times \frac{V_{n+a}}{V_n}$$

pudiendo dar á *a* todos los valores posibles desde 1 al límite w de la tabla de supervivencia.

En la página 71 hemos obtenido para valor de C

$$C = (1+r)^{-1} \frac{V_{n+1}}{V_n} + (1+r)^{-2} \frac{V_{n+2}}{V_n} + \dots + (1+r)^{-w} \frac{V_{n+w}}{V_n}$$

sustituyendo, pues, nos resultará

$$C = \frac{D_{n+1}}{D_n} + \frac{D_{n+2}}{D_n} \frac{D_{n+3}}{D_n} + \dots + \frac{D_w}{D_n} = \frac{N_n}{D_n}$$ que es la fórmula de Morgan, siendo *n* la edad del individuo, y refiriéndose á una unidad anual de renta.

(*) Hecha la tirada del pliego correspondiente á la página anterior, se ha observado que inadvertidamente pasó dicha página sin corregir, habiendo pues, algunas erratas que aun cuando el buen criterio las subsana enseguida, figuran corregidas en la correspondiente fé de erratas.

V

SEGUROS EN CASO DE MUERTE

PRELIMINARES.— Los seguros caso de muerte, son los contratos mediante los cuales se ofrecen ciertas ventajas á los herederos ó sucesores del asegurado ó á otras personas designadas por él; pueden hacerse sobre una ó más cabezas y afectar la forma de inmediatos y diferidos, cual acontecía en los seguros en caso de vida.

Seguros sobre la vida propiamente dichos

TEORIA. — En los seguros sobre la vida, propiamente dichos, el caso más sencillo y que se presenta con mayor frecuencia en la práctica, es cuando el asegurado se propone que, al ocurrir su fallecimiento, perciban sus herederos una suma ó capital S.

Llamando P al capital ó prima única que impone el asegurado en el momento de contratar el seguro y *n* á su edad, resulta:

Que si el banquero tuviera que satisfacer á los herederos del asegurado la suma S al fin del primer año, debería únicamente recibir al principio del mismo $\frac{S}{1+r}$

Para satisfacer la misma cantidad S al cabo de dos años, debería tan sólo recibir $\frac{S}{(1+r)^2}$ y así sucesivamente hallaríamos las cantidades $\frac{S}{(1+r)^3}$, $\frac{S}{(1+r)^4}$, etc., que cobraría el banquero para pagar á los herederos el capital S al fin del 3.º, 4.º, etc. años.

Mas como la suma S debe satisfacerse al ocurrir el fallecimiento del asegurado, es de ahí que deben intervenir en este cálculo las probabilidades de que aquél deje de existir dentro de 1, 2, 3, etcétera años.

Así, pues, la probabilidad de morir el asegurado dentro del primer año es

$$1 - \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{V_n - V_{n+1}}{V_n}$$

y la probabilidad compuesta de que viva durante el primer año y muera en el segundo, será:

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} \times \frac{V_{n+1} - V_{n+2}}{V_{n+1}} = \frac{V_{n+1} - V_{n+2}}{V_n}$$

De análoga manera hallaríamos que la probabilidad de que viva durante el segundo y muera en el tercero, sería:

$$\frac{V_{n+2}}{V_n} \times \frac{V_{n+2} - V_{n+3}}{V_{n+2}} = \frac{V_{n+2} - V_{n+3}}{V_n}$$

y así sucesivamente.

De lo dicho se desprende que estas probabilidades han de afectar respectivamente á los valores

$$\frac{S}{1 + r}; \quad \frac{S}{(1+r)^2}; \quad \frac{S}{(1+r)^3}; \quad \text{etc.}$$

Por lo tanto, las cantidades que ha de recibir el banquero para el caso de tener que satisfacer la suma S al fin del 1.º, 2.º, 3.º años, etc., son respectivamente:

$$\frac{S}{1+r} \times \frac{V_n - V_{n+1}}{V_n}; \quad \frac{S}{(1+r)^2} \times \frac{V_{n+1} - V_{n+2}}{V_n}; \quad \frac{S}{(1+r)^3} \times \frac{V_{n+2} - V_{n+3}}{V_n}; \quad \text{etc.}$$

Y como la suma de estas cantidades parciales equivale al capital P, que debe entregar el asegurado en el acto de firmar el contrato, se tendrá:

$$P = \frac{S}{1+r} \times \frac{V_n - V_{n+1}}{V_n} + \frac{S}{(1+r)^2} \times \frac{V_{n+1} - V_{n+2}}{V_n} + \frac{S}{(1+r)^3} \times \frac{V_{n+2} - V_{n+3}}{V_n} + \ldots\ldots$$

Verificando las multiplicaciones indicadas,

$$P = \frac{S \times V_n}{(1+r)V_n} - \frac{S \times V_{n+1}}{(1+r)V_n} + \frac{S \times V_{n+1}}{(1+r)^2 V_n} - \frac{S \times V_{n+2}}{(1+r)^2 V_n} + \frac{S \times V_{n+2}}{(1+r)^2 V_n} - \frac{S \times V_{n+3}}{(1+r)^3 V_n} + \ldots, =$$

$$= \frac{S}{1+r} + \left(\frac{S \times V_{n+1}}{(1+r)^2 V_n} + \frac{S \times V_{n+2}}{(1+r)^3 V_n} + \ldots, \right) - \left(\frac{S \times V_{n+1}}{(1+r)V_n} + \frac{S \times V_{n+2}}{(1+r)^2 V_n} + \frac{S \times V_{n+3}}{(1+r)^3 V_n} + \ldots, \right)$$

Si separamos el factor común $\dfrac{S}{(1+r)\,V_n}$ del primer paréntesis y $\dfrac{S}{V_n}$ del segundo, resulta:

$$P = \frac{S}{1+r} + \frac{S}{(1+r)V_n}\left(\frac{V_{n+1}}{1+r} + \frac{V_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{V_{n+3}}{(1+r)^3} + \ldots\right) -$$

$$- \frac{S}{V_n}\left(\frac{V_{n+1}}{1+r} + \frac{V_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{V_{n+3}}{(1+r)^3} + \ldots\right)$$

Observando ahora que cada uno de los dos últimos paréntesis puede expresarse, según vimos (*) al tratar de la renta vitalicia inmediata, por S_n, tendremos que la igualdad anterior se convertirá en

$$P = \frac{S}{1+r} + \frac{S}{(1+r)V_n} \times S_n - \frac{S}{V_n}\,S_n = \frac{S}{1+r} +$$

$$+ \frac{S}{1+r} \times \frac{S_n}{V_n} - S = \frac{S_n}{V_n}$$

y como $\dfrac{S_n}{V_n} = A_n$, resulta:

$$P = \frac{S}{1+r} + \frac{S}{1+r} \times A_n - S \times A_n = S\left(\frac{1}{1+r} + \frac{A_n}{1+r} - A_n\right)$$

ó bien

$$P = \frac{S(1-rA_n)}{1+r}$$

De cuya fórmula general se deducen fácilmente éstas:

$$S = \frac{P(1+r)}{1-rA_n};\ \text{y}\ A_n = \frac{S-P(1+r)}{Sr}$$

Ejemplos prácticos numéricos de seguros sobre la vida. — 1.º ¿Qué capital habrá de imponer una persona de 50 años de edad al objeto de que al ocurrir su fallecimiento, perciban sus herederos la suma de 10.000 duros? Adoptando la tabla IV de Duvillard para el valor A_{50} y suponiendo que el interés del dinero sea de 4 por 100, tendremos:

$$P = \frac{S(1-rA_{50})}{1+r} = \frac{10000\ (1-0'04 \times 11'0160)}{1'04} =$$

$$= \frac{10000 \times 0'559360}{1'04} = 5378'461\ \$$$

(*) Página 53.

2.º Averígüese la suma que un individuo deberá cobrar de una Compañía de seguros á la cual entregó su padre el capital de 5.378'461 duros, á los 50 años de edad.

$$S = \frac{P(1+r)}{(1-A_n r)} = \frac{5378'461 \times 1'04}{1 - 11'0160 \times 0'04} = 10000 \ \$$$

3.º ¿Cuál era la edad de una persona que impuso 5.378'461 duros para que, al ocurrir su fallecimiento, pudiera su hijo cobrar la cantidad de 10.000 duros?

$$A_n = \frac{S-P(1+r)}{S \times r} = \frac{10000-5378'461 \times 1'04}{10000 \times 0'04} = 11'016$$

cuya cantidad, en la correspondiente tabla de los valores de A_n, según Duvillard, se halla al frente de los 50 años, que es la edad que se busca.

Seguro sobre la vida cuando el heredero debe percibir una renta vitalicia. — En lugar de obligarse la Compañía á satisfacer de una sola vez al heredero del asegurado la suma S, puede comprometerse á pagar una renta vitalicia *a* al heredero de *m* años de edad, á cuyo contrato se designa con el nombre de *rentas vitalicias de supervivencia*.

La probabilidad de que el heredero perciba la pensión *a* al fin del primer año, será el producto de la probabilidad de muerte del asegurado al fin de este año, $1 - \frac{V_{n+1}}{V_n}$ por la probabilidad de vida de aquel, $\frac{V_{m+1}}{V_n}$, y de consiguiente, el capital que debería recibir de una sola vez el banquero para satisfacer la primera pensión *a* al heredero, sería:

$$\frac{a}{1+r} \times \frac{V_{m+1}}{V_m} \left(1 - \frac{V_{n+1}}{V_n}\right)$$

De análoga manera, la cantidad que debe cobrar el banquero para satisfacer la segunda pensión, vendrá representado por

$$\frac{a}{(1+r)^2} \times \frac{V_{m+2}}{V_m} \left(1 - \frac{V_{n+2}}{V_n}\right)$$

La correspondiente á la tercera pensión,

$$\frac{a}{(1+r)^3} \times \frac{V_{m+3}}{V_m} \left(1 - \frac{V_{n+3}}{V_n}\right)$$

así sucesivamente.

Ejecutando la suma de las anteriores cantidades (*), obten-

(*) Mediante las transformaciones de las páginas 53 y 66 dremos el capital P que debe recibir el banquero para satisfacer al heredero la renta vitalicia *a* desde la muerte del asegurado, y, de consiguiente, resulta:

$$P = a \times A_m - a \times A_{n,m} = a\ (A_m - A_{n,m})$$

Ejemplo práctico numérico para que el heredero perciba una renta vitalicia. — Una persona de 37 años de edad, quiere, para el caso de morir, asegurar á su madre de 57 años, una pensión vitalicia de 500 duros anuales. Se desea averiguar que capital deberá imponer la citada persona.

Según se deduce del enunciado del problema, $a = 500$; $m = 57$ (*); $n = 37$, y de las tablas de Duvillard resulta que $A_{57} = 9'1668$ y $A_{37,57} = 7'8056$ (**).

$$P = 500\ (9'1668 - 7'8056) = 500 \times 1'3612 = 680'60\ \$$$

Seguro sobre la vida cuando se constituye mediante la entrega de anualidades.—En lugar de imponer el asegurado de una sola vez el capital P, para que sus herederos perciban la suma S, entrega comunmente una cantidad anual *p* (***). Estas imposiciones representan una renta vitalicia en favor de la Compañía y en cabeza del asegurado, y de consiguiente, la cantidad necesaria para formar esta renta vitalicia, debe ser equivalente al referido capital P, teniendo en cuenta que el pago de dicha imposición empieza un año antes del en que debería comenzar si fuese una verdadera renta vitalicia, ya que ésta se entrega al fin de cada año, y aquélla se impone al principio.

Ahora bien, la cantidad necesaria para constituir una renta vitalicia anual *p* en cabeza de una persona de *n* años, es:

$$p \times A_n$$

y añadiendo el importe de una imposición *p*, toda vez que, conforme hemos dicho, el pago de ésta se verifica un año antes que si fuese una verdera renta vitalicia, la expresión anterior se convertirá en

$$p + p \times A_n$$

que, igualándola á P, resulta:

$$P = p + p \times A_n = p\ (1 + A_n)$$

(*) Según el ejemplo dado, la edad del beneficiario es de 57 años y la del causante 37 años.

(**) Este valor se halla en la tabla V de los valores de $A_{n,m}$; según la mortalidad de Duvillard.

(***) Varios autores designan á P con el nombre de ***prima única***, y á ***p*** con el de ***prima anual***.

de donde

$$p = \frac{P}{1+A_n} \quad (*)$$

y sustituyendo en lugar de P su valor $\frac{S(1-rA_n)}{1+r}$, que anteriormente obtuvimos (**), tendremos:

$$p = \frac{\frac{S(1-rA_n)}{1+r}}{1+A_n} = \frac{S(1-rA_n)}{(1+r)\ (1+A_n)}$$

cuya fórmula sirve para determinar la imposición anual p que el asegurado deberá entregar al objeto de que, al ocurrir su fallecimiento, perciban sus herederos de una sola vez la suma S.

De esta fórmula podrán fácilmente deducirse los valores de las demás cantidades que la integran, así:

$$S = \frac{p\ (1+r)\ (1+A_n)}{1-rA_n}$$

Ejemplo práctico numérico. — Cuál será la prima anual que debe satisfacer un individuo de 35 años de edad, que desea asegurar á sus herederos el capital de 10.000 pesetas, las cuales se obliga á entregarles la compañía aseguradora al ocurrir el fallecimiento de aquél.

$p = \frac{S\ (1-rA_{35})}{(1+r)\ (1+A_{35})}$, y dando valores según la tabla A_n de Duvillard, tendremos:

$$p = \frac{10000\ (1\text{-}0'04 \times 14'2138)}{(1+0'04)\ (1+14'2138)} = \frac{10000\ (1\text{-}0'568552)}{1'04 \times 15'2138} =$$

$$= \frac{10000 \times 0'431448}{15'822352} = \frac{4314'48}{15'822352} = 272'6826 \text{ pesetas}$$

Seguro sobre la vida constituido mediante anualidades para que el heredero perciba una renta vitalicia. — Puede también suceder que, entregando el asegurado la cantidad anual p desee que su heredero perciba, en lugar de la suma S, una renta vitalicia a.

Puesto que, según vimos (***), $P = a\ (A_m - A_{n,m})$ representa

(*) Esta fórmula sirve para convertir en prima ó imposición anual á la prima única P. Véanse los ejemplos numéricos el final del artículo destinado á la participación de beneficios.

(**) Véase página 76.

(***) En la página 78.

el capital que debe recibir el banquero de una sola vez para satisfacer al heredero de *m* años la renta vitalicia *a*, y toda vez que la imposición anual que deberá entregar el asegurado en equivalencia del valor $a\ (A_m - A_{n,m})$ es $p = \frac{P}{1 + A_n}$, sustituyendo en lugar de P el anterior valor, tendremos:

$$p = \frac{a\ (A_m - A_{n,m})}{1 + A_n}$$

Por medio de esta fórmula se hallará la cantidad *p* que el banquero debe recibir anualmente á fin de satisfacer al heredero del asegurado una renta vitalicia *a* desde que ocurra el fallecimiento de este último.

Ejemplo práctico numérico. — ¿Qué imposición anual deberá entregar una persona de 40 años, para que, al ocurrir su fallecimiento, perciba su hija, que actualmente tiene 20 años, una renta vitalicia de 1.000 pesetas anuales?

$a = 1000;\ A_m = (*)\ A_{20} = 16'4422;$ según la tabla de los valores A_n de Duvillard

$A_{n;m} = A_{20;40} = 11'2760;$ » » » $A_{n;m}$ »

$A_n = A_{40} = 13'2856;$ » » » A_n »

$$p = \frac{1000\ (16'4422 - 11'2760)}{1 + 13'2856} = \frac{5166'2}{14'2856} = 361'64 \text{ pesetas}$$

Seguros sobre la vida constituidos á favor de dos cabezas

Teoría. — De la misma manera que las rentas vitalicias, puede también el seguro constituirse sobre dos cabezas.

Este seguro consiste en el contrato por el cual la compañía se compromete á pagar un capital cuando fallezca una de las dos personas designadas, ó bien después del fallecimiento de las dos.

En ambas clases de contratos puede establecerse que la compañía reciba el precio del riesgo de una sola vez ó sea *prima única*, y también mediante *primas anuales*.

Representando, en el primer caso, por *n* y *m* la edad de una y otra persona, la probabilidad compuesta de la muerte de una de ellas dentro del primer año, será:

$$1 - \frac{V_{n+1} \times V_{m+1}}{V_n \times V_m}$$

Por lo tanto, la cantidad que el asegurador debería recibir para el caso de tener que pagar la suma S al fin del primer año, sería:

(*) Según el enunciado de este ejemplo práctico, la persona que debe percibir los resultados del seguro es actualmente de 20 años, y la que paga ó contrata aquél tiene 40 años de edad..

$$\frac{S}{1+r} \times \left(1 - \frac{V_{n+1} \times V_{m+1}}{V_n \times V_m}\right) = \frac{S}{1+r} \left(\frac{V_n \times V_m}{V_n \times V_m} - \frac{V_{n+1} \times V_{m+1}}{V_n V_m}\right)$$

De análoga manera la cantidad que debería cobrar el asegurador para satisfacer la suma S al fin del segundo año, vendría representada por

$$\frac{S}{(1+r)^2} \left(\frac{V_{n+1} \times V_{m+1}}{V_n \times V_m} - \frac{V_{n+2} \times V_{m+2}}{V_n \times V_m}\right)$$

La cantidad necesaria para satisfacer la repetida suma S al fin de tercer año, sería:

$$\frac{S}{(1+r)^3} \left(\frac{V_{n+2} \times V_{m+2}}{V_n \times V_m} - \frac{V_{n+3} \times V_{m+3}}{V_n \times V_m}\right)$$

y así sucesivamente.

Verificando la suma de los anteriores valores y representando por $A_{n,m}$ la expresión correspondiente, resultará:

$$P = \frac{S\ (1 + A_{n;m})}{1 + r} - S \times A_{n;m} = \frac{S\ (1 - rA_{n,m})}{1 + r}$$

De esta fórmula general pueden deducirse las correspondientes para hallar los valores de S, *r* y $A_{n,m}$.

