

Generalitat de Catalunya

EXTENSIO  
D'ENSENYAMENT  
TÈCNIC



ELEMENTS D'ESTÀTICA  
GRÀFICA

Carrer d'Urgell 187 Barcelona



# ELEMENTS D'ESTÀTICA GRÀFICA

## PRELIMINARS

1. *L'Estàtica Gràfica* o *Grafostàtica*, estudia les condicions d'equilibri de les forces que actuen damunt d'un cos, mitjançant traçats gràfics. Per tant, permet de resoldre, amb l'ajut de regla i compàs, els problemes de composició i descomposició de forces, els de llur equilibri, el càlcul de moments estàtics i d'inèrcia i la determinació de centre de gravetat.

Tots aquests problemes també poden ésser resolts per càlculs numèrics. Amb tot, no es pot dir quin dels dos sistemes és el millor. De vegades és més breu i còmode el gràfic, però en altres casos és preferible el procediment analític.

L'Estàtica Gràfica té una gran aplicació a la teoria de la Resistència de Materials i àdhuc a la Construcció de Màquines, i permet de calcular bigues, voltes, ponts, murs, encavallades, etc.

2. *Consells pràctics sobre el traçat de dibuixos.* — Per tal de facilitar el traçat dels gràfics i obtenir el màxim de precisió en els resultats, donarem alguns consells per a la seva bona execució.

Cal emprar paper fort ben llis i sense grans, si és possible. És millor de tenir-lo tes, puix que cal evitar que faci bosses.

Cal emprar llapis durs, tallats ben fins, i traçar lleugerament per tal de poder esborrar i rectificar fàcilment.

Cal igualment evitar tota empremta sobre el paper, sia de llapis sia, sobretot, de les puntes del compàs.

Per a limitar les línies cal evitar d'estrebar el llapis; és millor fer-ho amb un petit traç transversal.

Quan moltes línies concorren en un mateix punt, cal verificar cada vegada que es traci una nova línia, que passi pel punt d'encreuament.

Utilitzeu exclusivament per als traçats un parell d'escaires bons. No feu servir mai regles T; les vores dels taulers no són prou exactes per a traçar línies paral·leles.

Eviteu els traçats per línies de poca longitud; per a comprovar els que donen verificacions múltiples utilitzeu línies com més llargues millor.

I



R. 7.695

Quan es tracta dels esforços que es produeixen a les barres que formen una construcció, serà avantatjós de distingir les que estan sotmeses a tensió de les que estan sotmeses a compressió. Cal refusar la indicació que consisteix a marcar amb un doble traç les barres comprimides. És molt millor d'emprar tintes de color distint per a les diferents menes d'esforços, reservant el color negre per a les línies estrictes del traçat.

3. *Elements de les forces.* — Tota força queda fixada quan hom coneix els seus elements, els quals són : Punt d'aplicació, direcció, sentit i intensitat.

*Punt d'aplicació :* El punt d'aplicació és el punt del cos on pot suposar-se concentrada l'acció de la força.

*Direcció :* La direcció d'una força és la del moviment que prendria el cos sotmès solament a l'efecte de la dita força.

La recta segons la qual actua la força és anomenada *línia d'acció* de la força. Sobre aquesta recta es pot desplaçar el punt d'aplicació de la força, sense alterar el sistema.

La direcció ve donada per la línia d'acció de la força.

*Sentit :* Sobre una mateixa direcció són possibles dos sentits oposats de moviment. Les dues forces  $OA$  i  $OB$  aplicades al punt  $O$  (fig. 1) tenen la mateixa direcció, però són de sentit oposat.

Si considerem com a positives les forces que actuen en el sentit  $OA$ , les que actuen en el sentit  $OB$  seran negatives i les assenyalarem amb el signe  $-$ .

*Intensitat.* És la mesura de la valor de les forces, comparant-les amb una força unitat.

La intensitat és, doncs, un nombre que expressa la relació entre l'efecte de la força donada i l'efecte de la que prenem per unitat.

Així : 4 kg és una força equivalent a 4 forces d'intensitat unitat 1 kg.

La unitat d'intensitat sol ésser la de pes : gram, quilogram, tona, etc.

4. *Representació gràfica de les forces.* —

Una força es representa gràficament traçant pel seu punt d'aplicació una recta paral·lela a la seva direcció i posant una punta de fletxa al seu extrem per indicar el seu sentit; la valor de la seva intensitat és donada per la longitud d'una recta proporcional a la intensitat de la força.

Així, una força  $F$  (fig. 2) d'intensitat 5 kg, de la qual coneixem el punt d'aplicació  $O$ , la direcció donada per la línia d'acció  $AB$  de la força i el sentit per la fletxa  $f$ ; la intensitat és representada per un segment rectilini  $ab$

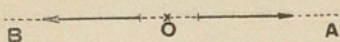


FIG. 1

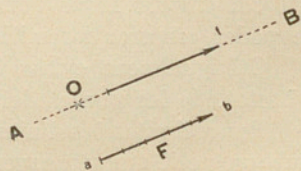


FIG. 2

de longitud proporcional a la intensitat de la força, traçat paral·lelament a la recta  $AB$ . Aquest segment  $ab$  està proveït d'una fletxa que n'indica el sentit.