Problemas prácticos de seguros sobre la vida constituidos á favor de dos cabezas. — Dando valores á cada una de las fórmulas que se pueden obtener para la resolución de los cuatro distintos casos que se pasan á enumerar, presentamos los problemas siguientes:

1.º Hallar la *prima única* necesaria para asegurar 10.000 duros al ocurrir el *primer fallecimiento* de dos personas de 30 y 45 años de edad respectivamente:

Substituyendo en la fórmula $P = \dfrac{S\ (1 - rA_{n;m})}{1 + r}$

$S = 10000$ $

$r = 0'04$ (por adoptarse la tasa del 4 por ciento al año ó sea 0'04 por 1).

$A_{n;m} = A_{30;15} = 10'1451$ (Según la tabla V para los valores de $A_{n;m}$ sobre dos cabezas, con arreglo á la mortalidad de Duvillard y 4 por ciento de interés; en el punto de encuentro de 30 años del más joven y diferencia de 15 años del más viejo.)

Resultará:

$$P = \frac{10000 \times (1 - 0'04 \times 10'1451)}{1'04} = \frac{10000 \times (1 - 0'405804)}{1'04} =$$

$$= \frac{10000 \times 0'594196}{1'04} = \frac{594196}{104} = 5713'42 \text{ \$ prima única}$$

2.º Con análogos datos del problema anterior, búsquese la *prima anual* que debería satisfacerse á la compañía hasta ocurrir el primer fallecimiento de una de las dos personas.

Dando á la fórmula $p = \dfrac{P}{1 + A_{n;m}}$ los valores

$P = 5713'42$

$A_{n;m} = A_{30;15} = 10'1451$; tendremos

$$p = \frac{5713'42}{1 + 10'1451} = \frac{5713'42}{11'1451} = 512'64 \text{ \$ prima anual}$$

Con los mismos datos del primer ejemplo, resolvamos el problema en el supuesto de que deseamos averiguar el importe de la *prima única* en el caso de que la compañía aseguradora no deba entregar el capital de 10.000 duros á los herederos, sino hasta *después que hayan fallecido los dos asegurados.*

Mediante la fórmula

$$P = S\,\frac{\left((1 - rA_{30}) + (1 - rA_{35}) - (1 - rA_{30;45})\right)}{1 + r}$$

A la cual corresponden los valores siguientes:

$S = 10000$ \$

$r = 0'04$

$A_{30} = 15'0210$ (que se encuentra enfrente de los 30 años de la tabla IV el valor de A_n según Duvillard, para una sola cabeza.)

$A_{45} = 12'2176$ (que se encuentra enfrente de los 45 años en la misma tabla anterior.)

$A_{30;45} = 10'1451$ (en el punto de encuentro de 30 años, edad del más joven, y 15 años de diferencia, en más, del viejo, de la tabla V para dos cabezas.)

$$\text{Tendremos: } P = \frac{10000\left((1-0'04 \times 15{,}0210) + (1-0'04 \times 12'2176) - (1 - 0'04 \times 10'1451)\right)}{1'04} = \frac{10000(0'399160 + 0'511296 - 0'594196)}{1'04} =$$

$$= \frac{10000 \times 0'316260}{1'04} = \frac{316260}{1'04} = 3041 \text{ \$ prima única}$$

4.º Con análogos datos del problema anterior, búsquese el importe de la *prima anual* que debería satisfacerse á la compañía en el caso de que ésta no haya de pagar el capital á los herederos hasta el *último fallecimiento,* ó sea cuando habrán fallecido los dos.

Sustituyendo los correspondientes valores á la fórmula p' =

$$= \frac{P}{1 + A_{30} + A_{45} - A_{30;45}} \text{ resulta:}$$

$$p = \frac{3041}{1 + 15'0210 + 12'2176 - 10'1451} = \frac{3041}{18'0935} = 168'07 \text{ \$}$$

prima anual.

Seguro mixto

Preliminares. — Se designa con el nombre de *Seguro mixto* al contrato en virtud del cual la Compañía se obliga á pagar cierto capital al fallecimiento del asegurado, si aquel ocurre dentro un plazo fijado, y al fin de este mismo plazo si el asegurado continúa viviendo.

La expresada combinación es una de las más ingeniosas del seguro sobre la vida, pues reune á la vez todas las ventajas de las imposiciones con interés á plazo fijo, así como también las que proporciona el seguro de vida entera. De modo que puede considerarse como un compuesto del seguro en caso de vida y del seguro en caso de muerte, ya qúe el asegurado percibirá un capital si vive á la terminación del plazo señalado, ó en cambio dejará otro á sus herederos si hubiera fallecido.

La Compañía aseguradora contraerá mayor obligación que la que representa, de por sí, cada una de dichas clases de seguros. En efecto, si el plazo fijado es, por ejemplo, de 20 años, puede estimarse como si la Compañía asume dos riesgos: por el primero se compromete á pagar un capital dentro 20 años (que es el mínimum de su compromiso), y por el segundo se obliga, en caso de muerte del asegurado, á anticipar el pago, siendo así que particularmente en el seguro caso de vida, la Compañía no debería satisfacer capital alguno si el asegurado fallece antes del plazo estipulado.

Por ello es que las Compañías aplican para los seguros mixtos, la misma tabla de mortalidad que emplean para calcular las primas de los seguros en caso de muerte.

Prima única. — Existen varios métodos para calcular la prima única del seguro mixto, descomponiendo esta operación en otras equivalentes, pero por estimarlo más fácil, adoptamos las siguientes:

Representemos por a la edad del asegurado y por n la duración del seguro y supongamos que el capital asegurado S sea pagadero al cabo de un año del fallecimiento.

El valor actual del contrato es igual á la suma de los valores actuales:

1.º De un seguro temporal de n años á la edad a, que es

$$P_a - P_{a+n} \times \frac{V_{a+n}}{V_a\,(1+r)^n} \text{ y}$$

2.º Del capital S exigible á la terminación de los n años, que es

$$\frac{S \times V_{a+n}}{V_a\,(1+r)^n}$$

y por lo tanto, designando por P_b al valor actual del contrato, tendremos:

$$P_b = P_a - P_{a+n} \times \frac{V_{a+n}}{V_a\,(1+r)^n} + \frac{SV_{a+n}}{V_a\,(1+r)^n}$$; y sustituyendo P_a y P_{a+n} por sus correspondientes valores (*) resultará:

$$P_b = \frac{S(1-rA_a)}{1+r} - \frac{SV_{a+n}(1-rA_{a+n})}{V_a\,(1+r)^{n+1}} + \frac{SV_{a+n}}{V_a\,(1+r)^n}$$; y simplificando

$$P_b = S\left(\frac{V_a\,(1+r)^n\,(1-rA_a) + V_{a+n}r(1+A_{a+n})}{V_a\,(1+r)^{n+1}}\right)$$; de donde

$$S = \frac{P_b\,V_a\,(1+r)^{n+1}}{V_a\,(1+r)^n\,(1-rA_a) + V_{a+n}(1+A_{a+n})};$$

Prima temporal ó sea anual limitada. — En la práctica no puede el seguro mixto realizarse por medio de primas anuales pagaderas durante toda la vida del asegurado, pero podrá efectuarse siendo estas primas temporales, pagaderas solamente por toda la duración del seguro n años ó por un tiempo menor m años.

Por lo tanto la prima anual correspondiente á la fórmula anterior, para el primero de los dos casos que presentamos, será:

$$p_b = \frac{P_b}{1+{}_{n-1}A_a} = \frac{S\left(V_a\,(1+r)^n\,(1-rA_a) + V_{a+n}r\,(1+A_{a+n})\right)}{(1+{}_{n-1}A_a)\,V_a\,(1+r)^{n+1}}$$

y el capital asegurado

$$S = \frac{p_b\,(1+{}_{n-1}A_a)V_a\,(1+r)^{n+1}}{V_a\,(1+r)^n\,(1-rA_a) + V_{a-n}r(1+A_{a+n})};$$

y para el segundo, ó sea para cuando la prima anual deba pagarse un número de años m menor que n resultará:

(*) Véase la página 76.

$$(*)\ p_b = \frac{P_b}{1+{}_{m-1}A_a} = \frac{\left(S(V_a(1+r)^n\,(1-rA_a\,)+V_{a+n}r(1+A_{a+n})\right)}{(1+{}_{m-1}\,A_a\,)V_a\,(1+r)^{n+1}}\ ;$$

De donde obtendremos también el importe del capital asegurado, despejando la S.

$$S = \frac{p_b\,(1+{}_{m-1}\,A_a\,)V_a\,(1+r)^{n+1}}{V_a\,(1+r)^n\,(1-rA_a\,)+V_{a+n}r(1+A_{a+n})}\ ;$$

VI

TONTINAS

PRELIMINARES. — Otra de las curiosas y útiles aplicaciones del cálculo de las probabilidades estriba, precisamente, en la constitución de las sociedades particulares designadas con el nombre de *Tontinas,* en recuerdo de su inventor el banquero italiano Lorenzo Tonti en el siglo XVIII (*).

Pueden distinguirse dos clases de tontinas, consiste la primera en la agrupación de cierto número de individuos de una misma edad, que aportan al fondo común una cantidad determinada, para repartírsela, junto con los intereses compuestos, al cabo del tiempo fijado entre los sobrevivientes proporcionalmente á las imposiciones que hubieren hecho. De modo que esta especulación puede compararse, en cierto modo, á una apuesta, entre cada asociado y todos los demás en que el primero ganaría si aun vive al término de la fecha determinada.

En la segunda especie de tontinas no es el fondo común lo que se reparte sino que éste se conserva y acrece indefinidamente con las aportaciones de las series de nuevos socios; series que se abren en fechas fijas á cada principio de año. Lo que se distribuye es la renta producida por este fondo común entre los sobrevivientes que se encuentran en las condiciones especificadas en los Estatutos. Estas asociaciones reciben el nombre particular de *Chatelusianas*.

Existen otras, llamadas *mixtas,* que durante cierto tiempo sólo reparten la renta, y al llegar una época prefijada se reparte el capital acumulado.

Es evidente, pues, que los cálculos relativos á las tontinas son siempre como sucede en los seguros sobre la vida, una combinación de las reglas de interés compuesto con el empleo de las tablas de mortalidad.

(*) Reemplazadas, en cierto modo, las tontinas por las diversas combinaciones que ofrecen las compañías de seguros, cual fundación es de época posterior, quedan aquéllas relegadas á la constitución de *cajas dotales* para cuando las niñas sean casaderas ó bien para librar á los varones del servicio activo militar. Generalmente se fija como término la edad de los 20 años cumplidos admitiéndose el ingreso en la asociación desde el acto del nacimiento hasta los 10 años

Teoría. — Designemos por P el capital impuesto por cada socio, S la suma correspondiente á cada uno de ellos al terminar la sociedad, *n* número de años de duración de la misma, *m* la edad de cada socio al constituirse aquélla, y V_m, y V_{m+n}, número de sobrevivientes á las edades *m* y $m+n$ respectivamente.

Ahora bien, el capital P de cada socio al cabo de *n* años, por razón de sus intereses compuestos de *r* por 1, se habrá convertido en $P\ (1+r)^n$, luego el capital de los V_m socios que componen la sociedad al constituirse, con una misma imposición, será al cabo de *n* años $P\ (1+r)^n \times V_m$; y como del grupo V_m que hoy constituye la sociedad, al cabo de *n* años tan sólo existirán V_{m+n}, y debiendo repartirse entre éstos aquella cantidad, resulta que cada individuo cobrará en el referido término

$$S = \frac{P\ (1 + r)^n \times V_m}{V_{m+n}};\ y\ P = \frac{S \times V_{m+n}}{V_m\ (1+r)^n}$$

Ejemplo práctico numérico. — Un grupo de 734 personas de 30 años de edad, se asocian por 25 años, poniendo cada una 1.000 pesetas en fondo común; se pregunta qué parte corresponderá á cada asociado sobreviviente al fin de este tiempo (según la tabla de Deparcieux), devengando el capital el interés compuetos del 4 % anual.

$P = 1000$; $(1 + r)^n = 1'04^{25}$; $V_{30} = 734$ sobrevivientes á los 30 años (según la tabla I y que son los que han constituído la sociedad): $V_{30+25} = 526$ sobrevivientes según dicha tabla I.

$$S = \frac{1000 \times 1'04^{25} \times 734}{526} = \frac{2665'8363}{526} = \frac{1956723'87}{526} = 3720 \text{ pesetas}$$

Casos particulares. — 1.º Si las puestas de los socios fueran desiguales, la operación quedará reducida á hallar el acrecentamiento de la unidad en el tiempo que haya de durar la asociación, multiplicar aquél por la puesta de cada socio y dividir cada producto por el número de sobrevivientes á la edad $m + n$.

En efecto; si las puestas de cada socio son P, P,' P,"......, cada unidad monetaria se convertirá en $(1 + r)^n$ y para cada unidad entregada en fondo común corresponderá á los sobrevivientes $\frac{(1 + r)^n\ V_m}{V_{m+n}}$; luego P, P,' P," etc., unidades se convertirán en:

$$S = \frac{P(1+r)^n\ V_m}{V_{m+n}};\ S' = \frac{P'(1+r)^n\ V_m}{V_{m+n}};\ S'' = \frac{P''(1+r)_n\ V_m}{V_{m+n}};\ \text{etc}$$

2.º Si después de transcurridos *t* años de constituída la sociedad ingresara un nuevo socio debería suponerse reducida su puesta á la cantidad correspondiente, referida á la fecha origen de la asociación.

En efecto:

El capital de los V_m socios al cabo de los *t* años se habrá convertido en $P(1+r)^t \times V_m$ y á cada sobreviviente á la edad $m+t$ le correspondería $\frac{P(1 \times r)^t \times V^m}{V_{m+t}}$; por lo tanto, si el que ingresa al cabo de *t* años quiere que al terminar la sociedad, caso de vida, se le reparta la misma cantidad que á los demás sobrevivientes, es preciso que cuando entre en la sociedad haga mayor imposición, ó sea $\frac{P(1+r)^t \times V_m}{V_{m+t}}$, para que participe de la misma cantidad que los demás. Pero si no se tiene en cuenta esta consideración entregando una cantidad P' mayor ó menor que la anterior, también el día del reparto le tocará una suma S' mayor ó menor que S, la cual vendrá representada por la fórmula

$$S' = \frac{P'(1+r)^{n-t} \times V_{m+t}}{V_{m+n}} \text{ y } P' = \frac{S' \, V_{m+n}}{V_{m+t}(1+r)^{n-t}}$$

EJEMPLOS PRÁCTICOS NUMÉRICOS.—1.º Si entra á formar parte de la anterior tontina un nuevo individuo al cabo de 5 años de estar constituída aquélla y suponiendo que este socio desea cobrar á la terminación de la misma 3.720 pesetas como los demás que hayan sobrevivido, deberá hacer una puesta de 1.286'78 pesetas. En efecto, según la tabla I, $V_{30} = 734$; $V_{30+5} = 694$ sobrevivientes y por lo tanto,

$$\frac{P(1+r)^t \times V_m}{V_{m+t}} = \frac{1000 \times 1'04^5 \times 734}{694} = \frac{893023'23}{694} = 1286'78^{(*)} \text{ pts.}$$

2.º En el caso de que el nuevo socio impusiera en el fondo común una cantidad diferente de la anterior, haríamos aplicación de la fórmula establecida para hallar la parte que le corresponde, así,

(*) Podrá efectuarse la prueba ó comprobación de este resultade, aplicándolo al primer problema numérico que hemos presentado al ocuparnos en las tontinas, mediante la fórmula siguiente:

$$S = \frac{P(1+r)^n \times V_m}{V_{m+n}}, \text{ á la cual daremos los correspondientes valores:}$$

$$S = \frac{1286'7769 \times 1'04^{20} \; V_{35}}{V_{30+25}} = \frac{1286'7769 \times 2'19112314 \times 694}{526} =$$

$$= \frac{1956723'72816}{526} = 3720 \text{ pesetas}$$

suponiendo que su puesta es sólo de 1.000 pesetas, se tendrá, fijándonos en los anteriores datos y en que según la tabla I: $V_{m+t} = V_{30+5} = 694$; $V_{m+n} = V_{30+25} = V_{55} = 526$: $S' = \frac{P' (1 + r)^{n-t} \times V_{m+t}}{V_{m+n}}$

$$S' = \frac{1000 \times 1'04^{20} \times V_{30+5}}{V_{30+25}} = \frac{1000 \times 2'19112 \times 694}{526} =$$

$$= \frac{2191'12 \times 694}{526} = \frac{1520637'28}{526} = 2890'945 \text{ pesetas}$$

que percibirá al terminarse la tontina el nuevo socio que entró 5 años más tarde y que únicamente fué su puesta de 1.000 pesetas.

VII

RESERVAS, REDUCCION DEL SEGURO, RESCATE, Y PARTICIPACION DE BENEFICIOS

DEFINICIÓN. — Se entiende por previsiones, garantías ó reservas los valores que siempre deben tener disponibles las compañías de seguros para hacer frente á los pagos de vencimiento desconocido.

De modo que el afianzamiento de la solvencia de las compañías respectivas viene constituído por la suma de las cantidades destinadas al indicado fin, junto con sus intereses compuestos, más los premios futuros que se han de recaudar sobre las pólizas vigentes.

TEORÍA. — Las reservas en los seguros sobre la vida, están fundadas en un principio de previsión como en toda otra clase de negocios, pero tienen un carácter especial que las distingue de las demás, puesto que se originan de las circunstancias particulares que concurren en cada uno de los asegurados; por lo cual no es uniforme y su importancia varía según las diferentes edades á que se refiere el tipo de la prima anual. Así vemos que un asegurado, por la combinación vida entera, á la edad de 30 años paga una prima anual inferior á la que debería satisfacer asegurándose en los años sucesivos. En la combinación á primas temporales, la prima crece á medida que el plazo es más reducido; en el seguro de supervivencia aumenta aquella á medida que es mayor la edad del socio y disminuye la del beneficiario, etc., etc. De modo que siendo la prima anual fija é invariable, desde el momento que no se alteran las condiciones del contrato celebrado, sufriría aquélla una variación si en el transcurso de los años dicho individuo hubiese de contratar el mismo seguro.