5. En una construcció gràfica totes les forces han d'ésser referides a la mateixa escala, que per aquesta raó anomenarem *escala de forces*.

Prenent una escala de forces podem representar les intensitats respectives per longituds, en les quals cada unitat de longitud equival a una unitat de força. Així, a l'escala d' $1 \text{ cm} = 1 \text{ kg}$ , a cada centímetre de longitud correspondrà  $1 \text{ kg}$  d'intensitat. Si escollim una escala d' $1 \text{ tona per } 25 \text{ mm}$ , una força de 3 tones estarà representada al dibuix per una longitud de  $3 \times 25 = 75 \text{ mm}$ , i a una escala d' $1 \text{ kg} = 1 \text{ cm}$ , una longitud de  $80 \text{ mm}$  representa una força de  $80 : 10 = 8 \text{ kg}$ .

Quan en un mateix pla hi ha diverses forces, cal, a més, prendre una escala de distàncies per a fixar llur situació. Així, si escollim per escala de distàncies  $1 \text{ m} = 2,5 \text{ cm}$ , els punts d'aplicació de dues forces distants de  $2 \text{ m}$ , al dibuix estaran situats a  $2 \times 2,5 = 5 \text{ cm}$  un de l'altre.

A la fig. 3,  $OF$  i  $O'F'$  representen, a l'escala de  $0,5 \text{ cm} = 1 \text{ kg}$  dues forces paral·leles de 5 i 3 kg, respectivament, situades a l'escala d' $1,5 \text{ cm} = 1 \text{ m}$ , a  $2 \text{ m}$  de distància.

Per tal de facilitar el treball de conversió d'escala, cal escollir nombres amb els quals sigui fàcil d'operar.

Si no diem res en contra, suposarem que les forces actuen damunt d'un mateix pla.

La representació gràfica de totes les forces que actuen damunt d'un cos o sistema indeformable, constitueix una figura anomenada *diagrama de les forces*.

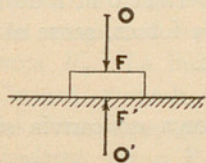


FIG. 4

6. *Reacció*. — Un cos reacciona sempre en sentit contrari a l'esforç a què és sotmès amb una intensitat igual al sudit esforç. Aquest esforç determina una pressió o una tensió. Així, quan, fig. 4, un cos reposa damunt d'un pla horitzontal, l'acció de la gravetat determina una *pressió* sobre el pla. Si el cos està suspès d'una corda l'extrem superior de la qual és fix, el seu pes produeix llavors una *tensió* de la corda.

La força  $O'F'$  d'igual intensitat, de la mateixa direcció i de sentit contrari al de la força  $OF$ , és anomenada *reacció*.

Quan dues forces (fig. 5) com la  $O'F'$  i la  $O''F''$  d'igual intensitat i

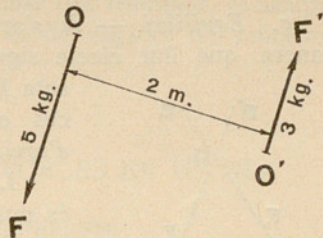


FIG. 3

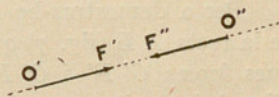


FIG. 5

de sentit contrari actuen en una mateixa línia d'acció, són anomenades forces directament oposades.

*Forces concurrents.* — Diem de dues o més forces  $F_1$ ,  $F_2$  (fig. 6) que són concurrents quan llurs línies d'acció  $AB$ ,  $A'B'$  es tallen en un punt  $O$ . Aquest punt d'intersecció pot ésser pres com a punt d'aplicació de les susdites forces.

Dues forces en un pla són sempre concurrents o paral·leles. Encara que en aquest darrer cas es pot suposar que són concurrents en un punt situat a distància infinita.

7. *Equilibri.* — Si s'apliquen diverses forces damunt d'un cos de manera que llur efecte sigui nul, es diu que el cos està en equilibri sota la influència d'aquestes forces; la posició del cos en aquestes condicions es denomina *posició d'equilibri*.

Llavors la resultant d'aquest sistema de forces és nulla.

Quan parlem de cossos sòlids o de sòlids invariables se suposa que la posició respectiva de cadascuna de les seves parts no és influïda per l'acció de les forces. Però com sigui que la rigidesa absoluta dels cossos no existeix, els teoremes d'estàtica sols tindran aplicació al cas en què el cos sol·licitat per un

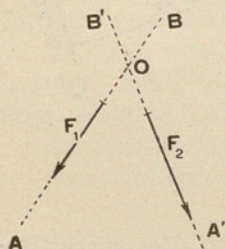


FIG. 6

sistema de forces sols sofreixi alteracions molt petites.