Así, pues, sea un asegurador á los 35 años, en la combinación vida entera, por 10.000 pesetas; á esta edad deberá satisfacer una prima anual de 273 pesetas, pero si tuviera 36 años, para asegurar las mismas 10.000 pesetas esta prima sería de 280 pesetas, esto es, algo mayor que la primera, por la sencilla razón que aumentan las probabilidades del siniestro; la diferencia sería muy notable si el asegurado hubiera cumplido los 50 años, y mucho mayor en las edades sucesivas; pero como el individuo firmó el contrato á los 35 años, lo mismo satisfará á esta edad que á 40 años, que á 50, u que á otra edad más avanzada, luego debe formarse un fondo especial y personal de reserva, deducido del producto de sus primas anuales satisfechas, que vaya compensando dichas diferencias que no viene obligado á pagar.

Según esto, para proceder al cálculo de la reserva hemos de averiguar previamente la cantidad que satisface el socio según la edad en que contrató el seguro y después la que habría de pagar si lo efectuara en las épocas posteriores. De lo cual provendrá una diferencia de prima (y de consiguiente una diferencia de capital asegurado) la que tendrá necesariamente un valor actual ó sea la prima única respectiva que representa la reserva en el momento de la operación.

Por lo tanto, haciendo más concreto el concepto de la reserva diremos que es aquella cantidad que se necesita para asegurar la diferencia de dos capitales contratados con una misma prima y en dos edades distintas.

EJEMPLOS PRÁCTICOS. — PAra aclarar las consideraciones anteriores vamos á proponer algunos ejemplos:

1.º Cuál será la reserva, al cabo de un año, para un individuo que á la edad de 35 años contrata un seguro de vida entera de 10.000 pesetas?

La prima anual necesaria para asegurar á los 35 años 10.000 pesetas es $p = \frac{10.000\,(1 - rA_{35})}{(1+r)\,(1+A_{35})} = 273$ pesetas (*)

Pero si el asegurado al cabo de 1 año, ó sea á la edad de 36 años, contratara un nuevo seguro, con la prima correspondiente á los 35, no aseguraría 10000 pesetas, sino una cantidad menor, que hallaremos por la correspondiente fórmula, sabiendo que $p = 273$; $1+r = 1'04$; $1+A_{36} = 1 + 14'0388$ (según la tabla IV de Duvillard) $15{,}0388; 1-rA_{36} = 1 - 0'04 \times 13'0388 = 1 - 0'5511552 = 0'438448$.

$$(^{**})S = \frac{p\,(1+r)\,(1+A_{36})}{1-rA_{36}} = \frac{273 \times 1'04 \times 15'0388}{0'438448} = \frac{4269'8161}{0'4384} =$$
$$= 9735 \text{ pesetas.}$$

Por lo tanto, resulta:

(*) Véase página 79.

(**) Esto se deduce de las fórmulas $p = \frac{P}{1+A_n}$ y $P = \frac{S(1-rA_n)}{1+r}$ que sustituyendo se convierte en $p = \frac{S(1-rA_n)}{(1+r)\,(1+A_n)}$, de donde se obtiene $S =$
$= \frac{p\,(1+r)\,(1+A_n)}{1-rA_n}$, según vimos en las páginas 76 y 79.

Capital asegurado á los 35 años, con una prima anual de 273 pesetas	10.000 ptas.
Capital asegurado á los 36 años con una prima anual de 273 pesetas	9.735 »
Capital reducido......	265 ptas.

La prima única de este capital reducido constituye la reserva del contrato que nos ocupa, el cual debe figurar en los registros de la Compañía y en la cartera del asegurado, como elemento que compense las partes de capital que no asegura una prima fija á una edad posterior á la en que se celebró el contrato, y el más importante del valor real de la cartera de una compañía.

Esta reserva será, pues:

$$P = \frac{265\ (1 - rA_{36})\ (*)}{1+r} = \frac{265 \times 0'438448}{1'04} = 111'72 \text{ pesetas}$$

2.º Calcular el importe de la reserva al cabo de 15 años por un seguro de 10.000 pesetas contratado á los 35 en la combinación de vida entera:

La prima anual necesaria para asegurar á 35 años de edad 10.000 pesetas, es de 273 pesetas, luego tendremos:

Capital asegurado á los 35 años de edad, con una prima anual de 273 pesetas .... 10.000 ptas.

Capital asegurado á los $35 + 15$ años $= 50$ años edad, en que calculamos la reserva, con la prima anual de 273 pesetas, $S = \frac{p\ (1+r)\ (1+A_{50})}{1 - rA_{50}} =$

$$= \frac{273 \times 1{,}04 \times 12'0160}{0'55936} = \qquad 6.099\ »$$

Capital reducido á los 50 años de edad......... 3.901 ptas.

y por lo tanto la reserva de este seguro á la edad de 50 años en que se opera, será:

$$P = \frac{S\ (1 - rA_{50})}{1 + r} = \frac{3901\ (1 - 0'04 \times A_{50})}{1'04} =$$

$$= \frac{3901\ (1 - 0'04 \times 11'0160)}{1'04} = \frac{3901 \times 0'55936}{1'04} = 2098'13 \text{ ptas.}$$

Resumen. — Como quiera que las operaciones para el cálculo de las reservas descansan para todas las diversas combinaciones en análogo principio al que dejamos expuesto anteriormente, nos

(*) Nos hemos referido para el cálculo de la prima única á la edad de 36 años, en la cual hay que suponer que se efectuó la operación.

abstenemos de entrar en repeticiones inútiles que sólo conducirían á hacer interminable nuestra labor; y tanto más, desde el momento que existen tablas calculadas para la rápida resolución de esta materia sin necesidad de emplear fórmula alguna.

Réstanos decir que los mentados fondos de reserva, que componen una de las garantías de la compañía, son, generalmente, aumentados con un tanto por ciento de los beneficios, al objeto de prevenir cualquier otra contingencia imprevista que pueda presentarse, aun en los negocios financieros más sólidos y mejor administrados.

Reducción de un seguro

Concepto. — Uno de los caracteres distintivos del seguro es la eliminación del azar, pues desde el momento que se firma el contrato y se paga la primera prima, la compañía aseguradora acepta todas sus consecuencias, viniendo á su cargo el riesgo del siniestro total.

Causas agenas á la voluntad del asegurado pueden obligarle á suspender la continuación del contrato. Si las primas ya desembolsadas han cubierto los gastos de Administración y las comisiones que aquél motivó, no hay razón plausible para que el seguro deje de constituir un capital, y al efecto se establece generalmente que continúa existente el mismo, si bien que introduciendo la debida modificación.

En efecto, al asegurado que suspende el pago de su cuota, no sería equitativo condenarle á la pérdida total del fruto de las entregas efectuadas. Verdad es que no habiendo cumplido por su parte las condiciones de la póliza, tampoco podrá exigir que las cumpla la Compañía interesada, pero ésta puede canjear la primitiva póliza por una de saldada que sin imponerle gasto alguno asegure á aquél, de conformidad con las reglas que se habían establecido en el contrato primitivo, una fracción proporcional del capital entregado, lo cual constituye un *seguro reducido.*

Cálculo para los seguros en general. — El valor del nuevo seguro motivado por la suspensión en el pago de las primas consiste en la diferencia entre los capitales asegurados en las dos distintas edades, ó sea igual al valor de la reserva, si bien las compañías rebajan comunmente un tanto por ciento que les reintegre de los gastos generales, todo con arreglo á tarifas previamente establecidas.

Para mayor claridad propongamos un ejemplo en los dos casos que puedan presentarse en la práctica:

Primer caso: *Cuando el seguro se contrató á primas anuales pagaderas á la compañía durante toda la vida del asegurado.*

Sea un individuo que á la edad de 35 años aseguró 10.000 pesetas á sus herederos en la combinación vida entera, mediante una prima anual de 273 pesetas y suponiendo que haya cesado en el pago de las primas á la edad de 50 años, tendremos:

Si el referido individuo asegurase las citadas 10.000 pesetas á la edad de 50 años, pagaría una prima anual mayor que 273; luego á dicha edad con las 273 pesetas anuales no aseguraría 10.000 pesetas, sino una cantidad menor, que hallaremos por la fórmula

$$S = \frac{P\ (1 + r)\ (1 + A_{50})}{1 - rA_{50}} = \frac{273 \times 1'04 \times 12'0160}{0'55936} = 6099$$

Por consiguiente esta cantidad á los 50 años deja de estar asegurada por la suspensión del pago de primas, y por lo tanto el capital reducido á esta edad y pagadero por parte de la compañía á la muerte del asegurado, será la diferencia 10.000 — 6.099 = 3.901 pesetas (*).

Segundo caso: *Cuando el seguro es contratado á primas anuales pagaderas por un número determinado de años.*

El cálculo para la reducción de un seguro á primas temporales es análogo que el que se emplea para cuando es contratado á primas vitalicias, puesto que la combinación es la misma, variando tan sólo la prima exigible, que es tanto mayor cuanto menor sea el plazo estipulado.

Supongamos un asegurado á los 35 años por 10.000 pesetas en la combinación vida entera, contratada mediante primas temporales durante 15 años, y demos por sentado que suspende los pagos al cabo de 5 años. Este individuo á los 35 años, para asegurar 10.000 pesetas, debe pagar una prima anual de:

$$(^{**})\ p = \frac{P}{1 + {}_{m-1}A_a} = \frac{S\ (1 - r\ A_a)}{(1 + r)\ (1 + {}_{m-1}A_a)} = \frac{10.000\ (1 - 0'04 \times A_{35})}{(1 + 0'04)\ (1 + {}_{14}A_{35})} =$$

$$= \frac{10.000\ (1 - 0'04 \times 14'2138)}{1'04\ (9'3118)\ (^{***})} = \frac{4314'48}{10'72} = 402'47 \text{ ptas.}$$

por consiguiente, si al cabo de 5 años, edad en que suspende el

---

(*) Obtenemos, como corresponde, igual resultado que el del problema continuado en la página 92 al tratar de las reservas, previsiones ó garantías de las Compañías.

(**) Véase página 79.

$$(^{***})\ {}_{m-1}A_a = A_a - \frac{1}{(1+r)^{m-1}} \times \frac{V_{a+m-1}}{V_a} \times A_{a+m-1} =$$

$$= A_{35} - \frac{1}{(1+r)^{14}} \times \frac{V_{49}}{V_{35}} \times A_{49} =$$

$$= 14'2138 - 0'577475 \times \frac{304662}{404012} \times 11'2659 = 14'2138 - 4'9020 = 9'3118$$

Datos: $A_{35} = 14'2138$; $A_{49} = 11'2659$; $V_{49} = 304662$; $V_{35} = 404012$. según Duvillard.

pago, hubiese de efectuar un nuevo seguro, con la prima de 402,47 pesetas anuales pagaderas por 10 años que faltan para concluir el compromiso, únicamente aseguraría:

$$S = \frac{P\,(1+r)\,(1+{}_9A_{40})}{1-r\,A_{40}} = \frac{402'47 \times 1'04 \times 7'7515}{0'468576} = \frac{3244'5361}{0'468576} = 6924$$

Por consiguiente la diferencia 10.000—6.924=3.076 pesetas, será el capital reducido de la operación que nos ocupa al cabo de 5 años, ó sea á la edad de 40 años, que corresponderá percibir al heredero á la muerte del asegurado.

Cálculo para los seguros mixtos. — Para el seguro reducido en el mixto y á término fijo debe procederse de una manera muy distinta, ya que proviene del plazo limitado con que se distinguen estas combinaciones.

En efecto, las primas pagadas por el asegurado deben considerarse como partes integrantes para constituir el capital que se fijó en la póliza en una época convenida, resultando de esto que cada prima anual en un seguro mixto establecido á 15 años plazo, representará $\frac{1}{15}$ del capital asegurado.

Por lo tanto, el valor de un capital reducido, siempre que se hayan satisfecho las 3 primas, será el cociente de dividir el importe total de las primas pagadas por el plazo máximo del seguro.

Ejemplo. — Si un asegurado, en cualquier edad, por un capital de 10.000 pesetas á 15 años, en la combinación *mixta* ó á *término fijo*, cesa en el pago de las primas después de haber satisfecho la 5.ª ¿Qué capital percibirán los herederos al fallecimiento de aquél? Puesto que cada prima anual representa $\frac{1}{15}$ del capital asegurado, habiéndose hecho efectivas 5 primas, se habrán realizado $\frac{5}{14}$ de dicho capital, luego el seguro reducido tendrá por valor

$$\frac{5}{15} \times 10.000 = \frac{50.000}{15} = 3333'33 \text{ pesetas}$$

que es el que cobrarán los herederos á la muerte del asegurado.

Valor de un rescate

Concepto. — El rescate es el pago de un capital reducido, después de haber hecho efectivas las tres primeras anualidades, cuando el asegurado rescinde el contrato. Según llevamos dicho la Compañía está obligada á pagar forzosamente el capital convenido cuando tenga lugar el siniestro; en cambio aquella, estipulándose el contrato á primas anuales ó temporales, no tiene la certeza de cobrar éstas para constituir el capital asegurado.

Puede suceder en ciertos casos, que la compañía sea la que rescinda el contrato, la cual está en su derecho, siempre que el asegurado, saliéndose de los términos fijados en la póliza, aumentara las probabilidades de muerte, contrariando así las leyes del seguro.

Por otra parte, no alcanza el rescate á todas las combinaciones de seguros, así por ejemplo, el seguro de supervivencia y el temporal no lo tienen, ya que falleciendo el beneficiario en el primer caso ó el sustituto en el segundo, las primas son debidas á la compañía y el seguro queda entonces anulado.

De modo que, en términos generales, puede decirse que tienen opción al rescate las siguientes combinaciones:

El seguro vida entera á primas vitalicias.
El seguro vida entera á primas temporales.
El seguro mixto.
El seguro á término fijo.

Y aun en estas combinaciones espreciso, según ya se manifestó, que el socio haya satisfecho, á lo menos, tres primas, pues de lo contrario, además del riesgo que corre la Compañía, el asegurado caso de muerte no cubriría los gastos generales que ocasiona cada contrato de por sí.

En tal concepto el precio de un rescate es igual á la *reserva* rebajada, comunmente, de un 20 por 100, siempre que se hayan pagado de tres á seis primas y sólo de un 15 por 100 cuando el número de primas satisfechas exceda de seis, ó bien del tanto por ciento que en cada caso fije el Consejo de Administración de la compañía aseguradora.

CÁLCULO Y EJEMPLO PARA EL SEGURO VIDA ENTERA. — El cálculo del valor del rescate, después de lo explicado al tratar de las reservas, es sumamente fácil, conforme vamos á ver en los siguientes ejemplos:

1.º Averiguar el rescate á que tiene derecho á los 40 años un individuo que aseguró 10.000 pesetas á la edad de 35 años.

La prima anual necesaria para asegurar 10.000 pesetas á la citada edad de 35 años, es $p = \frac{S(1 - r A_{35})}{(1+r)(1+A_{35})} = 273$ pesetas (*)

Capital asegurado á los 35 años, con 273 pesetas de prima anual	10.000 ptas.
Capital asegurado á los 40 años con 273 pesetas de prima anual $S = \frac{p(1+r)(1+A_{40})}{1 - rA_{50}}$ ..	6.522 »
Capital reducido á los 40 años	3.478 ptas.

(*) Véase página 79.

La reserva será pues:

$$(*)\ P = \frac{S(1 - rA_{40})}{1 + r} = \frac{3478\,(1\text{-}0'04 \times 13'2856)}{1'04} =$$

$$= \frac{1629'707328}{1'04} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ 1.567 \text{ ptas.}$$

Por lo tanto resulta:

Reserva á los 40 años de edad	1.567	ptas.
Deducción del 20 por 100, puesto que únicamente están satisfechas 5 primas	313'40	»
Valor del rescate	1.253'60	ptas.

Las primas desembolsadas por el asegurado en los cinco años que ha durado el contrato ascienden á $5 \times 273 = 1.365$; el rescate que tiene derecho á percibir es de 1.253'60, ó sean 111'40 pesetas menos, lo cual no es muy oneroso para el asegurado si se tiene en cuenta que la compañía en estos cinco años pudo haber sufrido el siniestro total de 10.000 pesetas.

2.º Supongamos que en el último ejemplo se desea averigua el valor del rescate á la edad de 50 años. El valor de la reserva, según vimos en la página 92 al tratar de éstas, es 2.098'13, y deduciendo el 15 por 100 por haberse pagado más de 6 anualidades, tendremos para el valor del rescate 2.098'13—314'72 = 1.783'41 pesetas.

El importe de las primas satisfechas hasta la fecha de la liquidación fué de $15 \times 273 = 4.095$ pesetas, que con respecto al valor del rescate existe una diferencia de 2.311'59 pesetas; de donde tenemos que cuanto mayor es el número de primas pagadas es menor á proporción, el rescate, lo cual es fácil de comprender, atendiendo á que la compañía ha corrido mayor probabilidad de experimentar el riesgo total.

Cálculo para el seguro mixto. — El cálculo del rescate en el seguro mixto y á plazo fijo, es distinto del que hemos empleado en el seguro de vida entera, lo cual previene de la fijeza del plazo que es la característica de dichas operaciones.

En tal caso, el precio del rescate, en un tiempo determinado, siempre que se hayan pagado tres anualidades, es la cantidad que colocada al interés compuesto del 5 por 100 (*) por los años que faltan para la terminación del contrato, daría el capital reducido en el momento de calcular el rescate, pagadero al finalizar las condiciones de la póliza, según veremos en el ejemplo siguiente:

(*) Véase página 92.

(**) Señalamos el 5 por 100 para establecer el descuento que se acostumbra en estas combinaciones; no obstante, en cada caso el tanto por ciento será fijado por la respectiva compañía.