*Lema:* Dues forces  $O'F'$  i  $O''F''$  (fig. 5) d'igual intensitat, de la mateixa direcció i de sentit contrari, s'equilibren, perquè l'efecte de l'una és igual i contrari al de l'altra, i es produeix el mateix efecte que si no hi hagués cap força. És a dir, la resultant és nulla. Això permet d'introduir o suprimir dues forces que s'equilibren, dins un sistema de forces, sense alterar les condicions de repòs o de moviment del conjunt.

8. *Trasllat del punt d'aplicació.* — L'efecte d'una força no canvia si trasladem el seu punt d'aplicació a qualsevol punt de la línia d'acció de la força.

Per a demostrar-ho aplicarem al punt  $O'$  de la recta  $AB$  (fig. 7) que conté la força  $OF$ , dues forces  $O'F'$  i  $O'F''$  de sentit oposat i d'igual intensitat que la  $OF$ . Això, segons hem dit al paràgraf anterior, no canviarà en res l'efecte de la força  $OF$ .

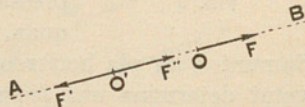


FIG. 7

Llavors els efectes de les forces  $OF$  i  $O'F'$ , per ésser iguals i oposades, s'anul·len i queda només la força  $O'F''$  igual a la  $OF$ , que té el punt d'aplicació en  $O'$ .

9. *Composició de forces.* — Compondre dues o més forces és cercar la força única que, aplicada al cos sobre el qual actuen, produeix el mateix efecte.

Del cas invers de trobar dues o més forces que facin el mateix efecte que la força de la qual es tracta, se'n diu descompondre una força.

Les forces que es componen o les que resulten de la descomposició d'una força s'anomenen *components* de la força.

La força única que pot substituir dues o més forces, és anomenada *resultant*.

Compondre dues o més forces, és a dir, trobar llur resultant, és sempre possible. En canvi, descompondre una força és de vegades un problema indeterminat.

## COMPOSICIÓ I DESCOMPOSICIÓ DE FORCES EN UN PLA

### COMPOSICIÓ DE FORCES CONCURRENTS

10. *Composició de dues forces concurrents.* — Siguin dues forces  $F_1$ ,  $F_2$  (fig. 8 (a)) les línies d'acció de les quals són concurrents en un mateix punt  $O$ . Podem sempre substituir-les, pel que fa referència a llur efecte sobre aquest punt, per una resultant única determinada per un traçat gràfic fàcil. En efecte, cal només portar a partir d'un punt arbitràriament escollit  $a$  (fig. 8 (b)) una longitud  $ab$  igual a de una les forces  $F_1$  en la direcció d'aquesta; a partir de l'extrem  $b$  portem una magnitud  $bc$  igual i paral·lela a la força  $F_2$ . La línia que uneix el punt d'origen  $a$  amb el punt d'arribada  $c$  ens donarà en magnitud i direcció la *resultant*  $ac = R$  de les dues forces

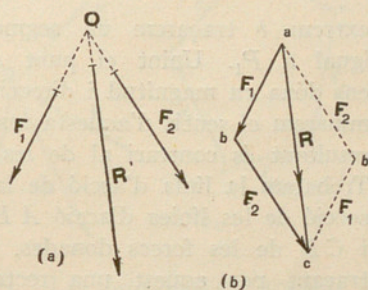


FIG. 8

dades. Quant al sentit en què actua aquesta resultant, el trobarem fàcilment sabent que el seu sentit és oposat al de les dues forces, cosa que és marcada a la figura per la fletxa corresponent.

Obtindrem en posició aquesta resultant menant pel punt  $O$  d'intersecció de les línies d'acció de les dues forces dades una paral·lela  $R'$  a la línia  $ac$ .

El triangle  $abc$  format per les tres forces és anomenat *triangle de les forces*.

És evident que hauríem pogut canviar l'ordre del traçat i portar primer en  $ab'$ , la força  $F_2$  (fig. 8 (b)) i després en  $b'c$  la força  $F_1$  per a acabar al

mateix punt  $c$  i obtenir, per consegüent, la mateixa resultant  $a c$ . El doble traçat  $a b c$  i  $a b'c$  constitueix el *paral·lelogram de les forces*, construcció fonamental en Mecànica i sobretot en l'Estàtica Gràfica, malgrat d'emprar-se quasi sempre exclusivament el triangle de les forces.