Sea un asegurado, en cualquier edad, por un capital de 10.000 pesetas á 15 años plazo, en la combinación mixta ó á plazo fijo, y supongamos que el asegurado cesa en el pago de las primas á los 5 años. Recordando lo expuesto al tratar de la reducción de un capital en estas combinaciones, resulta que cada prima anual, en este ejemplo concreto, asegura $\frac{1}{15}$ del capital de 10.000 pesetas; por lo tanto, habiéndose ya satisfecho 5 primas se habrán realizado $\frac{5}{15}$ del capital asegurado, ó lo que es lo mismo,

$$\frac{5}{15} \times 10000 = \frac{50000}{15} = 3333'33 \ (*)$$

Estas 3333,33 pesetas forman el capital reducido. Ahora bien, como para llenar las condiciones de la póliza faltan aun 10 años, hallaremos el valor actual de las 3333,33 pesetas, pagaderas al fin del citado plazo mediante la fórmula del descuento racional compuesto $v = \frac{V}{(1+r)^a}$

$$\frac{3333'33}{(1+r)^{10}} = 3333'33 \times \frac{1 \ (**)}{(1+0'05)^{10}} = 3333'33 \times 0'613713 =$$

$$= 2046'37 \text{ pesetas}$$

y éste será el valor del rescate de dicha operación ó sea después de haber hecho efectivas 5 anualidades.

Participación de beneficios en los Seguros

Preliminares. — Se entienden por tales beneficios los que resultan de las compañías de seguros como sobrantes de las primas que satisfacen los asegurados.

Si la mortalidad, el tipo de interés que produzcan los valores de las primas en poder de la compañía, los gastos de Administración, etcétera, fueran invariables, las primas señaladas podrían ajustarse matemáticamente al costo del seguro, en cual caso los beneficios á que nos referimos desaparecerían por completo. Pero como semejante previsión es de todo punto imposible, atendido lo variable de los elementos que forman la base de los cálculos, es de ahí que á las compañías no les queda otro recurso que establecer una ta-

---

(*) Véase página 95.

(**) Existen tablas que contienen calculados los valores de $\frac{1}{(1+r)^a}$

rifa relativamente alzada para hacer frente á todas las eventualidades.

Aun aquellas compañías que fundan sus cálculos en la mortalidad de un personal escogido, suelen demostrar en sus balances que la vitalidad de los asegurados es superior á la que se había deducido de la estadística que sirvió de base en las operaciones.

Esto mismo acontece con la mortalidad de Duvillard, que es la base fundamental del cálculo de primas en las diversas combinaciones de seguros, caso de muerte; efectivamente, Duvillard presenta 1.000.000 de individuos tal como los ofrece la población de un Estado é incluye á todas las clase sociales sin haber antes examinado las condicones de vitalidad y robustez de cada individuo, como en rigor debería procederse en esta clase de operaciones.

Por lo tanto, siendo la mortalidad que ofrece Duvillard más crecida que la que realmente se observa en los individuos asegurados por las citadas combinaciones, es evidente que las primas, tal cual se han deducido, tienen un valor mayor que el necesario.

Representando, pues, las primas entregadas á la compañía un riesgo mayor del que realmente asume, la diferencia representa los beneficios á que nos referimos, parte de los cuales, generalmente, la mitad, se destinan al reparto entre los asegurados.

El reparto de estos beneficios puede aplicarse á una cualquiera de las formas siguientes:

Al reparto en especie.

A la reducción anticipada de la prima, bajo el tipo, generalmente, de un 10 por 100 de descuento sobre el precio fijo de aquélla.

Al aumento del capital asegurado.

Y á la reducción de prima hasta extinguirla por completo.

Reparto en especie. — Se entiende por reparto en especie cuando el asegurado cobra en efectivo los beneficios que le corresponden en el caso de que así se haya estipulado.

Sea por ejemplo, un asegurado á los 35 años, que paga una prima anual de 500 pesetas y remontémonos á la edad de 40 años en que habrá satisfecho 5 anualidades que importan $5 \times 500 =$ $= 2.500$ pesetas

Ahora bien, si la compañía hubiese fijado el reparto de beneficios en un 2 por 100 sobre el importe total de las primas desembolsadas, correspondería á aquél un beneficio de

$\frac{2 \times 2500}{100} = 50$ pesetas que es lo que cobraría el socio al cabo de los citados cinco años.

Aun cuando el tipo de 2 por 100 lo hemos fijado arbitrariamente, conste que en la práctica no suele exceder del 3 por 100, y aun así resulta lucrativo, si se tiene en cuenta que cada año van acumulándose las primas pagadas en los años anteriores.

Para formarse idea clara de la importancia de estos beneficios continuamos la siguiente tabla que comprende los correspondientes á cada año al 3 por 100, hasta los 28 años de contratado el seguro bajo una prima anual de 500 pesetas.

Beneficios al fin del	1.er año....	15	Beneficios al fin del	15 año....	225
» »	2 »	30	» »	16 »	240
» »	3 »	45	» »	17 »	255
» »	4 »	60	» »	18 »	270
» »	5 »	75	» »	19 »	285
» »	6 »	90	» »	20 »	300
» »	7 »	105	» »	21 »	315
» »	8 »	120	» »	22 »	330
» »	9 »	135	» »	23 »	345
» »	10 »	150	» »	24 »	360
» »	11 »	165	» »	25 »	375
» »	12 »	180	» »	26 »	390
» »	13 »	195	» »	27 »	405
» »	14 »	210	» »	28 »	420

Sumando estos beneficios anuales encontraríamos un beneficio total de 6090 pesetas.

Estas 6.090 pesetas de beneficios proceden de un desembolso de 28 anualidades de 500 pesetas una ó sea de 28×500 = 14.000 pesetas.

Descuento anticipado de la prima bajo el tipo de un tanto por ciento. — El asegurado, en lugar de cobrar el importe íntegro de los beneficios en cada vencimiento puede optar por un anticipo real de los mismos.

Por lo tanto, en todas las combinaciones en que se tenga derecho á los beneficios quedará resuelto este problema con la deducción, por ejemplo, de un 10 por 100 sobre el importe de la prima anual.

Así, un asegurado de 50 años, en la combinación vida entera, que haya de pagar 447'61 duros anuales para asegurar 10.000 duros, si opta por esta forma de participación en los beneficios, en lugar de la citada prima de 447'61 duros, deberá pagar tan sólo 447'61—44'76=402'85 duros.

Otro asegurado, á la edad de 35 años, por ejemplo, en la combinación á término fijo, plazo de 15 años que ha de pagar la prima anual de 538'47 pesetas para asegurar 10.000 duros, si opta por el descuento anticipado de un 10 por 100 solamente, deberá satisfacer 538'47—53'85=484'62 pesetas.

Aumento del capital asegurado. — Si el asegurado destina la parte de los beneficios que le corresponden al aumento del capital asegurado, debe estimarse como una entidad distinta que contrata un nuevo seguro cada vez que debería recibir aquéllos. Por lo tanto, su importe viene á representar una prima única que deja en poder de la compañía para que le proporcione un aumento del capital en relación con la referida cantidad y con la edad actual del suscriptor.

Consideremos un individuo que á los 35 años paga una prima anual de 500 pesetas por un capital asegurado de 18.336 pesetas, bajo la forma de acumulación de beneficios, al fin de un quinquenio.

El beneficio al terminar los 5 años, á razón del interés del 2 por 100 sobre el número de primas entregadas, sería de

$$\frac{2 \times 2500}{100} \; 50 \text{ pesetas}$$

Quedando estas 50 pesetas en poder de la compañía representarán una prima única á los 40 años que aseguran, á la muerte del asegurado, un capital que puede hallarse empleando la siguiente fórmula:

$$(^*)\; S = \frac{P\,(1+r)}{1-r\;A_{40}} = \frac{50\,(1+0'04)}{1-0'04 \times 13'2856\;(^{**})} = \frac{52}{0'468576} = 111 \text{ pts.}$$

Y por lo tanto, cuando el asegurado haya cumplido la edad de 40 años su capital asegurado no será de 18.336 pesetas, sino de 18.336+111=18.447 pesetas. Continuando el reparto de beneficios en el año siguiente, tendremos que el asegurado en cuestión habrá pagado 6 primas de 500 pesetas, que importan 3.000 pesetas, luego el beneficio al cabo de 6 años sería

$$\frac{2 \times 3000}{100} = 60 \text{ pesetas}$$

las cuales quedan también en poder de la compañía para aumentar el capital asegurado. Estas 60 pesetas de prima única representan un seguro de

$$S = \frac{60 \times 1'04}{1-0'04\;A_{41}} = \frac{62'40}{1-0'04 \times 13'0834} = \frac{62'40}{0'476664} = 130'91 \text{ pts.}$$

y por lo tanto á los 41 años de edad el capital asegurado será de 18.447+130'91=18.577'91 pesetas. Y continuando la operación, veríamos como va aumentando el capital á medida del tiempo y con el número de primas pagadas. De modo que un sujeto que estipulare un seguro en su juventud, dedicando los beneficios al aumento del capital, puede muy bien llegar á duplicarlo con sólo el pago constante de la misma prima primitiva.

Para calcular el capital correspondiente á los beneficios debengados en el seguro mixto y á término fijo, se procede de análogo modo que en el seguro vida entera, por lo que omitimos repeticiones que consideramos enojosas.

Reducción de la prima hasta extinguirla por completo. — El importe de los beneficios destinados á la reducción de la prima, consiste, generalmente, en un 3 por 100 sobre el total de las

---

(*) Vèase página 76.

(**) $A_{40}=13'2856$, según la tabla de A_n con arreglo á la mortalidad de Duvillard, enfrente de los 40 años.

satisfechas á la compañía, con lo cual el socio quedará librado á los 28 años del pago de nuevas primas.

Propongamos el mismo ejemplo anterior, es decir, un asegurado á los 35 años por vida entera mediante una prima anual de 500 pesetas. Hemos visto (*) que los beneficios al cabo de 5 años ascendían á 75 pesetas. Estas 75 pesetas no son las que deben rebajarse de la prima en el pago inmediato, sino que se dejan en poder de la compañía como una prima única de un nuevo seguro contratado á la edad de 40 años, siendo la prima anual que corresponde á esta prima única la que debe restarse de la anual de 500 pesetas que paga el asegurado.

Convirtiendo, pues, en anual la prima única de 75 pesetas, resultará:

$$(^{**})\ p = \frac{P}{1 + A_{40}} = \frac{75}{14'2856} = 5'25 \text{ pesetas}$$

y por lo tanto, restando de 500 pesetas las 5'25 obtenidas anteriormente tendremos la diferencia de 494'75 pesetas, que es la prima que deberá pagarse al año siguiente.

Continuando cada año en la repartición de beneficios, tendremos que en el sexto los beneficios importan $\frac{3 \times 3000}{100} = 90$ ptas., y la prima anual correspondiente á 90 pesetas es $p = \frac{90}{1 + A_{41}} =$ $= \frac{90}{14'0834} = 6'39$ pesetas. La prima del séptimo año será: 500—6'39=493'61 pesetas y así sucesivamente.

La disminución de la prima va acelerándose con el tiempo, lo cual hace que dentro de un plazo dado llegue á anularse por completo, en razón de los beneficios, en cual caso el asegurado, en lugar de satisfacer prima alguna, deberá percibir una renta del 3 por 100 sobre el valor de las primas que tenía desembolsadas, cuyo beneficio continuará recibiendo hasta que ocurra su fallecimiento.

Por lo que llevamos dicho se comprende fácilmente que las combinaciones que más ventajosas resultan para el asegurado respecto de la participación de las utilidades, consiste en el aumento del capital y en la reducción de prima; pues que una persona que contrate un seguro en su juventud optando por el aumento del capital asegurado, será probable que sus herederos se encuentren con un capital doble del contratado, ó, en el caso de haber destinado los beneficios á la reducción de la prima, que cuando llegue á la vejez entre á disfrutar de una renta vitalicia, más ó menos modesta, sin tener que pagar prima alguna á la compañía.

(*) Véase página 100.
(**) Véase página 79.

VIII

SOCIEDADES DE SOCORROS MUTUOS Ó MONTEPÍOS

EXPOSICIÓN. — Aun dentro de los fenómenos fisiológicos, ó sea respecto del estado de salud del ser humano, puede también tener intervención el cálculo de las probabilidades. En efecto, en las llamadas sociedades de *socorros mutuos* ó *montepíos* que se forman para obtener un socorro diario, en caso de enfermedad, mediante el pago, por parte del asociado, de una modesta prima única ó bien de una cuota vitalicia, se hace preciso para la buena marcha de aquéllas atender á los consejos que nos proporcionan la experiencia y las matemáticas.

Ahora bien, para determinar con verdadera exactitud la referida prima, según el importe del socorro ó pensión diaria, sería preciso conocer la ley á que están sometidas las enfermedades, y como ésta, caso de existir, no se conoce, se hace necesario valerse de la observación.

Si difícil es ésta al tratar de determinar la duración probable de la vida, cuando se desea establecer reglas sobre las enfermedades aumentan de un modo considerable las dificultades.

En efecto, muchas son las condiciones que si bien influyen en la mortalidad, al tratar de ella, puedan sin gran error despreciarse, pero que al ocuparse de las enfermedades se elevan á primer factor. La diferencia de sexo, por ejemplo, que hasta hace poco no se ha tenido en cuenta al constituirse las tablas de mortalidad, es condición esencialísima al ocuparse de observar la marcha de las enfermedades, pues no pueden equipararce ambos sexos bajo un mismo punto de vista.

La profesión, la herencia fisiológica, el paraje y clima en que se habita son condiciones á cual más importantes, teniendo por eso siempre en cuenta que el factor edad, debe figurar en todo caso como primero.

Después de gran número de experiencias se ha venido á determinar por algunos matemáticos una fórmula que diera de un modo aproximado el número de días de enfermedad que probablemente ocurrirán dentro de un año, para las edades comprendidas entre 30 y 70 años.

Esta fórmula es la siguiente:

$$y = \frac{3670 \times 1'01^{a-30}}{V_a}$$

representando y los días de enfermedad probable en un año; a, la edad del asociado y V_a el número de sobrevivientes para la edad a.

La anterior fórmula, según se ha dicho, sólo puede aplicarse para las edades entre 30 y 70 años, lo cual constituye un contratiempo cuando se ha de operar con otras edades.

En los casos que esto ocurra hay que valerse de tablas que por analogía con las de mortalidad se llaman de *morbosidad,* y en las cuales se especifica para cada edad el número de días de enfermedad que probablemente ocurrirán. La principal de estas tablas es la de Hubbard, que comprende desde los 16 á los 73 años.

Cualquiera que sea la marcha que se adopte, la prima que el asociado de edad a tenga que entregar á la sociedad para tener derecho hasta los $a+n$ años al socorro de una unidad diaria en caso de enfermedad, deberá determinarse teniendo en cuenta además de los días y de enfermedad probable, la probabilidad de vida en cada año comprendido entre a y $a+n$.

Si el asociado en el m año ha de percibir y_m unidades en concepto de igual número de días de enfermedad, el valor actual de esta cantidad será $\frac{y_m}{(1+r)^m}$, el cual deberá multiplicarse por la probabilidad de que el asociado viva á los $a+m$ años de edad, con lo cual el verdadero valor actual es

$$\frac{y_m}{(1+r)^m} \times \frac{V_{a+m}}{V_a}$$

y sustituyendo y_m por el valor primeramente estudiado tendremos

$$\frac{3670 \cdot 1'01^m}{V_{a+m}} \times \frac{1}{(1.+r)^m} \times \frac{V_{a+m}}{V_a} = \frac{3670}{V_a} \times \left(\frac{1'01}{1+r}\right)^m$$

Esta fórmula expresaría la prima necesaria para recibir un socorro de una unidad, por cada día de enfermedad en el año m, con lo cual la indispensable para los años comprendidos entre a y $a+n$ resultaría de dar en la fórmula anterior todos los valores posibles á m, desde o á n.

La suma de los términos así obtenidos sería igual al primer fator multiplicado por una progresión por cociente que empezaría por 1, y cuya razón sería $\frac{1'01}{1+r}$; constando de $n+1$ términos y sustituyendo esta progresión por la expresión de la suma de sus términos (*) tendremos el valor de

(*) La expresión de la suma de una progresión por cociente es igual á la diferencia entre el 1.er término y el último por la razón, partida esta diferencia por la que haya entre la razón y la unidad.

$$P = \frac{3670}{V_a} \cdot \frac{1 - \frac{1'01^n}{(1+r)^n}}{1 - \frac{1'01}{1+r}} = \frac{3670}{V_a} \cdot \frac{(1+r)^n - 1'01^n}{(r - 0'01)(1+r)^{n-1}}$$

EJEMPLO PRÁCTICO NUMÉRICO. — ¿Qué cantidad debería entregar un obrero de 30 años para obtener un socorro de 3 pesetas diarias durante sus enfermedades, hasta la edad de 70 años, suponiendo 4 y medio el tanto por 100 de interés? (*)

$$P = \frac{3670}{V_a} \times \frac{1'045^{40} - 1'01^{40}}{(0'045 - 0'01)\ 1'045^{39}} = \frac{3670}{743\ (**)} \times$$

$$\times \frac{5'816365 - 1'488864}{0'035 \times 5'565899} = 5 \times \frac{4'327501}{0'194806} = \frac{21'637505}{0'194806} =$$

$$= 111'072$$

Debería entregar $3 \times 111 = 333$ pesetas aproximadamente.

Para el caso de que en lugar de la anterior cantidad quisiera el asociado satisfacer una prima *vitalicia* ó *temporal* la calcularíamos mediante las fórmulas que dimos en su lugar correspondiente.

(*) $4\frac{1}{2}$ por 100 = 0'045 por uno.

(**) Número de sobrevivientes á los 30 años de edad, según la tabla de mortalidad de Deparcieux.

IX

SEGUROS SOBRE LAS COSAS

PRELIMINARES. — Otra de las numerosas aplicaciones del Cálculo de las probabilidades consiste en los seguros sobre las cosas, los cuales tienen por objeto indemnizar el siniestro involuntario que pueden sufrir aquéllas por virtud de ciertos accidentes, mediante el pago de una prima que el asegurado entrega al asegurador.

Se clasifican en dos grandes grupos, á saber: *seguros terrestres* y *seguros marítimos*.

En unos y otros la cuestión más importante que se presenta consiste en *averiguar la prima* que debe exigirse ó precio del seguro, según el riesgo que la cosa asegurada corra y lo que se desee ganar ó exponerse á perder; para lo cual es preciso acudir á las probabilidades *a posteriori*.

La *prima* puede ser, atendiendo á la naturaleza de la cosa ó del riesgo asegurado, *única* ó *periódica*, según que se pague una sola vez ó se satisfaga periódicamente en ciertos lapsos de tiempo iguales mientras dure el contrato. Así, la prima por un seguro de transporte de mercancías por un solo viaje será *única*, mientras que la prima por un seguro contra incendio de una casa, como el peligro es constante, será anual, trimestral ó mensual, según se pague por años, trimestres ó meses.

Seguros terrestres

EXPOSICIÓN Y FÓRMULAS. — Pueden éstos consistir en seguros contra incendios (*), contra los riesgos de los transportes terres-

---

(*) Tanto en esta clase de seguros como en los demás que enumeramos, la prima ó precio del contrato aumenta ó disminuye en la misma razón que la probabilidad de siniestro, así, pucs, los riesgos se clasifican, para estos seguros, en categorías por razón de de las condiciones de construcción de los edificios si son de madera, piedra, sillería, etc., como también por la clase de destino que se les dá, ya conteniendo muebles y utensilios poco expuestos al incendio ó mercancías inflamables ó explosivas. También se tiene en cuenta la situación del edificio ó valor asegurado, por la vigilancia que pueda ejercerse, variando la prima para las poblaciones en razón inversa del número de almas, porque el riesgo es indudablemente mayor en despoblado, que en una población custodiada y vigilada, tres, contra el granizo, contra las enfermedades de las cosechas y animales (*) etc., etc.

Para hallar la fórmula general de la prima que debe exigir el asegurador, nos proponemos el estudio de los seguros contra incendios, y á fin de considerar el caso más sencillo, supongamos que una compañía asegura m casas, todas del mismo valor v. Sea p el riesgo anual de una casa ó la probabilidad de que ésta sea destruída por el fuego dentro del año. Designemos por q la probabilidad contraria, de tal suerte que se tenga $p+q=1$; por a la prima del seguro, y por c el capital que se quiere exponer en la empresa. Si se desarrolla el binomio $(q+p^m)$ y se obtiene la suma de los términos de este desarrollo hasta el que lleva el factor $q^{m-n}p^n$ inclusive, esta suma expresará la probabilidad P de que el número de siniestros no pasará de n. En tal caso la mayor suma que la compañía tendrá que abonar á los propietarios de las casas será nv; y como, por otra parte, los ingresos procedentes de las primas es ma, será necesario, para que la pérdida no llegue á c, que la primera suma no exceda á la segunda en más de esta cantidad c, es decir, que se debe tener

$$\mathrm{nv}-\mathrm{ma} \overline{\underset{<}{}}\, \mathrm{c}, \text{ de donde } \mathrm{a} \overline{\underset{>}{}}\, \frac{\mathrm{nv}-\mathrm{c}}{\mathrm{m}},$$

de modo que la prima *mínima* que deberá exigirse viene expresada por la fórmula

$$\mathrm{a}=\frac{\mathrm{nv}-\mathrm{c}}{\mathrm{m}}$$

Estas fórmulas serán tanto más precisas cuanto más se acerque á la certeza de que el número de siniestros no pasará de n. De modo que esta n se hallará en cada caso calculando número suficiente de términos del desarrollo $(q+p)^m$ para que su suma se aproxime cuanto sea posible á la unidad, y el número de términos tomados en cuenta para que así suceda, disminuído en una

---

y el siniestro puede acarrearlo mano enemiga y menos fácil de notarse y remediarse aún siendo casual. Asimismo influye en el aumento del precio en el contrato, las profesiones que se ejerzan en una casa-habitación y la parte del inmueble que en las mismas profesiones se ocupa, si éstas aumentan el riesgo; siendo tal ley uniforme y general para mercancías, cosechas, etc.

(*) Por lo que respecta al seguro agrícola, debe confesarse que aquél constituye un ploblema no todavía resuelto; pues si se acomete por mutualidad y dentro de un corto radio, según esta forma requiere, puede un desastre común no raro, como una epizootia ó el paso desolador de una tempestad, arruinar á los asociados que son á la vez asegurados y aseguradores, ó frustarles las ventajas del seguro por recibir con una mano tanto como han entregado ó distribuído con la otra y si á prima fija y en vasta escala para que se compensen y anulen los riesgos, exigen una administración costosa, están sujetos á frecuentes fraudes y obligan por consiguiente, á una elevación en el tanto de prima, que los hace poco beneficiosos y comunes.

unidad, será el valor de n. Por ejemplo: si se aseguran 200 casas y el riesgo anual se supone $\frac{1}{100}$, será p=0,01, q=0.99 y m=200; por tanto, habrá que desarrollar la potencia

$$(0{,}99+0{,}01)^{200}$$

Si lo hacemos así y hallamos la suma de sus términos, obtendremos para los nueve primeros, 0'995789; para los 10, 0'999961- para los 11, 0'999994; para los 12, 0'999999, y así sucesivamente. Estos números representan las probabilidades de que las casas incendiadas no pasarán de 8, 9, 10 y 11, pues estos son los valores correspondientes de n. Y como el último apenas difiere de la unidad, la probabilidad que representa casi se puede tomar como certeza, y el valor correspondiente de n, ó sea 11, es el que adoptaríamos para hacer los cálculos.

EJEMPLOS PRÁCTICOS. — 1.º Suponiendo 200 casas aseguradas 1 de cada 100 los siniestros probables, 40.000 pesetas el valor de cada casa ó valor medio de una, y no queriendo exponer en la empresa más de 50.00 pesetas, ¿cuál será la prima mínima?

No habrá más que hacer en la fórmula anterior n=11, v=40.000 c=50.000 y m=200. Así resulta a=1.950 pesetas.

Para que el cálculo sea independiente del valor de los objetos, lo más frecuente es no fijar el límite de la pérdida, sino expresarlo por una fracción $\frac{g}{h}$ del total asegurado mv, en cuyo caso siendo $c = \frac{g}{h}\, mv$, la fórmula ya mencionada toma esta forma:

$$a = \frac{nv - \frac{g}{h}\, mv}{m} = \frac{v}{m}\left(n - \frac{g}{h}\, m\right)$$

De esta manera puede expresarse la prima por un tanto por ciento del valor de los objetos, sin necesidad de conocer éste, que es como suele figurar en las tarifas de las compañías, ya que la fórmula última puede escribirse así:

$$a = \frac{1}{m}\left(n - \frac{g}{h}\, m\right) v =$$

$$= \frac{100}{m}\left(n - \frac{g}{h}\, m\right)\frac{v}{100} =$$

$$= \frac{100}{m}\left(n - \frac{g}{h}\, m\right) \text{ por 100 de } v$$

En la práctica no basta tener el límite de la prima, sino que es conveniente calcular la probabilidad de obtener, por lo menos, un beneficio b para decidirse ó no á emprender el negocio; y este beneficio estará regulado por el interés que se asigne al capital empleado en el negocio. Para esto será necesario que el número de siniestros sea menor que n calculado anteriormente; si lo llamamos n, se tendrá $ma - n'v = b$, de donde

$$n' = \frac{ma - b}{v}$$

Conocido n', no habrá más que efectuar la suma de los $n'+1$, primeros términos del desarrollo de $(q+p)^m$ para obtener la probabilidad correspondiente que se busca.

El valor de n', puede hacerse independientemente de la prima fijada, sustituyendo su valor (*) en el de n', lo que dá

$$n' = \frac{m\dfrac{n\,v - c}{m} - b}{v} = \frac{n\,v - c - b}{v} = n - \frac{c + b}{v}$$

2.º Aceptando la prima de 1.950 pesetas del ejemplo anterior, ¿qué probabilidad habría de ganar las expresadas 50.000 pesetas?

Sustituyendo en $n' = \dfrac{ma - b}{v}$ resulta $n' = 8'5$. Sumando ahora los nuevos primeros términos del desarrollo de $(0{,}99 + 0{,}01)^{200}$, hallaríamos 0'999789 para la probabilidad de que no ocurrirían ocho siniestros y de que ganarían las 50.000 pesetas.

La ganancia mínima está determinada por la igualdad $b = ma - nv$, y para que exista es preciso que sea $ma - nv > 0$, de donde $a > \dfrac{nv}{m}$, límite inferior de a, que tmabién se podría deducir haciendo $c = 0$ en la relación $a = \dfrac{n\,v - c}{m}$.

3.º En los mismos supuestos de los ejemplos anteriores, ¿qué prima sería necesario establecer para abrigar la confianza de obtener un beneficio?

Después de calcular el número $n = 11$ como máximo de siniestros tendríamos $a > 2.200$ pesetas. Tomando para a el valor 2200 pesetas nada se ganaría ni perdería si ocurriesen todos, pues se recibirían por primas lo mismo que habría que pagarse por los 11 siniestros.

Para que hubiera más probabilidad de ganar que de perder, bastaría dar á n el valor correspondiente á la primera suma del desarrollo de $(q + p)^m$ que fuese mayor que $\dfrac{1}{2}$

Cuando m es muy grande, el efectuar directamente la suma de los términos del desarrollo de $(p + q)^m$ resulta casi impractica-

---

(*) $a = \dfrac{nv - c}{m}$

ble, y los analistas han tratado de sustituir el cálculo riguroso por un cálculo aproximado más sencillo pero basado ya en el Cálculo integral.

Es evidente que los beneficios del asegurador crecen mucho más rápidamente que sus pérdidas á medida que multiplica las operaciones; por ello es que algunos economistas han abogado para que los gobiernos de los respectivos Estados ó Naciones ejerzan el monopolio de tal industria ó servicio, pues con el lucro cierto que se obtendría podrían abaratarse las primas actuales ó bien destinarlo al aumento de los recursos de la Hacienda pública.

Seguros marítimos

Exposición y fórmulas. — Si en los seguros marítimos, ó sean los que indemnizan los riesgos, daños y averías que pueden sufrir los buques ó las mercancías que transportan (*) suponemos que una compañía asegura un número m de buques, llamando p á la probabilidad de pérdida de uno de aquéllos, tendremos que $1-p$ será la probabilidad de salvamento, y, de consiguiente,

$$\big((1-p)+p\big)^m=(1-p)^m+m(1-p)^{m-1}p+\frac{m(m-1)}{1\ 2}(1-p)^{m-2}p^2+..+p^m$$

El primer término de este desarrollo representa la probabilidad que de m buques que salgan á viaje se salven todos; el segundo, de que se salven $m-1$ y se pierda 1; el tercero, de que se salven $m-2$ y se pierdan 2, etc.

Por consiguiente, la suma de los dos primeros términos expre-

(*) No se pierda de vista que el resarcimiento del daño es siempre proporcional al valor por el que fué siempre asegurada la mercancía.

De modo que suponiendo se han asegurado de riesgo marítimo unas mercancías por su valor de factura que asciende á 3000 pesetas, y una vez embarcadas ocurre pérdida total, el asegurado que cobró la prima sobre dicha cantidad. debe satisfacerla íntegramente.

Mas si una vez desembarcadas dichas mercancías y pagados los derechos de Aduana, el flete y gastos de descarga, el receptor observa que han sufrido *avería simple*, pcr lo cual estaban también asegurados, é importando los citados desembolsos 1000 pesetas que junto con el coste de compra suman 4000 pesetas, tendremos en este caso que los aseguradores abonarán del valor del dañc sufrido sólo la parte proporcional que corresponda á las expresadas 3000 pesetas; de manera que si la avería simple representaba (según peritaje) un 25 por ciento del género puesto á destino resulta:

$4000 : 1000 :: 3000 : x, \quad x = \dfrac{3000 \times 1000}{4000} = 750$ pesetas, parte de la avería que satisfará el asegurador, viniendo el resto de 250 pesetas á cargo del asegurado.

Mas si este último no quiere correr tal contingencia, deberá asegurar la cantidad de 4000 pesetas, consignándose expresamente en la póliza que en cuanto á 1000 representan el importe del flete, derechos de Aduana y de más gastos.

sará la probabilidad de que en m pruebas, ó sean buques que salgan á viaje, se pierda á lo más uno y se salven á lo menos $m-1$; la suma de los tres primeros términos representará la probabilidad de que m buques que salgan á viaje se pierdan á lo más dos y se salven á lo menos $m-2$. Continuando del mismo modo veríamos que la suma de los $n+1$ primeros términos representa la probabilidad de que el número de buques perdidos no exceda de n.

Ahora bien, si designamos por v el valor de cada buque, por c la mayor pérdida que la compañía quiere experimentar, y por a la prima anual que exigirá por cada buque, es claro que, siendo n el número de buques perdidos, la suma que la compañía deberá satisfacer á sus dueños será nv.

Asimismo la suma que aquella habrá exigido por las primas respectivas es ma; por lo tanto, para no pasar de la pérdida mencionada, es preciso que $nv - ma = c$, de donde se deduce que $a = \frac{nv - c}{m}$; cuya fórmula sirve para averiguar la prima anual a que ha de exigirse por la compañía aseguradora, fijando que las pérdidas no excederán de c.

Supongamos que sean 200 el número de buques asegurados y que su riesgo se estime en 0,01 por ciento; tendremos:

$$(0'99 + 0'01)^{200} = 0'99^{200} + 200 \times 0'99^{199} \times 0'01 + \frac{200\,(200-1)}{1.2} \times 0'99^{198} \times 0'01^{2} + \frac{200\,(200-1)\,(200-2)}{1.2.3} \times 0'99^{197} \times 0'01^{3} + \ldots\ldots + 0'01^{200}$$

Hallando por logaritmos el valor de cada uno de los anteriores términos, hasta el doce, así como la suma que resulta de la adición sucesiva de los mismos, formaremos la siguiente tabla:

Pérdidas	Probabilidades	Suma de las Probabilidades	Pérdidas	Probabilidades	Suma de las Probabilidades
0	0'133980	0'133980	6	0'011727	0'995706
1	0'270667	0'404647	7	0'003283	0'998989
2	0'272034	0'676681	8	0'000800	0'999789
3	0'181355	0'858036	9	0'000172	0'999961
4	0'090220	0'948256	10	0'000033	0'999994
5	0'035723	0'983979	11	0'000005	0'999999

Esta tabla nos proporciona los lances respecto á 200 buques, sometido cada uno de ellos al riesgo de $\frac{1}{100}$. La segunda columna indica separadamente la probabilidad de pérdida de 0, 1, 2, 3, ...

11 buques, y la tercera la probabilidad de que la pérdida no excederá del número correspondiente en la primera columna.

EJEMPLO PÁRCTICO NUMÉRICO. — Deseando la compañía aseguradora obtener una probabilidad de 100.000 contra 1, ó sea aproximadamente de 0'999994 contra 0'00001, de que la pérdida máxima que pueda sufrir sea por valor de 7 buques, tendremos:

Que la suma 0'999994 representa según el anterior cuadro, la probabilidad de que el número de siniestros no pasará de 10; luego $nv = 10\ v$, y como, según el enunciado, $c = 7v$, resultará:

$$a = \frac{nv\text{-}c}{m} = \frac{10v\text{-}7v}{200} = \frac{3v}{200}$$

Lo cual indica que la prima que debería exigirse en este caso es de $1 \frac{1}{2}$ por ciento sobre el valor asegurado.

RECAPITULACIÓN. — Conforme hemos observado, las varias clases de seguros sobre las cosas están reguladas por idénticos principios, pero el riesgo anual es muy distinto según la naturaleza del valor asegurado. Así tenemos que el indicado riesgo se valúa, por ejemplo, en $\frac{1}{100}$ para los buques destinados á la pesca de la ballena, mientras que, para las casas construídas de piedra ó mampostería y con cubierta de ladrillos ó tejas se fija únicamente en $\frac{1}{20000}$. De todos modos este riesgo es siempre una fracción muy pequeña, y se podría calcular, con bastante exactitud, por medio de las fórmulas de las probabilidades á *posteriori*, basadas en los datos que proporcionara una estadística previamente formada.

Por lo que respecta á los buques deberá tenerse en cuenta no sólo los materiales de que están construídos, capacidad ó tonelaje y clase de los mismos, edad, especie del motor, estado de conservación, etc., si que también los mares y puertos que recorren aquéllos, fecha del viaje, la clase de mercancías que transportan y aun la pericia del capitán y tripulantes. Bajo tales premisas debería anotarse el número de buques perdidos total ó parcialmente, por cada 100 de los salidos del puerto ú puertos en época determinada. La medida diferencial de todas las observaciones sería la probabilidad de pérdida de cada buque. La diferencia entre la media aritmética y el valor de cada observación nos daría los errores probables y con ellos determinaríamos el error medio, y por fin la medida de precisión de las observaciones, obteniendo así idea aproximada del error cometido.

En razón de lo expuesto resulta que muchas veces, en la práctica, se señala la prima de los seguros sobre las cosas sólo por tanteo, dentro de ciertos límites, dada la casi imposibilidad que existe de hacerlo de otra manera por lo heterogéneo de las circunstancias especiales que concurren en cada caso particular.

X

DEL CONTRATO DE SEGURO MERCANTIL

Expuestos ya de un modo elemental las fórmulas y principios matemáticos en que debe basarse el cálculo de los Seguros, incompleto quedaría este trabajo si no nos ocupásemos aunque sea de una manera breve y concisa, de los seguros como contrato mercantil.

Dentro de la esfera puramente científica podríamos, sí, dar por terminada nuestra labor; pero al descender al terreno mercantil hemos de tener en cuenta distintos aspectos y detalles que en la mayoría de los casos, aunque pequeños, son de la mayor importancia.

Nos ocuparemos, pues, preferentemente, de la modificación que sufren las fórmulas estudiadas en el transcurso de esta obra, al ser aplicadas á la realidad; de la significación y aspecto legal de los Seguros; y procuraremos dar noticia de alguna de las principales instituciones que por iniciativa oficial ó semi-oficial existen en España.

De las tarifas

Todas las fórmulas anotadas en los capítulos anteriores, están determinadas de tal modo que si la ley de mortalidad se cumpliera exactamente, las cantidades entregadas por los asegurados ascenderían con sus intereses al mismo importe de las que luego deberían pagarles las Compañías, no quedando ni ganancia ni pérdida. La única esperanza que podrían abrigar las Compañías para obtener beneficio sería que la ley de mortalidad que realmente ocurriera fuera inferior ó superior á la calculada, según los casos. Esta esperanza no obstante, ha de abandonarse, debido á que al establecer una ley de mortalidad ha de suponerse se verificará en todas sus partes. De adoptarse, pues, las fórmulas expuestas, sin modificación alguna, el contrato de seguro se podría considerar como de beneficencia.