*Exemple.* — Dos pesos  $P_1$  i  $P_2$  (fig. 9) actuen mitjançant dues poltges

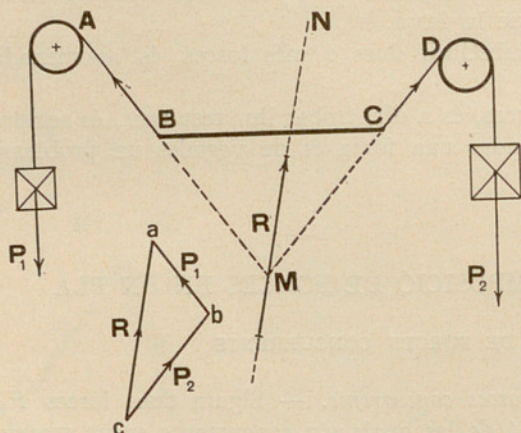


FIG. 9

per tal de canviar la direcció de les forces sobre d'una barra  $B C$ . Cercar la força que produeixi el mateix efecte que aquestes dues forces, la magnitud relativa de les quals és donada pels segments  $P_1$  i  $P_2$ .

El problema es redueix a cercar la resultant de la força  $P_1$  i de la força  $P_2$ , les línies d'acció de les quals són, respectivament,  $A B$  i  $C D$ . Per obtenir-la traçarem  $c b$  paral·lela a  $C D$ , i sobre d'ella prendrem la magnitud  $P_2$ . Pel seu

extrem  $b$  traçarem un segment  $b a$  paral·lel a  $A B$  i de magnitud igual a  $P_1$ . Unint el punt  $a$  amb el  $c$  obtindrem la recta  $a c$  que ens dóna en magnitud i direcció la resultant  $R$  de les dues forces. Determinarem el sentit d'aquesta resultant tenint en compte que el sentit de la resultant és contrari al de les components. El seu sentit és, doncs,  $c a$ . Trobarem la línia d'acció de la resultant determinant el punt  $M$  d'intersecció de les línies d'acció  $A B$  i  $C D$  de les forces donades, i traçant per aquest una recta  $M N$  paral·lela a  $a c$ . Marcant damunt de la recta  $M N$  un segment de longitud igual a  $a c$  i del mateix sentit, tindrem la força  $R$ , que fa el mateix efecte que les forces  $P_1$  i  $P_2$ .

II. Si al punt  $O$  d'aplicació real de les forces  $F_1$  i  $F_2$  (figura 10 (a)) afegim una tercera força  $Q$  igual i contrària a la resultant de les dues primeres, el punt  $O$  d'aplicació estarà en equilibri. Traçant (figura 10 (b)) el triangle de les forces corresponent  $a b c$  es veu de seguida que la tercera força  $Q$  és igual en intensitat a la resultant de les dues forces  $R$ ,

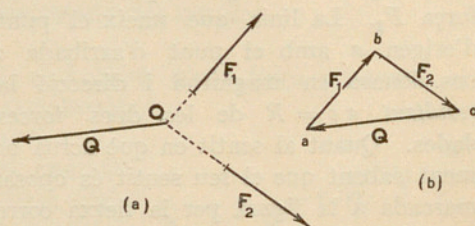


FIG. 10

però de sentit contrari. La força  $Q$  és anomenada *equilibrant* del sistema; el seu sentit indicat per la fletxa és igual al de les altres dues forces.

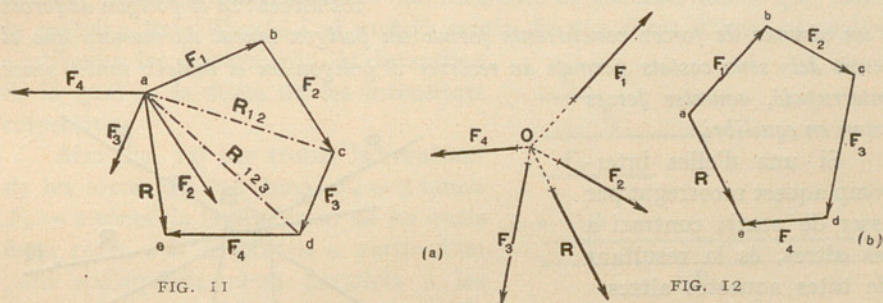
Tots els traçats que féssim per a compondre separatament dues forces qualssevol d'un sistema en equilibri, la  $F_1$  i la  $F_2$ , la  $F_1$  i la  $Q$  o per fi la  $F_2$  i la  $Q$ , serien idèntics i tots darien el triangle  $abc$ . Aquest triangle és el triangle de tres forces que estan en equilibri, i una qualsevol d'elles és l'equilibrant de les altres dues i en pot ésser presa com a resultant només canviant-li el sentit.

Així, doncs, perquè tres forces aplicades a un cos estiguin en equilibri, cal:

- Que llurs línies d'acció es tallin en un punt.
- Que el triangle de forces sigui tancat.
- Que les fletxes segueixin el mateix sentit en recórrer el triangle.

Recíprocament tot triangle que pot ésser recorregut en un sol sentit correspon a tres forces en equilibri, si llurs línies d'acció concorren en un mateix punt.