Veamos en que consiste esta modificación.

Las entidades aseguradoras han de sufragar distintos gastos absolutamente necesarios á su administración y desarrollo; numeroso personal, corredores, intermediarios, propaganda, etc., todo lo cual es de justicia que lo satisfaga indirectamente el asegurado, que es en favor de quien en último término redundan los beneficios de esta extensa organización.

He aquí, pues, el primer motivo por el cual han de alterarse las fórmulas llamadas *puras*.

Por otra parte la fundación de una Compañía de Seguros representa para las personas ó entidades que la constituyen un desembolso inmediato de consideración. Al mismo tiempo, como quiera que lo que se proponen los fundadores es efectuar un acto mercantil perfectamente definido, este acto ha de gozar de todas las cualidades inherentes á su calificación de mercantil, y con arreglo á ello, ha de buscar la obtención de un beneficio para quienes lo ejecutan.

Así, pues, las Compañías tienen presente este propósito, en verdad muy justo, al formar sus tarifas. Debido, no obstante, á la naturaleza especial de los cálculos indispensables de esta materia no asequibles ó ignorados por el público en general, las Leyes regulan esta libertad de las Compañías, al objeto de evitar que abusando de esta ignorancia construyan tarifas excesivas. (*)

En resumen, pues, la alteración que sufren las *primas puras* es la necesaria y prudencial para que las entidades aseguradoras puedan satisfacer sus gastos y realizar un beneficio proporcionado á la cuantía de sus operaciones.

Importancia de los seguros

La institución del Seguro no es una industria más, que pueda confundirse con el conjunto de todas las demás industrias. Antes bien, juega un importante papel dentro de la vida económica y social, importancia que crece de día en día en lugar de disminuir ó de permanecer estacionaria.

Misión trascendental es la que tienen encomendada los Seguros. Desarrollar el instinto del ahorro y previsión entre todas las clases sociales y principalmente las más humildes, contribuyendo con ello á moralizar las costumbres.

En efecto; el obrero que sienta el deseo de ponerse á cubierto de posibles y venideras contingencias y que en consecuencia contraiga consigo mismo el compromiso de ahorrar periódicamente determinada cantidad con este fin, es evidente que no pensará en mermar sus modestos recursos con dispendios superfluos, cuando no perjudiciales á su propia salud y á la de sus hijos.

Al propio tiempo la combinación del seguro hace que pierda importancia y hasta llegue á desaparecer el fantasma de la falta de recursos al llegar la vejez del obrero. Por eso hace sana labor social quien procura difundir los conocimientos de esta índole, en interés no sólo de los obreros, sino asimismo de los patronos,

---

(*) Véase la noticia legislativa acerca los seguros, inserta en este mismo capítulo, que podrán prescindir de un motivo de lo que ha de constituir una de sus mayores preocupaciones.

El día que todos los obreros, por su propio esfuerzo ó ayudados por la iniciativa oficial, tuvieran la seguridad de que su porvenir estaba asegurado y á cubierto de la miseria por la constitución de rentas vitalicias ó por otra combinación cualquiera, ciertamente que entonces las luchas sociales perderían algo ó la mayor parte de violencia que las caracteriza hoy día.

Para el patrono también sería útil el seguro, pues en el instante en que el obrero se encontrase imposibilitado de continuar su trabajo, podría, sin perjudicar sus intereses, ver cumplido el deber moral de no dejar abandonado al que le ha servido toda su vida. A ese objeto están encaminadas las últimas leyes dictadas modernamente sobre este asunto en distintos Estados europeos.

El siglo xx está llamado á resolver el gran problema de la cuestión social, y todo parece indicar que la solución la suministrarán en gran parte los seguros.

Pero donde dá lugar á que se manifiesten mejor los más nobles sentimientos del alma es en los llamados seguros en caso de muerte. En efecto, en las rentas vitalicias al fin y al cabo las cantidades que paga el asegurado son con el objeto de aprovecharse por sí mismo de ellas al llegar la época en que tendrá necesidad de hacerlo. Pero en los seguros en caso de muerte el asegurado ahorra y paga sus primas con la seguridad absoluta de que no será él quien se aprovechará de estos desembolsos, sino que al ocurrir su propio fallecimiento redundarán en favor de las personas que él haya previamente designado como sus herederos. Esto constituye en realidad una abnegación, pues el asegurado se impone voluntariamente sacrificios y privaciones para beneficiar exclusivamente á aquellas personas con quienes está ligado por el afecto.

Se ha hablado hasta aquí, varias veces del ahorro y puede ocurrir preguntar si éste por si sólo no podría dar iguales ó mejores resultados que el seguro. Es decir, si estando un individuo decidido á ahorar períodicamente una cantidad determinada, no sería más conveniente que él mismo retuviera estas cantidades y les hiciera producir interés ó bien que las entregará á una Compañía en concepto de prima constitutiva de un seguro. Parece en realidad que si el individuo en cuestión es su propio asegurador podrán aplicarse á su caso las fórmulas *puras* sin alteraciones ocasionadas por gastos de administración y por los beneficios que se quieran obtener. Sin embargo en la práctica no es así, á causa de que no es fácil poder hacer producir interés compuesto á cantidades pequeñas.

Supongamos que un individuo se impone la obligación de ahorrar 25 pesetas mensuales al objeto de constituir un capital para sus hijos dentro 20 años. Estas 25 pesetas podrán entregarse á una Compañía como prima de un seguro mixto, ó bien guardarse por el interesado para que produzcan intereses.

En primer término el seguro en este caso tendría la ventaja de que si el individuo muriera el capital sería entregado á sus hijos ó herederos aún antes de que llegara á constituirse.

Por otra parte, aun cuando se ahorraran mensualmente 25 pesetas, con seguridad no se podría hacer producir interés compuesto á esta cantidad debido á su pequeñez y sólo sería factible al alcanzar los ahorros la suma de 100, 200, ó 500 pesetas, por ejemplo, por no haber posibilidad de capitalizar sumas menores. Se dirá quizá que las Cajas de Ahorro podrían servir para este objeto, pero no hay que olvidar que éstas limitan el capital imponible, con lo cual, pasado este límite volvería á presentarse la dificultad apuntada.

En cuanto á las Compañías la dificultad de capitalizar mensualmente las 25 pesetas desaparece, pues suponiendo que existan 100 asegurados en las mismas condiciones, cada mes se recaudarán $25 \times 100 = 2.500$ pesetas, cantidad que fácilmente producirá interés compuesto.

Las Compañías pueden realizar, por consiguiente, lo que sería imposible para un individuo aislado y en su consecuencia pueden dar mayor capital del que obtendría el asegurado por sí solo, con lo cual si bien es cierto que hay que contar con los gastos de administración y beneficios deseados, siempre será más ventajoso acudir á una entidad aseguradora que confiar únicamente en el esfuerzo personal.

Sólo sería más conveniente este último en el caso de que las tarifas fueran tan excesivas que anualaran los beneficios apuntados, pero hay que tener en cuenta que estas tarifas en España está dispuesto sean revisadas por la Inspección general de Seguros, según se anota en el párrafo siguiente.

Noticia acerca la legislación de Seguros

La importancia cada día creciente que adquiere la institución del Seguro ha hecho que los Poderes públicos dictaran reglas encaminadas á regular el buen funcionamiento de la misma, en beneficio tanto del asegurado como de las entidades aseguradoras, por efecto de la mayor seguridad que se desprende de ellas.

Aun cuando con la palabra Seguro se abarcan innumerables combinaciones, las disposiciones legales se refieren con predilección á los seguros basados en la duración de la vida humana por la índole especial de estas operaciones que fundamentadas en cálculos la mayoría de las veces ignorados por el asegurado, hace preciso dar á éstos garantías suficientes de que la ley vela por sus intereses.

Descartado, pues, el seguro sobre las cosas cuyas disposiciones esenciales se encuentran en el Código de Comercio, pasaremos á dar una breve noticia de lo legislado acerca de los séguros sobre la vida, constituyendo preceptos que algunas veces limitan la generalidad de las fórmulas estudiadas.

Las disposiciones principales acerca de esta materia están contenidas en el Código de Comercio, Ley de 14 de Mayo de 1908 y en el Reglamento definitivo para la aplicación de dicha Ley, de 2 de Febrero de 1912.

El Código de Comercio (arts. 416 al 431 inclusive) establece, entre otras cosas, que el seguro para caso de muerte no comprenderá el caso de fallecimiento ocurrido: en duelo; por suicidio, ó por condena á la pena capital; y á no mediar pacto en contrario, tampoco comprenderá el fallecimiento ocurrido en viajes fuera de Europa, en el servicio militar en campaña y en cualquier otra empresa notoriamente extraordinaria é imprudente.

Dispone además la reducción del seguro en caso de que el asegurador, después de satisfacer *varias* primas no pueda continuar haciéndolo, cuya reducción se basará en los cálculos de la compañía.

Por el carácter de fijeza que revisten los preceptos de una Ley relativamente á los de un Reglamento dictado por R. D., anotaremos la parte que nos pueda interesar de la

LEY DE 14 DE MAYO DE 1908. — Consta de 36 artículos agrupados en cuatro títulos de los cuales merecen preferentemente atención el I y el II, que tratan de las disposiciones generales y de la publicidad y garantías, puesto que el III y IV se ocupan del funcionamiento de la Junta Consultiva de Seguros y de las responsabilidades inherentes á la no observancia de la Ley.

Se establece en primer término la obligación para toda clase de Compañías de Seguros, de inscribirse en un registro especial que abrirá el Ministerio de Fomento, acompañando los documentos que acrediten la constitución y organización de la Compañía, entre los cuales, en las que se ocupen de seguros sobre la vida, han de figurar las tarifas que adopten y tablas de mortalidad y supervivencia en que estén aquéllas basadas.

Se obliga á las Compañías de seguros sobre la vida á constituir en la Caja General de Depósitos ó en el Banco de España, un depósito de 200.000 pesetas, que se elevará á 500.000 pesetas para las Compañía sextranjeras cuyo país de origen no conceda á las Sociedades españolas en él establecidas los mismos derechos que á sus nacionales.

Si se trata de una Sociedad administradora de una tontina el depósito será sólo de 50.000 pesetas, y cuando sean varias las administradas 25.000 pesetas más por cada nueva tontina.

En asociaciones mutuas sin prima fija, que no tengan por objeto los seguros sobre la vida, el depósito será de 5.000 pesetas.

En el caso de que una misma Compañía se dedicara á varias clases de seguros, dispone la Ley que constituya un sólo depósito con arreglo al mayor tipo.

Con objeto de que los asegurados españoles puedan depositar su confianza en las Compañías extranjeras, se obliga á éstas á justificar se hallan constituídas con arreglo á las leyes de su país; que tienen un solo delegado en España con plenos poderes y que tienen un domicilio reconocido como central.

Para los seguros en caso de muerte no se podrá asegurar á los niños menores de 14 años, excepto el caso de contraseguro que tenga por objeto asegurar para caso de muerte del niño el rembolso de las primas satisfechas para constituir un seguro de super vivencia á favor del mismo.

Con objeto de que en los anuncios y prospectos no puedan estamparse conceptos dudosos, tendrán que someterse antes á informe de la Inspección de Seguros. Al mismo tiempo vienen obligadas las Compañías á publicar en la *Gaceta de Marid* el balance y cuenta de Pérdidas y Ganancias dentro de los seis meses siguientes al cierre de estas cuentas.

Las Compañías de seguros sobre la vida, además del depósito inicial consignado más arriba, vienen obligados á establecer una *reserva matemática*.

«Esta reserva estará constituída por la cifra que represente el exceso del valor actual de los compromisos que hubiere de cum plir la Compañía, sobre el valor actual de las primeras netas que han de satisfacer los asegurados» (art. 17).

Se determina que esta reserva podrá estar formada por metálico, determinados valores, cantidades prestadas por las Compañías sobre sus pólizas ó bien por inmuebles é hipotecas.

De esta reserva el 50 % se depositará en el Banco de España ó en la Caja General de Depósitos y la mitad por lo menos de este 50 % depositado, ó sea el 25 % de la reserva total, ha de estar constituído precisamente por valores españoles.

Este último requisito tiene por objeto evitar el que el ahorro nacional representado por el importe de las primas recibidas, pase en su totalidad á poder de manos extranjeras.

En las Sociedades de seguros distintos de los de vida la reserva recibe el nombre de *reserva de riesgos en curso*, «la cual estará constituída por la parte de primas destinadas al cumplimiento de futuras obligaciones no extinguidas en el ejercicio corriente» (art. 18), debiendo depositar sólo el 40 % de esta reserva.

Estos son los principios generales contenidos en la Ley citada, para cuya mejor comprensión y detalle se establece se dicte un Reglamento especial.

Dictado uno con carácter provisional en 26 de Julio de 1908, ha sido derogado éste por el

Reglamento definitivo de 2 de Febrero de 1912. — Este Reglamento, como es lógico, contiene los mismos preceptos que la Ley, pero acompañándolos de todos los detalles y comentarios que pueden ser útiles para su aplicación en la práctica.

Así, en lo concerniente á las Tontinas dispone que el período de acumulación no podrá ser menor de 10 años ni mayor de 20.

Del mismo modo el Reglamento dispone en su artículo 99 las Tablas de mortalidad que las Compañías pueden adoptar, que son para los seguros caso de muerte, las siguientes:

La de asegurados franceses (A. F.).

La de ingleses H^m H^n (1902).

La de austro-húngaros de 1907 (G).

La de experiencia americana.

La del colegio de Berlín (M^1).

Se permite el empleo de otras basadas en experiencias particulares de las Compañías ó las deducidas de otras estadísticas de mortalidad, siempre que las primas netas resultantes queden comprendidas para todas las edades entre las más altas y las más bajas de las que correspondan á las mismas edades, con arreglo á las tablas anteriores.

Para los seguros en caso de vida y rentas vitalicias:

La de rentistas franceses (R. F.).

La de las 17 compañías inglesas.

La de experiencias del Gobierno británico.

La de Carlisle.

La de experiencia americana.

Podrán usarse también las mismas que las enumeradas para el caso de muerte, pero con el recargo consiguiente y cualesquiera otras, siempre que las primas netas resultantes no sean en todas las edades superiores en más de 2 % á las más altas, ni inferiores en más de 2 % á las más bajas de las que se obtendrían aplicando las reglamentarias.

En los seguros mixtos ó dotales podrán emplearse cualesquiera de las reglamentarias en cada clase de seguro; pero sin poder aplicar la tabla que arroje mortalidad más rápida al valorar las obligaciones de la Compañía correspondientes á caso de muerte; y otra tabla de mortalidad más lenta para determinar las obligaciones del asegurador en caso de vida del asegurado.

Finalmente y para terminar esta breve anotación, diremos que otra disposición muy importante y que ha de tenerse en cuenta al aplicar en la práctica las fórmulas matemáticas de los seguros sobre la vida, es la que dispone que el tanto de interés á que deben calcularse las primas no será en ningún caso superior á 3 y medio por ciento (*).

Instituciones oficiales de Seguros

No han creído los Poderes públicos terminada su labor con la promulgación de leyes que velaran para que la seriedad y buena

(*) En estos últimos tiempos los gobiernos de Italia y el Uruguay han presentado á la deliberación de las Cámaros respectivas; proyectos de Ley en que se dispone la inmediata nacionalización de los Seguros. Dichos proyectos han originado fuerte controversia en ambos paises.

fé fueran al norma de los contratos de Seguros. Se han impuesto una nueva misión: el fundar instituciones que ostentando la autoridad que les confería su carácter oficial se dedicaran á la práctica del seguro; proteger también oficialmente á otras entidades análogas encaminadas al mismo fin; y dictar disposiciones que tuvieran por objeto estimular el ahorro entre los ciudadanos.

La institución que dedicada á los seguros existe en España con carácter oficial es el *Instituto Nacional de Previsión,* del cual nos vamos á ocupar; trataremos luego de la *Caja de Pensiones para la Vejez,* de Barcelona, que goza asimismo de carácter oficial, y por último procuraremos dar noticia de alguna de las disposiciones á que nos referíamos anteriormente.

El Instituto Nacional de Previsión. — Fué fundado por la Ley de 27 de Febrero de 1908 y su creación ha sido uno de los mayores aciertos que han tenido nuestros Poderes públicos, y á la que han cooperado varones eminentes pertenecientes á distintos y distanciados partidos políticos, lo cual hace honor al adjetivo de «Nacional» que ostenta.

El Instituto tiene señalados dos fines:

1.º Recibir y administrar imposiciones para constituir pensiones para la vejez.

2.º Crear un estado de opinión favorable á la previsión y al ahorro, difundiendo los conocimientos sobre estas materias.

Para el primer objeto se vale de las fórmulas matemáticas; para el segundo de folletos, conferencias, etc.

Cada uno de estos fines bastaría por sí solo á hacerle acreedor de la estima y respecto generales; por una parte realiza el seguro, por la otra moraliza las costumbres como consecuencia inmediata del ahorro y previsión.

El criterio que preside á las operaciones del Instituto es noble y amplio.

Noble, porque lejos de limitar sus beneficios á los ciudadanos españoles, como parecía indicar el epígrafe «Nacional», los extiende á todos los extranjeros siempre que los Estados de que sean naturales practiquen el principio de reciprocidad y aún llega á equiparar á los ciudadanos españoles para los efectos de sus operaciones á los naturales de Portugal y Repúblicas ibero-americanas, no obstante no proclamar todavíar el primero el principio de reciprocidad y no haber en la mayoría de las segundas nada legislado sobre materia de seguros oficiales.

Es asimismo amplio, porque no exige del imponente la entrega periódica y constante de determinada cantidad, sino que las imposiciones se consideran independientes unas de otras y cada una originando por sí sola una pensión; con lo cual hace asequibles sus beneficios á las clases modestas, pues á veces una de las causas que impiden á un obrero el asegurarse, es la incertidumbre que tiene sobre la posiblidad de poder pagar en plazos fijos determinadas cantidades.

La ventaja máxima del Instituto, que le hace distinguir de las entidades similares, estriba en que para el cálculo de las pensiones aplica las fórmulas de las *primas puras*, sin recargos de gastos de administración ni tanto de beneficios.