12. *Composició d'un nombre qualsevol de forces concurrents.* — Suposem que es tracta de trobar (fig. 11) la resultant de diverses forces concurrents  $F_1, F_2, F_3, F_4$  que actuen en un mateix pla. Podem aplicar a les



dues primeres el procediment emprat abans. Les compondrem traçant a partir de l'extrem  $b$  de  $F_1$ ,  $bc$  igual a  $F_2$ ,  $ac = R_{1,2}$  serà la seva resultant, component la qual amb  $F_3$  tindrem la resultant  $ad = R_{1,2,3}$ . Component finalment aquesta darrera amb  $F_4$  obtindrem la resultant total  $R$ . Les diagonals  $ac$ ,  $ad$ , traçades des de l'origen  $a$ , representen les *resultants parcials* de les forces compreses des de l'origen i l'extrem on termina la diagonal corresponent. Però ens podem estalviar de traçar  $ac$ , continuarem traçant per  $c$  una línia  $cd$  igual en magnitud, direcció i sentit a  $F_3$ , i així mateix  $de$  igual, paral·lela i del mateix sentit que  $F_4$ . El punt final  $e$  obtingut unit a la  $a$  donarà la línia  $ae$  resultant  $R$  de les quatre forces.

El traçat  $abcde$  és anomenat *polígon de les forces*.

13. És molt més pràctic de traçar a part la figura del polígon de les forces. Llavors (fig. 12 (b)), a partir d'un punt  $a$  arbitràriament escollit,

es porten una a continuació de l'altra les forces donades, de manera que formin un contorn poligonal recorregut en un sol sentit; el costat  $ae$  que

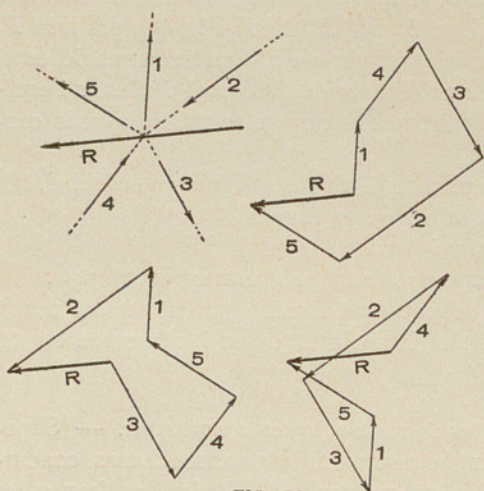


FIG. 13

*d'un sistema de forces concurrents forma un polígon tancat de manera que el sentit dels seus costats permeti de recórrer el polígon en el mateix sentit sense interrupció, aquestes forces estan en equilibri.*

Si una d'elles interromp aquest recorregut per ésser de sentit contrari a les altres, és la resultant de totes aquestes altres.

La simple inspecció del traçat permet de veure que l'ordre segons el qual s'han disposat les forces en el polígon, no influeix per a res en el resultat. La figura 13 dóna diverses composicions segons ordres diferents; de les forces donades la resultant  $R$  és la mateixa en totes elles.

*Exemple.* — Sobre el botó  $B$  d'una maneta  $AB$  (fig. 14) actuen les forces  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  i  $P_4$  segons les direccions de les bieles  $BC$ ,  $BD$ ,  $BE$  i  $BF$ . Cercar la força única que equival a les donades.

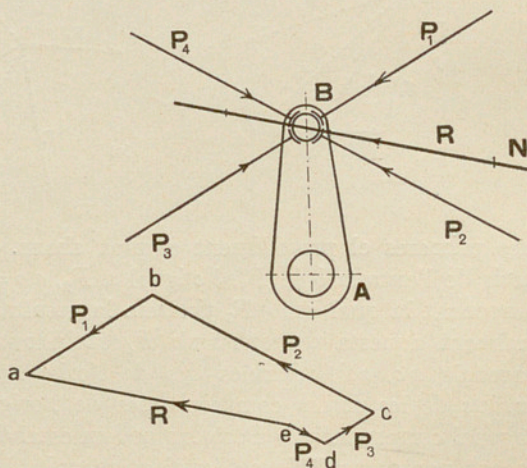


FIG. 14

tanca el polígon representa llavors la resultant  $R$  de les forces, en magnitud, direcció i sentit. Determinarem aquesta resultant en posició traçant, pel punt  $O$  d'intersecció de les línies d'acció de les forces donades, una paral·lela del mateix sentit i direcció que la línia  $ae$  que tanca el polígon.

Si l'extrem final  $e$  del polígon coincideix amb l'origen  $a$  del polígon, aquest es tanca, i la força resultant és nul·la; és a dir, llavors les forces que actuen al punt  $O$  estan en equilibri.