Esto, que sería imposible en una empresa particular, es factible aquí merced á que estos gastos de administración los sufraga el Estado por medio de una subvención anual mínima de 125.000 pesetas independientemente de un capital de fundación de 500.000 pesetas entregado por el mismo al constituirse el Instituto. El sobrante de sus gastos y reservas, si lo hay, más subvenciones extraordinarias, tanto del Estado como de la Provincia ó Municipios, se dedicará á bonificar las pensiones constituídas.

Estas ventajas no pueden redundar en perjuicio de las demás Compañías, debido á que la mayor pensión que permite disfrutar el Instituto no puede exceder á 1.500 pesetas anuales, siendo la imposición mínima 0.50 pesetas.

Las tarifas están calculadas tomando como base, la tabla de mortalidad R. F. (Rentistas franceses) por no existir hasta ahora tablas españolas, y el tipo de interés adoptado es el de 3'25 %. Las pensiones pueden constituirse para ser cobraderas desde 55, 60 ó 65 años, y puden adoptar dos formas:

1.ª A capital cedido.

2.ª A capital reservado.

Por la primera forma, al ocurrir el fallecimiento, el capital impuesto por un individuo queda de absoluta propiedad del Instituto.

Por la segunda, el Instituto se compromete á devolver á los herederos el capital impuesto en su integridad.

En las pensiones á capital reservado el Instituto establece cuatro grados: 1.º, pensión á capital reservado sin limitación alguna; 2.º, pensión á capital reservado pero con derecho á percibir tan sólo la mitad de este capital; 3.º, capital reservado en su totalidad pero tan sólo cuando el fallecimiento ocurra antes de la edad del retiro; y 4.º, capital reservado en su mitad, pero también sólo cuando la muerte acontezca antes de esa edad.

Es decir, que ó bien se devuelve el capital impuesto, ya en su totalidad, ya en su mitad, *siempre*; ó bien se devuelve esa totalidad ó esa mitad sólo mediando la condición de que el fallecimiento ocurra antes de la edad fijada para cobrar la pensión.

De todo lo expuesto, cabe deducir la importancia y papel que tiene asignado el Instituto, cuyo éxito va aumentando de día en día, demostrando que la práctica del ahorro va extendiéndose y mereciendo el funcionamiento del mismo, los plácemes y elogios no solo de los competentes nacionales, sino también de los extranjeros.

Caja de pensiones para la vejez y ahorros, de Barcelona. — Comparte con el Instituto Nacional de Previsión la hermosa labor propagar en Cataluña y Baleares el ahorro en general y con preferencia entre las clases modestas.

Es una institución que hace honor á Cataluña, pues tiene en su favor el hecho de deber su existencia á la iniciativa privada de las Sociedades económicas de Barcelona (*) y además el que su fundación (1903) fué anterior á la del Instituto Nacional de Previsión, correspondiéndole, pues, los honores de la prioridad sobre éste. Fué reconocida y aceptada oficialmente por el Estado por las Reales órdenes de 22 Noviembre de 1905 y 8 Mayo de 1909, y actualmente ostenta la representación oficial del Instituto en Cataluña, reasegurando mútua y parcialmente las operaciones de retiro que realizan en el antiguo Principado.

Las operaciones de retiro á que se dedica la «Caja» son análogas á las del Instituto, pero su campo de acción se limita á Cataluña y Baleares, á cuyo fin son en gran número las Sucursales que existen en los importantes centros fabriles é industriales de la región.

Las pensiones pueden constituirse por imposiciones independientes unas de otras, con lo cual el obrero no queda fatalmente ligado á pagar una determinada cantidad en plazos fijos. Las edades que pueden escogerse para el disfrute de la pensión son las de 50, 55, 60 y 65 años.

Una combinación importante de la «Caja» y también del Instituto, consiste en que el obrero imponente que quede imposibilitado para el trabajo y reuna determinadas condiciones, tiene derecho á disfrutar en el acto la pensión que correspondería si hubiese hecho las imposiciones para empezar á cobrar la renta en la edad en que la invalidez ocurra.

Una misma persona no puede, según los Estatutos, llegar á imponer en la «Caja» cantidades que correspondan á pensiones mayores de 2.250 pesetas anuales, ni llegar á reunir en concepto de ahorro cantidad superior á 5.000 pesetas. La mínima imposición es una peseta y las tarifas están calculadas según las tablas R. F. y al 3 % de interés.

En cuanto á las operaciones que verifica la Sección de Ahorros pueden tener por fin, ó bien constituir un capital, ó bien con los intereses que produce el capital impuesto formar una pensión para la vejez, con lo cual el imponente sólo se priva de los intereses.

Esta institución constituye un nuevo timbre de gloria para la región catalana, siendo su ideal «que entre las clases modestas llegue á ser costumbre el poseer una libreta de la *Caja de pensiones*, como afortunadamente lo es ya el poseer una libreta de la *Caja de ahorros*.

MUTUALIDAD ESCOLAR. — Como una ramificación del Instituto Nacional de Previsión y en íntima conexión con éste, se han

(*) De la Comisión técnica encargada de discutir y aprobar los Estatutos de la «Caja» formaba parte el autor de esta obra D. Antonio Torrents y Monner. El ponente encargado de la redacción de los mismos fué don Francisco Moragas y Barret que actualmente desempeña el merecido cargo de Director General de la «Caja».

constituído diversas entidades cuyo fin no es otro que el fomentar entre los niños asistentes á las escuelas oficiales ó particulares el moralizador hábito del ahorro.

Entre estas entidades merecen citarse la Mutualidad Escolar Madrileña, la de San Clemente de Llobregat (Barcelona), la de Vila, etc.

Todas ellas han merecido sanción oficial en virtud del Real decreto de 7 de Julio de 1911, en el que se señalan á las mualidades escolares las funciones iniciales siguientes: 1.ª, el ahorro; 2.ª, la constitución de dotes infantiles; 3.ª, la formación de pensiones para la vejez, todo ello con la cooperación de las Cajas de Ahorro reconocidas oficialmente y con la del Instituto Nacional de Previsión.

Por R. O. de 11 de Mayo de 1912 se dictó el Reglamento de Mutualidad escolar, por el que se crea una Comisión que entienda en todo lo concerniente á las mutualidades escolares, con objeto de estimularlas y protegerlas. Se dispone en él la formación de un Registro de Mutualidades y declara se computarán como méritos en su carrera, los trabajos que los Maestros de las Escuelas Nacionales hagan en favor de estas instituciones.

CONCLUSIÓN

Al dar por terminada nuestra labor, creemos necesario insistir en hacer resaltar que el único deseo que nos ha guiado, ha sido presentar del modo más claro y elemental que nos ha sido posible cuestión tan importante como la teoría matemática de los seguros.

El que desearse estudiar el fundamento científico de los seguros de una manera detenida y comprensiva de todos los aspectos que pueden presentarse, ha de pretrecharse antes con los conocimientos que suministra el Análisis infinitesimal y el Cálculo integral pues sin ellos, es imposible dar un paso en ésta como en otras cuestiones.

Para dar de ello un ligero ejemplo detengámonos á considerar la construcción de las tablas de mortalidad y supervivencia.

Se han visto ya los diferentes medios de construcción de Tablas y asimismo que todos ellos están sujetos á errores de mayor ó menor consideración. Prescindiendo del método adoptado supongamos una tabla ya construída.

Sobre una línea horizontal tracemos otra perpendicular, con lo cual quedará formado un ángulo recto. Tomamos sobre la línea horizontal, á partir del vértice del ángulo, distancias, que en una escala cualquiera equivalgan á las edades que comprende la Tabla. Por cada una de estas divisiones levantemos una perpendicular á la cual daremos una longitud equivalente al número de sobrevivientes indicados por la Tabla para la edad respectiva, ya en la misma escala, ya en otra distinta.

De este modo quedará formada una serie de perpendiculares de distinta longitud. Si ahora unimos los extremos de cada perpendicular por medio de líneas rectas, se obtendrá una línea quebrada que se asemejará á una curva con mayor ó menor número de ondulaciones.

Aplicando esta representación gráfica á varias Tablas, observaremos enseguida que las que están basadas en un número relativamente reducido de observaciones y construidas con métodos imperfectos presentan una curva sumamente complicada y llena de ondulaciones bruscas al paro que las Tablas cuya construcción ha estado basada siguiendc un método regular y comprensivas de un gran número de observaciones, originan curvas mucho más uniformes, aumentando la regularidad á medida que aumenta la exactinud de los medios empleados.

Por consiguiente, se puede asegurar sin temor que si fuera factible construir una tabla que comprendiera á la totalidad de los hombres, siguiendo al mismo tiempo un procedimiento perfecto exento de errores, obtendríamos una curva perfectamente regular sin sinuosidades de ninguna especie. De aquí que debamos encaminar nuestro esfuerzo á conseguir la obtención de una curva que difiriendo poco de la verdadera, pueda hacer sus veces y nos indique la ley de mortalidad.

Para ello podríamos seguir el procedimiento llamado gráfico, que consiste en trazar á pulso dicha curva, lo cual exige bastante destreza del operador.

Pero para obtener un exacto *ajustamiento* de la curva dada, deberemos acudir á las fórmulas de interpolación de Lagrange y Newton, que se estudian en Análisis matemático y que por esta razón omitimos, con cuyas fórmulas llegaríamos al fin deseado aunque quizá bajo la forma de una ecuación algo complicada en la mayor parte de las veces.

Con objeto de que la referida ecuación presente mayor sencillez, se ha prescindido algunas veces de los medios analíticos, y se ha acudido á fórmulas empíricas, deducidas después de repetidos tanteos.

Moivre fué el primero que emprendió esta tarea, tomando como base la tabla construída en 1693 por Halley y de la cual hemos hecho mención en la página 37. Observó que en dicha tabla el número de sobrevivientes decrecía de año en año en progresión aritmética aproximadamente, y admitiendo que la razón de esta progresión era la unidad y teniendo en cuenta que el límite de la Tabla eran los 86 años proponía como *ecuación de supervivencia,* la siguiente:

$$V_a = 86 - a$$

siendo a la edad que se considerase é indicando V_a el número de sobrevivientes á dicha edad a.

Si se comparan los resultados que arroja esta fórmula con las indicaciones de cualquier Tabla se hecha de ver la gran inexactitud que encierra; no obstante en su época se usó y aún prestó grandes servicios.

En 1823, Babbage operando con las indicaciones que le daba una Tabla de supervivencia sueca. dió como *ecuación de supervivencia,* la siguiente de segundo grado:

$$V_a = 6199'8 - 9'29.\,a - 1'5767\,\frac{a\,(a-1)}{1\,.\,2}$$

completamente empírica como la anterior.

Gompertz en 1825 y Makeham en 1860 propusieron fórmulas para el mismo objeto en las que el valor de a entraba como exponente de cantidades constantes que se debían determinar por medios analíticos.

Actualmente aún se admite que la vida probable en Europa puede determinarse con muy poco error, con la fórmula

$$x = 59 - 0'75 \cdot a$$

representando x la vida probable y a la edad del individuo considerado. Del mismo modo para la vida media se ha admitido la expresión

$$x = 53'30 - 0'65\ a\,.$$

Por último, debemos recordar la fórmula que al hablar de las sociedades de socorros mutuos se dió en la página 104 indicadora de los días de enfermedad probables en un año para las edades comprendidas entre 30 y 70 años, que era

$$Y = \frac{3670 \times 1'01^{a-30}}{V_a}$$

Todas estas fórmulas (que no son las únicas) indican la aspiración á representar por una fórmula exacta y á la vez sencilla la marcha de la ley de mortalidad.

Muchas otras cuestiones encontraríamos que para su exacta resolución, harían precisa la posesión de conocimientos superiores, pero prescindimos de ocuparnos de ellas porque á los pocos pasos tropezaríamos con fórmulas impropias de una obra elemental. Baste sólo lo apuntado para hacer comprender que para realizar un provechoso estudio de cálculo de seguros no es suficiente poseer tan solo una mediana cultura de Aritmética mercantil.

APÉNDICE

TABLAS

TABLA I

Ley de mortalidad en Francia según Deparcieux completada para los primeros años

Años de edad	Número de sobrevivientes á cada edad	Suma total de sobrevivientes hasta el límite de la tabla	Duración de la vida — Media — Años	Meses	Probable — Años	Meses	Años de edad	Número de sobrevivientes á cada edad	Suma total de sobrevivientes hasta el límite de la tabla	Duración de la vida — Media — Años	Meses	Probable — Años	Meses
0	1.286	51.467	39	4	42	0	50	581	12.135	20	5	21	0
1	1.071	50.181	46	4	53	2	51	571	11.554	19	9	20	3
2	1.006	49.110	48	4	54	11	52	560	10.983	19	1	19	7
3	970	48.104	49	1	55	4	53	549	10.423	18	6	18	10
4	947	47.134	49	4	55	2	54	538	9.874	17	10	18	1
5	930	46.187	49	2	54	10	55	526	9.336	17	3	17	5
6	917	45.257	48	10	54	4	56	514	8.810	16	8	16	8
7	906	44.340	48	5	53	9	57	502	8.296	16	0	16	0
8	896	43.434	48	0	53	2	58	489	7.794	15	5	15	4
9	887	42.538	47	5	52	6	59	476	7.305	14	10	14	8
10	879	41.651	46	11	51	10	60	463	6.829	14	3	14	0
11	872	40.772	46	3	51	1	61	450	6.366	13	8	13	4
12	866	39.900	45	7	50	3	62	437	5.916	13	0	12	7
13	860	39.034	44	11	49	6	63	423	5.479	12	5	12	0
14	854	38.174	44	2	48	9	64	409	5.056	11	10	11	4
15	848	37.320	43	6	47	11	65	395	4.647	11	3	10	8
16	842	36.472	42	10	47	2	66	380	4.252	10	8	10	1
17	835	35.630	42	2	46	5	67	364	3.872	10	2	9	6
18	828	34.795	41	6	45	8	68	347	3.508	9	7	9	0
19	821	33.967	40	10	44	11	69	329	3.161	9	1	8	5
20	814	33.146	40	3	44	2	70	310	2.832	8	8	7	11
21	806	32.332	39	7	43	5	71	291	2.522	8	2	7	6
22	798	31.526	39	0	42	9	72	271	2.231	7	9	7	0
23	790	30.728	38	5	42	0	73	251	1.960	7	4	6	7
24	782	29.938	37	9	41	3	74	231	1.709	6	11	6	2
25	774	29.156	37	2	40	6	75	211	1.478	6	6	5	9
26	766	28.382	36	7	39	10	76	192	1.267	6	1	5	4
27	758	27.616	35	11	39	1	77	173	1.075	5	9	4	11
28	750	26.858	35	4	38	4	78	154	902	5	4	4	7
29	742	26.108	34	8	37	7	79	136	748	5	0	4	3
30	734	25.366	34	1	36	10	80	118	612	4	8	4	0
31	726	24.632	33	5	36	1	81	101	494	4	5	3	9
32	718	23.906	32	9	35	3	82	85	393	4	1	3	7
33	710	23.188	32	2	34	6	83	71	308	3	10	3	3
34	702	22.478	31	6	33	9	84	59	237	3	6	2	11
35	694	21.776	30	11	33	0	85	48	178	3	2	2	9
36	686	21.082	30	3	32	3	86	38	130	2	11	2	6
37	678	20.396	29	7	31	5	87	29	92	2	8	2	4
38	671	19.718	28	11	30	8	88	22	63	2	4	2	0
39	664	19.047	28	2	29	10	89	16	41	2	1	1	9
40	657	18.383	27	6	29	0	90	11	25	1	9	1	6
41	650	17.726	26	9	28	3	91	7	14	1	6	1	3
42	643	17.076	26	1	27	5	92	4	7	1	3	1	0
43	636	16.433	25	4	26	7	93	2	3	1	0	1	0
44	629	15.597	24	7	25	9	94	1	1	0	6	0	6
45	622	15.168	23	11	24	11	95	—	—	—	—	—	—
46	615	14.546	23	2	24	2	—	—	—	—	—	—	—
47	607	13.931	22	5	23	4	—	—	—	—	—	—	—
48	599	13.324	21	9	22	7	—	—	—	—	—	—	—
49	590	12.725	21	1	21	9	—	—	—	—	—	—	—

TABLA II

Ley de mortalidad en Francia según Duvillard

Años de edad	Número de sobrevivientes á cada edad	Años de edad	Número de sobrevivientes á cada edad	Años de edad	Número de sobrevivientes á cada edad	Años de edad	Número de sobrevivientes á cada edad	Años de edad	Número de sobrevivientes á cada edad	Años de edad	Número de sobrevivientes á cada edad
0	1.000.000	20	502.216	40	369.404	60	213.567	80	34.705	100	207
1	767.525	21	496.317	41	362.419	61	204.380	81	28.886	101	135
2	671.834	22	490.267	42	355.400	62	195.054	82	23.680	102	84
3	624.668	23	484.083	43	348.342	63	185.600	83	19.106	103	51
4	598.713	24	477.777	44	341.235	64	176.035	84	15.175	104	29
5	583.151	25	471.366	45	334.072	65	166.377	85	11.886	105	16
6	573.025	26	464.863	46	326.843	66	156.651	86	9.224	106	8
7	565.838	27	458.282	47	319.539	67	146.882	87	7.165	107	4
8	560.245	28	451.635	48	312.148	68	137.102	88	5.670	108	2
9	555.486	29	444.932	49	304.662	69	127.347	89	4.686	109	1
10	551.122	30	438.183	50	297.070	70	117.656	90	3.830	110	0
11	546.888	31	431.398	51	289.361	71	108.070	91	3.093	—	—
12	542.630	32	424.583	52	281.527	72	98.637	92	2.466	—	—
13	538.255	33	417.744	53	273.560	73	89.404	93	1.938	—	—
14	537.711	34	410.886	54	265.450	74	80.423	94	1.499	—	—
15	528.969	35	404.012	55	257.193	75	71.745	95	1.140	—	—
16	524.020	36	397.123	56	248.782	76	63.424	96	850	—	—
17	518.863	37	390.219	57	240.214	77	55.511	97	621	—	—
18	513.502	38	383.300	58	231.488	78	48.057	98	442	—	—
19	507.949	39	376.363	59	222.605	79	41.107	99	307	—	—
20	502.216	40	369.404	60	213.567	80	34.705	100	207	—	—

TABLA III

Valores de A_n

ó sea el capital C que debe imponerse para percibir una renta vitalicia anual de una peseta al interés del 4 % y según las tablas de mortalidad de Deparcieux y Duvillard.

Años	Valores de A_n según		Años	Valores de A_n según		Años	Valores de A_n según	
	Deparcieux	Duvillard		Deparcieux	Duvillard		Deparcieux	Duvillard
0	14,0697	11,6182	37	15,7548	13.8586	74	5,2218	4,6491
1	17,2103	14,7428	38	15,5557	13,6731	75	4,9455	4,4199
2	17,7396	16,5164	39	15,3487	13,4822	76	4,6520	4,1998
3	18,2425	17,4740	40	15,1326	13,2856	77	4,3697	3,9904
4	18,5090	17,9608	41	14,9075	13,0834	78	4,1052	3,7937
5	18,7492	18,1777	42	14,6726	12,8754	79	3,8346	3,6125
6	18,8765	18,2389	43	14,4274	12,6617	80	3,5962	3,4500
7	18,9535	18,2094	44	14,1714	12,4425	81	3,3696	3,3108
8	18,9957	18,1268	45	13,9042	12,2176	82	3,1641	3,2003
9	19,0219	18,0134	46	13,6250	11,9874	83	2,9395	3,1251
10	19,0076	17,8823	47	13,3567	11,7518	84	2,6786	3,0920
11	18,9492	17,7416	48	13,0765	11,5113	85	2,4243	3,1054
12	18,8437	17,5960	49	12,8070	11,2659	86	2,1847	3,1617
13	18,7342	17,4466	50	12,5256	11,0160	87	1,9773	3,2331
14	18,6204	17,3011	51	12,2545	10,7618	88	1,7105	3,2490
15	18,5023	17,1544	52	11,9953	10,2037	89	1,4461	3,0885
16	18,3795	17,0091	53	11,7248	10,2420	90	1,1873	2,9299
17	18,2749	16,8652	54	11,4434	9,9771	91	0,9410	2,7732
18	18,1666	16,7230	55	11.1727	9,7093	92	0,7119	2,6174
19	18,0544	16,5820	56	10,8908	9,4391	93	0,4808	2,4638
20	17,9380	16,4422	57	10,5972	9,1668	94	0,0000	2,3127
21	17,8407	16,3031	58	10,3140	8,8928	95	0,0000	2,1627
22	17,7404	16,1644	59	10,0196	8,6176	96	0,0000	2,0130
23	17,6369	16,0258	60	9,7130	8,3416	97	0,0000	1,8735
24	17,5299	15,8868	61	9,3933	8,0652	98	0,0000	1,7331
25	17,4196	15,7469	62	9,0595	7,7889	99	0,0000	1,5911
26	17,3056	15,6059	63	8,7339	7,5130	100	0,0000	1,4603
27	17,1877	15,4632	64	8,3942	7,2381	101	0,0000	1,3286
28	17,0659	15,3184	65	8,0394	6,9646	102	0,0000	1,2207
29	16,9399	15,1712	66	7,6910	6,6929	103	0,0000	1,0910
30	16,8095	15,0210	67	7,3503	6,4236	104	0,0000	0,9955
31	16,6745	14,8676	68	7,0187	6,1571	105	0,0000	0,8766
32	16,5347	14,7105	69	6,6988	5,8939	106	0,0000	0,8230
33	16,3899	14,5494	70	6,3938	5,6345	107	0,0000	0,7119
34	16,2396	14,3839	71	6,0837	5,3797	108	0,0000	0,4808
35	16,0840	14,2138	72	5,7940	5,1299	109	0,0000	0,0000
36	15,9224	14,0388	73	5,5059	4,8862	110	0,0000	0,0000

TABLA IV

Valores de $A_{N,M}$

ó sea el capital necesario para constituir una renta vitalicia anual de una peseta sobre dos cabezas reunidas según la ley de mortalidad de Duvillard, al interés del 4 por 100

Edad del más joven	Diferencia de edad					Edad del más joven	Diferencia de edad				
	0 años	5 años	10 años	15 años	20 años		0 años	5 años	10 años	15 años	20 años
0	6,1070	9,5457	9,4751	9,1758	8,8793	55	6,8357	6,1796	5,4127	4,5701	3,7112
1	9,7821	12,1631	11,9382	11,5506	11,1746	56	6,5980	5,9427	5,1809	4,3495	3,5137
2	12,2778	13,6349	13,2954	11,8600	12,4406	57	6,3601	5,7069	4,9515	4,1329	3,3241
3	13,7700	14,4033	13,9921	13,5345	13,0930	58	6,1226	5,4726	4,7248	3,9208	3,1438
4	14,5893	14,7627	14,3129	13,8466	13,3945	59	5,8859	5,2402	4,5013	3,7139	2,9749
5	14,9935	14,8877	14,4186	13,9536	13,4966	60	5,6504	5,0102	4,2814	3,5129	2,8197
6	15,1492	14,8788	14,4044	13,9437	13,4843	61	5;4165	4,7829	4,0655	3,3185	2,6816
7	15,1580	14,7935	14,3217	13,8669	13,4057	62	5,1848	4,5587	3,8540	3,1317	2,5647
8	15,0807	14,6651	14,2003	13,7516	13,2884	63	4,9555	4,3380	3,6474	2,9538	2,4742
9	14,9538	15,5134	14,0577	13,6146	13,1483	64	4,7291	4,1210	3,4460	2,7865	2,4158
10	14,7992	13,3498	13,9040	13,4654	12,9948	65	4,5058	3,9082	3,2505	2,6320	2,3938
11	14,6304	14,1814	13,7453	13,3099	12,8332	66	4,2860	3,6998	3,0615	2,4930	2,4073
12	14,4554	14,0121	13,5850	13,1509	12,6662	67	4,0701	3,4962	2,8798	2,3730	2,4374
13	14,2790	13,8444	13,4253	12,9914	12,4973	68	3,8584	3,2977	2,7063	2,2770	2,4318
14	14,1041	13,6795	13,2670	12,8313	12,3267	69	3,6511	3,1046	2,5425	2,2100	2,2945
15	13,9324	13,5181	13,1107	12,6716	12,1547	70	3,4485	2,9175	2,3900	2,1761	2,1601
16	13,7647	13,3604	12,9565	12,5110	11,9817	71	3,2509	2,7367	2,2512	2,1749	2,0286
17	13,6013	13,2061	12,8041	12,3517	11,8074	72	3,0585	2,5629	2,1291	2,1904	1,8993
18	13,4422	13,0550	12,6533	12,1924	11,6319	73	2,8718	2,3969	2,0279	2,1760	1,7730
19	13,2872	12,9068	12,5037	12,0326	11,4549	74	2,6909	2,2396	1,9518	2,0440	1,6502
20	13,1360	12,7609	12,3549	11,8721	11,2760	75	2,5165	2,0926	1,9051	1,9155	1,5296
21	12,9868	12,6170	12,2047	11,7105	11,0952	76	2,3490	1,9578	1,8881	1,7904	1,4107
22	12,8419	12,4743	12,0562	11,5473	10,9120	77	2,1891	1,8378	1,8883	1,6684	1,3008
23	12,6991	12,3324	11,9066	11,3822	10,7264	78	2,0377	1,7363	1,8665	1,5504	1,1920
24	12,5579	12,1908	11,7557	11,2148	10,5381	79	1,8964	1,6580	1,7459	1,4371	1,0867
25	12,4179	12,0488	11,6030	11,0448	10,3469	80	1,7670	1,6076	1,6314	1,3279	0,9854
26	12,2801	11,9022	11,4482	10,8717	10,1526	81	1,6527	1,5884	1,5242	1,2227	0,8879
27	12,1407	11,7603	11,2908	10,6955	9,9552	82	1,5577	1,5942	1,4254	1,1291	0,8104
28	12,0007	11,6138	11,1303	10,5157	9,7545	83	1,4886	1,5967	1,3378	1,0415	0,7208
29	11,8596	11,4650	10,9665	10,3323	9,5506	84	1,4541	1,5297	1,2648	0,9636	0,6597
30	11,7169	11,3133	10,7990	10,1451	9,3443	85	1,4650	1,4851	1,2083	0,8975	0,5865
31	11,5695	11,1570	10,6266	9,9527	9,1317	86	1,5300	1,4645	1,1693	0,8443	0,5719
32	11,4217	10,9981	10,4506	9,7573	8,9179	87	1,6372	1,4594	1,1488	0,8168	0,5316
33	11,2707	10,8351	10.2703	9,5580	8,7010	88	1,7190	1,4405	1,1178	0,7680	0,3973
34	11,1161	10,6678	10,0856	9,3545	8,4812	89	1,6174	1,3436	1,0252	0,6998	—
35	10,9575	10,4959	9,8962	9,1471	8,2585	90	1,5181	1,2481	0.9348	0,6143	—
36	10,7946	10,3191	9,7022	8,9358	8,0332	91	1,4209	1,1532	0,8459	0,5819	—
37	10,6272	10,1374	9,5035	8,7209	7,8056	92	1,3248	1,0648	0,7735	0,5183	—
38	10,4548	9,9507	9,3003	8,5023	7,5759	93	1,2308	0,9765	0,6860	0,3718	—
39	10,2776	9,7590	9,0927	8,2806	7,3444	94	1,1395	0,8904	0,6221	—	—
40	10,0952	9,5623	8,8808	8,0557	7,1114	95	1,0491	0,8059	0,5420	—	—
41	9,9076	9,3606	8,6648	7,8281	6,8773	96	0,9580	0,7217	0,5104	—	—
42	9,7150	9,1542	8,4451	7,5981	6,6423	97	0,8776	0,6557	0,4571	—	—
43	9,5171	8,9433	8,2218	7,3661	6,4070	98	0,7961	0,5756	0,3339	—	—
44	9,3144	8,7281	7,9955	7,1323	6,1717	99	0,7162	0,5158	—	—	—
45	9,1069	8,5088	7,7663	6,8973	6,9368	100	0,6384	0,4422	—	—	—
46	8,8947	8,2858	7,5347	6,6614	5,7026	101	0,5610	0,4103	—	—	—
47	8,6782	8,0595	7,3011	6.4251	5,4697	102	0,5070	0,3716	—	—	—
48	8,4578	7,8302	7,0659	6,1887	5,2386	103	0,4306	0,2733	—	—	—
49	8,2337	7,5985	6,8295	5,9527	5,0096	104	0;3850	—	—	—	—
50	8,0064	7,3645	6,5925	5,7176	4,7833	105	0,3153	—	—	—	—
51	7,7762	7,1290	6,3553	5,4837	4,5602	106	0,3120	—	—	—	—
52	7,5436	6,8923	6,1182	5,2516	4,3407	107	0,2981	—	—	—	—
53	7,3090	6,6548	5,8818	5,0217	4,1256	108	0,2403	—	—	—	—
54	7,0729	6,4171	6,6465	4,7944	3,9155	109	0,0000	—	—	—	—

TABLA V

Valores de $A_{N,M}$ (1)

ó sea el capital necesario para constituir una renta vitalicia auual de una peseta sobre dos cabezas reunidas según la ley de mortalidad dc Depareieux, al interés del 4 %

Edad del más joven	Diferencia de edad 0 años	5 años	10 años	15 años	20 años	Edad del más joven	Diferencia de edad 0 años	5 años	10 años	15 años	20 años
0	8,6757	11,5809	11,8094	11,5731	11,3034	48	10,1733	9,4575	8,6144	7,5365	6,2332
1	12,9743	14,2791	14,4250	14,0895	13,7750	49	9,9054	9,1900	8,3440	7,2299	5,9415
2	13,7909	14,8028	14,8156	14,4701	14,1494	50	9,6232	8,9271	8,0596	6,9062	5,6594
3	14,6026	15,2883	15,1829	14,8287	14,5036	51	9,3617	8,6673	7,7751	6,5967	5,3798
4	15,1406	15,6126	15,3929	15,0344	14,7093	52	9,1224	8,4107	7,4902	6,3028	5,1259
5	15.4855	15,8027	15,4961	15,1362	14,8145	53	8,8713	8,1596	7,2088	6,0138	4,8710
6	15,7344	15,9066	15,5449	15,2056	14,8693	54	8,6072	7,8960	6,9123	5,7314	4,6169
7	15,9047	15,9305	15.5695	15,2342	14,8835	55	8,3645	7,6350	6,6134	5,4703	4,3766
8	16,0211	15,9238	15,5646	15,2347	14,8694	56	8,1100	7,3605	6,3163	5,2020	4,1188
9	16,1143	15,9019	15,5453	15,2220	14,8417	57	7,8424	7,0711	6,0216	4,9482	3,8676
10	16,1419	15,8442	15,4914	15,1763	14,7809	58	7,5955	6,7993	5,7439	4,7039	4,6387
11	16,0970	15,7476	15,4203	15,0945	14,6840	59	7,3367	6,5130	5,4725	4,4607	3,4021
12	15,9737	15,6292	15,3101	14,9738	14,5485	60	7,0646	6,2105	5,2098	4,2215	3,1923
13	15,8453	15,5062	15,1959	14,8487	14,4077	61	6,7778	5,9078	4,9387	3,9642	2,9909
14	15,7115	15,3782	15,0776	14,7188	14,2613	62	6,4745	5,6050	4,6794	3,7116	2,8060
15	15,5720	15,2450	14,9549	14,5839	14,1089	63	6,1865	5,3171	5,4282	3,4798	2,6092
16	15,4265	15,1263	14,8276	14,4437	13,9501	64	5,8819	5,0319	4,1753	4,2383	3,3727
17	15,3136	15,0223	14,7141	14,3162	13,8024	65	5,5584	4,7507	3,9224	3,0191	2,1465
18	15,1966	14,9148	14,5966	14,1839	13,6269	66	5,2461	4,4710	3,6599	2,8131	1,9311
19	15,0751	14,8037	14,4749	14,0466	13,4435	67	4,9461	4,2124	3,4100	2,6291	1,7472
20	14,9489	14,6888	14,3489	13,9039	13,2517	68	4,6603	3,9617	3,1791	2,4338	1,5126
21	14,8571	14,5891	14,2371	13,7739	13,0684	69	4,3916	3,7218	2,9487	2,2126	1,2813
22	14,7627	14,4865	14,1217	13,6392	12,8768	70	4,1442	3,4973	2,7510	2,0017	1,0571
23	14,6657	14,3809	14,0024	13,4779	12,6763	71	3,8911	3,2580	2,5608	1,8012	0,84035
24	14,5660	14,2721	13,8791	13,3097	12,4664	72	3,6661	3,0379	2,3980	1,6357	0,64233
25	14,4634	14,1598	13,7516	13,1342	12,2465	73	3,4445	2,8320	2,2236	1,4210	0,44246
26	14,3577	14,0440	13,6196	12,9509	12,0159	74	3,2294	2,6238	2,0238	1,2080	—
27	14,2488	13,9244	13,4828	12,7593	11,7949	75	3,0255	2,4431	1,8322	1,00050	—
28	14,1365	13,8008	13,3195	12,5588	11,5631	76	2,8001	2,2622	1,6450	0,79693	—
29	14,0207	13,6729	13,1492	12,3489	11,3407	77	2,5869	2,1025	1,4878	0,69969	—
30	13,9011	13,5405	12,9715	12,1289	11,1075	78	2,3952	1,9407	1,2913	0,42458	—
31	13,7775	13,4034	12,7859	11,8982	10,8836	79	2,1940	1,7502	1,0909	—	—
32	13,6497	13,2612	12,5919	11,6769	10,6699	80	2,0310	1,5786	0,90203	—	—
33	13,5174	13,0925	12,3889	11,4448	10,4466	81	1,8831	1,4228	0,72228	—	—
34	13,3803	12,9166	12,1764	11,2219	10,2129	82	1,7651	1,3038	0,56202	—	—
35	13,2382	12,7329	11,9536	10,9882	9,9889	83	1,6310	1,1398	0,39952	—	—
36	13,0907	12,5409	11,7199	10,7634	9,7549	84	1,4563	0,96139	—	—	—
37	12,9375	12,3401	11,4951	10,5485	9,5102	85	1,2883	0,78756	—	—	—
38	12,7372	12,1103	11,2409	10,3070	9,2595	86	1,1378	0,62575	—	—	—
39	12,5274	11,8691	10,9940	10,0537	8,9972	87	1,03281	0,49227	—	—	—
40	12,3076	11,6158	10,7346	9,8083	8,7223	88	0,86642	0,34965	—	—	—
41	12,0771	11,3495	10,4818	9,5512	8.4338	89	0,70358	—	—	—	—
42	11,8351	11,0893	10,2362	9,2814	8,1304	90	0,54810	—	—	—	—
43	11,5809	10,8154	9,9784	9,0183	7,8316	91	0,40760	—	—	—	—
44	11,3137	10,5467	9,7075	8,7424	7,5174	92	0,29817	—	—	—	—
45	11,0326	10,2639	9,4423	8,4526	7,1862	93	0,24039	—	—	—	—
46	10,7366	9,9850	9,1636	8,1476	6,8570	94	—	—	—	—	—
47	10,4623	9,7279	8,8866	7,8405	6,5428	95	—	—	—	—	—

(1) Otros autores designan á este valor con las letras $X_{a,b}$.

FÉ DE ERRATAS

Pág: 60: linea 9.ª;
dice, C_d , debe decir C_p.

Pág: 72: linea 6.ª;
dice, $C\ T^n = T_{n-1} + T_{n+2} + T_{n+1} + \ldots + T_w$
debe decir, $C\ T_n = T_{n+1} + T_{n+2} + T_{n+3} + \ldots + T_w$

Pag. 72: linea 27.ª;
dice, *siendo* 1 = 0'04; debe decir; *siendo* r = 0'04

Pág. 78: nota 2.ª
» 81: linea 27.ª
» 82: » 25.ª
dice, *Tabla V;* debe decir, *Tabla IV*

Pág. 82: linea 19.ª;
dice, *Tabla IV;* debe decir, *Tabla III*

Pág 112: linea 32.ª;
dice, *medida;* debe decir, *media*

INDICE

CAPITULO IV

CAPITULO V

CAPITULO VI

RF-3-46