Podem dir d'aquest polígon el que havem dit del triangle de les forces: *Si el polígon de forces*

La força que compleix la condició imposada pel problema és la resultant de les forces  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  i  $P_4$ . Per trobar-la traçarem per un punt qualsevol  $e$  un segment  $ed$  paral·lel i d'igual magnitud i sentit que  $P_4$ . Pel seu extrem  $d$  es traça un altre segment  $dc$  paral·lel i d'igual magnitud i direcció que  $P_3$ ; pel punt  $c$  es porta el segment  $cb$  paral·lelament a  $P_2$ , de magnitud i direcció igual a la d'aquesta força, i des del punt  $b$  traçarem el segment  $ba$ , d'igual magnitud, direcció i sentit que  $P_1$ .

Unint l'origen  $e$  de la primera força amb l'extrem  $a$  de l'última obtindrem en magnitud i direcció la resultant  $R$  del sistema, i com que el seu sentit cíclic és contrari al de les components, serà  $ea$ . Podem obtenir la resultant en posició i magnitud traçant pel punt  $B$ , on concorren les forces  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  i  $P_4$ , una paral·lela  $BN$  a la direcció de la resultant  $ea$  del polígon de forces i prenent damunt d'ella un segment  $R$  igual a  $ea$ .

14. *Composició de forces que tenen la mateixa línia d'acció.* — Quan les forces tenen la mateixa línia d'acció, el polígon de les forces esdevé una línia recta i llur resultant és igual a la suma algebraica de les forces.

Les forces de la mateixa direcció poden ésser totes del mateix sentit o haver-n'hi de sentit oposat.

a) *Forces d'igual sentit.* — La resultant de diverses forces que tenen la mateixa línia d'acció i el mateix sentit, és una força d'igual direcció i sentit que les components, la intensitat de la qual és la suma de les intensitats respectives.

Així (fig. 15) per trobar la resultant de les forces  $F_1 = 1$  tona,  $F_2 = 3$  tones,  $F_3 = 2$  tones, la línia d'acció de les quals és la recta  $ad$ , es porten a partir d'un punt  $a$  d'aquesta recta paral·lela a les forces dades, a l'escala que sigui, els segments  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$  proporcionals a les intensitats de les forces respectives, el segment  $ad$  ens donarà la valor de la resultant  $R = 1 + 3 + 2 = 6$  tones.

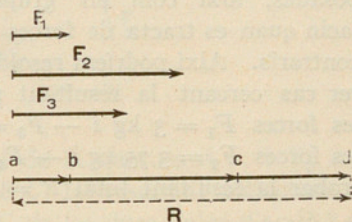


FIG. 15

Quan totes les forces són d'igual intensitat, la intensitat de la resultant és la d'una d'elles multiplicada per llur nombre. Per exemple, la resultant de 7 forces de 20 kg és una força de  $20 \times 7 = 140$  kg.

b) *Forces de sentits contraris.* — En el cas de dues forces que, tot tenint la mateixa línia d'acció, són forces de sentit contrari, la resultant és una força de la mateixa direcció i del mateix sentit que la major de les components; la intensitat de la resultant és la diferència de les intensitats de les dues forces.

Així (fig. 16) si volem cercar la resultant de les forces  $F_1 = 45$  kg i  $F_2 = -125$  kg aplicades al punt  $O$ , la línia d'acció de les quals és la recta  $ab$ ,

prendrem, a partir de  $O$ , el segment  $oa$  equivalent a la força  $F_1$ , i a comptar des de  $a$  i en sentit contrari, prendrem el segment  $ab$  proporcional a la intensitat de la força  $F_2$ ; el segment  $Oa$  ens donarà la valor de la resultant  $R = 45 - 125 = -80$  kg.

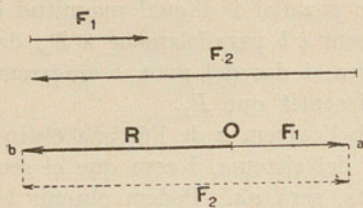


FIG. 16

$= 3 + 3,75 = 6,75$  kg i  $F' = -F_3 - F_4 = -8,50 - 5 = -(8,50 + 5) = -13,5$  kg. Llavors prenent, com en el cas 14, des del punt  $O$  una longitud  $oa$  proporcional a la intensitat de la força  $F$  i des de  $a$  una longitud  $ab$  proporcional a la força  $F'$ , la recta  $Oa$  ens donarà la valor de la resultant  $R = 6,75 - 13,50 = -6,75$  kg.

En ambdós casos és indiferent l'ordre en què es prenguin les forces proposades, així com els grups que es facin quan es tracta de forces de sentits contraris. Així podríem resoldre el darrer cas cercant la resultant parcial en les forces  $F_1 = 3$  kg i  $-F_3 = 8,50$  kg,  $F = 3 - 8,5 = -5,5$  kg, i la de les forces  $F_2 = 3,75$  kg i  $-F_4 = 5$  kg,  $F' = 3,75 - 5 = -1,25$  kg, per a trobar la resultant total  $R = -F' = -5,50 - 1,25 = -6,75$  kg.

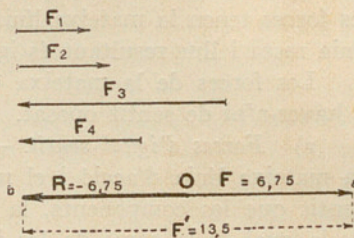


FIG. 17

#### FORCES DE DIRECCIÓ QUALSEVOL APLICADES A PUNTS DIFERENTS D'UN MATEIX COS. POLÍGON FUNICULAR.

16. *Cas de dues forces.* — Suposem que  $F_1$  i  $F_2$  (fig. 18 (a)) són dues forces aplicades a punts diferents d'un mateix cos, el punt de concurrència de les quals cau fora dels límits del paper, de manera que no els pot ésser aplicat el procediment indicat abans, de cercar el punt d'intersecció de les línies d'acció, per a compondre-les.

Llavors, amb tot, podrem resoldre el problema introduint dues forces auxiliars  $f$  i  $f'$ , forces que si suposem iguals i de sentit contrari no canviaran per a res l'equilibri del sistema.

Suposem-les aplicades segons una recta  $AB$  escollida arbitràriament. Podem combinar una d'elles, la  $f$ , amb la  $F_1$ , i l'altra,  $f'$ , amb la  $F_2$ ; llavors

obtidrem dues resultants,  $AC$  i  $BC$ , que substitueixen en llurs efectes les forces  $F_1$  i  $F_2$ .

Representem en una figura a part (fig. 18 (b)) la força  $F_1$  menant el vector  $ab$  paral·lel a  $F_1$  i traçant per  $b$  el vector  $bo$  que representa la força auxiliar  $f$  que actua segons  $AB$ . El costat  $ao$  del triangle  $abo$  representarà llavors la resultant de  $F_1$  i de  $f$ .

Tracem igualment  $bc$  paral·lela a  $F_2$ . La força auxiliar  $f'$  per tenir la mateixa línia d'acció que la  $f$ , coincideix amb el vector  $bo$ , però serà de sentit contrari. La recta  $oc$  representa la resultant de les dues forces. De manera que tindrem quatre forces disposades en polígon  $ab, bo, oc$  i  $cb$  que podem substituir per dues altres  $F_1$  i  $F_2$ . La resultant de l'un i de l'altre grup és la mateixa, és la recta  $ac$ , en magnitud i direcció.

Però la seva posició no està encara determinada: ho serà observant que podem traçar per  $A$  i  $B$  dues rectes  $AC$  i  $CB$  paral·leles a  $ao$  i  $oc$ , que es tallen en  $C$ .

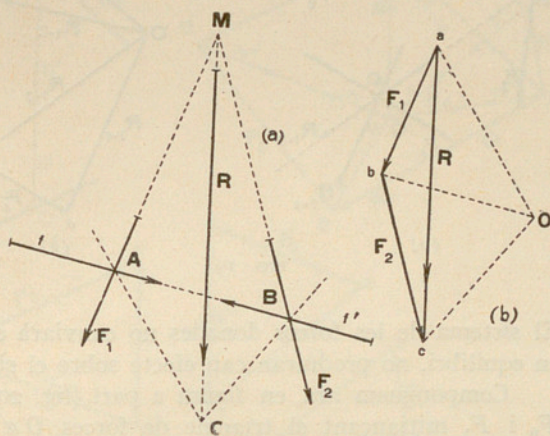


FIG. 18

Havent substituït  $F_1$  i  $f$  per llur resultant  $ao$ , la línia d'acció de la qual és  $AC$ , i  $F_2$  i  $f'$  per la llur  $oc$ , que té per línia d'acció  $BC$ , la resultant colectiva  $R$  passarà evidentment pel punt d'intersecció  $C$  de les dues línies d'acció i el segment  $ac$  ens la donarà en magnitud.

És fàcil de veure que la resultant determinada així pel punt  $C$  és la mateixa que la que hauríem obtingut si haguéssim prolongat simplement les línies d'acció de  $F_1$  i  $F_2$  fins a trobar-se en  $M$ .

17. *Cas d'un nombre qualsevol de forces.* — Suposem (fig. 19 a) que  $F_1, F_2, F_3$  i  $F_4$  són forces no concurrents situades en el mateix pla.

Per a determinar llur resultant, podem compondre d'antuvi  $F_1$  amb  $F_2$ , pel triangle de forces  $Oab$ . La resultant  $R_{1-2}$  passa, com ja sabem, per  $A$  punt on es tallen les línies d'acció de  $F_1$  i  $F_2$ .

Componguem després  $R_{1-2}$  i  $F_3$ . El triangle  $Obc$  en dona la intensitat i la direcció de la resultant  $R_{1-3}$ . La seva línia d'acció passarà per  $B$ ,

La  $R_{1-3}$ , composta amb la darrera força  $F_4$  (triangle de forces  $Ocd$ ). ens permet de trobar  $R_{1-4}$ , força que passa per  $C$ .  $R_{1-4}$  és la resultant total

de les quatre forces  $F_1, F_2, F_3$ , i  $F_4$ . Vegem per què.  $R_{1-4}$  és resultant de  $R_{1-3}$  i  $F_4$ , però  $R_{1-3}$  ho és així mateix de  $R_{1-2}$  i  $F_3$ ; doncs  $R_{1-4}$  serà també resultant de  $R_{1-2}$ ,  $F_3$  i  $F_4$ . Com que  $R_{1-2}$  equival a  $F_1$  i  $F_2$ ,  $R_{1-4}$  és, com volíem demostrar, resultant de  $F_1, F_2, F_3$  i  $F_4$ .

18. Anem a aplicar a un nombre qualsevol de forces el mètode que

hem donat en el número 17 per a dues forces, menys enutjós que el que acabem d'explicar.

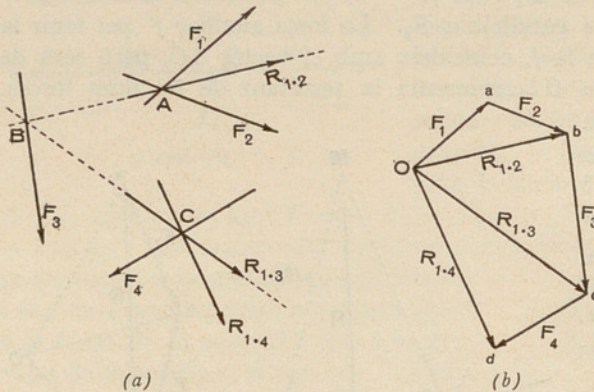


FIG. 19

Siguin (fig. 20 (a))  $F_1, F_2, F_3$  i  $F_4$  les forces que volem compondre, les quals tenen distints punts d'aplicació. Sobre una línia d'acció  $MN$  arbitràriament escollida apliquem dues forces  $F_0$  i  $-F_0$  iguals i oposades.

El sistema de les forces donades no canviarà en res, car  $F_0$  i  $-F_0$ , estant en equilibri, no produiran cap efecte sobre el sistema.

Compongum ara, en figura a part (fig. 20 (b)) les forces concurrents  $F_0$  i  $F_1$  mitjançant el triangle de forces  $Oab$ . La resultant d'aquestes dues forces és  $Ob = II$ , la qual té per línia d'acció la recta  $AB$  traçada per  $A$  paral·lelament a  $Ob$ , prolonguem  $AB$  fins que talli en  $B$ , la línia d'acció de  $F_2$ . La resultant de  $Ob = II$  i  $F_2$ , trobada amb ajut del triangle de forces  $Obc$  és  $Oc = III$ , la seva línia d'acció és  $BC$ , traçada per  $B$  paral·lelament a  $Oc$ . És evident que  $Oc = III$  és la resultant també de  $F_0, F_1$  i  $F_2$ , ja que  $Ob = II$  és la resultant de  $F_0$  i  $F_1$ .

Seguint d'aquesta forma obtindrem com a resultant de  $Oc = III$  i  $F_3$  la  $Od = IV$ , la qual és la resultant de  $F_0, F_1, F_2$  i  $F_3$ . La línia d'acció de  $Od$  és la línia  $CD$ . Continuant, cercarem la resultant  $Oe = v$  que és la resultant de  $Od = IV$  i  $F_4$  o sia la resultant de  $F_0$  i les altres forces donades  $F_1, F_2, F_3$  i  $F_4$ . La línia d'acció de  $Oe$  és la línia  $DE$ .

Finalment, component la força  $Oe = v$  amb  $-F_0 = aO$ , obtindrem pel triangle de forces  $aOe$  la resultant  $ae = R$ . Aquesta resultant és també la resultant de les forces donades  $F_1, F_2, F_3$  i  $F_4$ , que hauríem pogut obtenir directament construint el polígon  $abcde$  de les forces donades  $F_1, F_2, F_3$  i  $F_4$ .

Ara ens cal determinar la línia d'acció de la resultant  $R$ ; per això observem que el punt  $P$  d'intersecció de  $MN$  i  $ED$ , línies d'acció de  $-F_0$  i de  $Oe$ , respectivament, és un punt de la línia d'acció de la resultant, la direcció de

la qual és paral·lela a  $a e$ . En efecte, per formar les forces  $-F_0$ ,  $O e$  i  $R$  el triangle  $a O e$ , les línies d'acció d'aquestes tres forces passen per un mateix punt. Aquest punt no és altre que el punt  $P$  d'intersecció de les línies d'acció  $M N$  i  $E D$  de  $-F_0$  i de  $O e$ , respectivament. Traçant llavors per  $P$

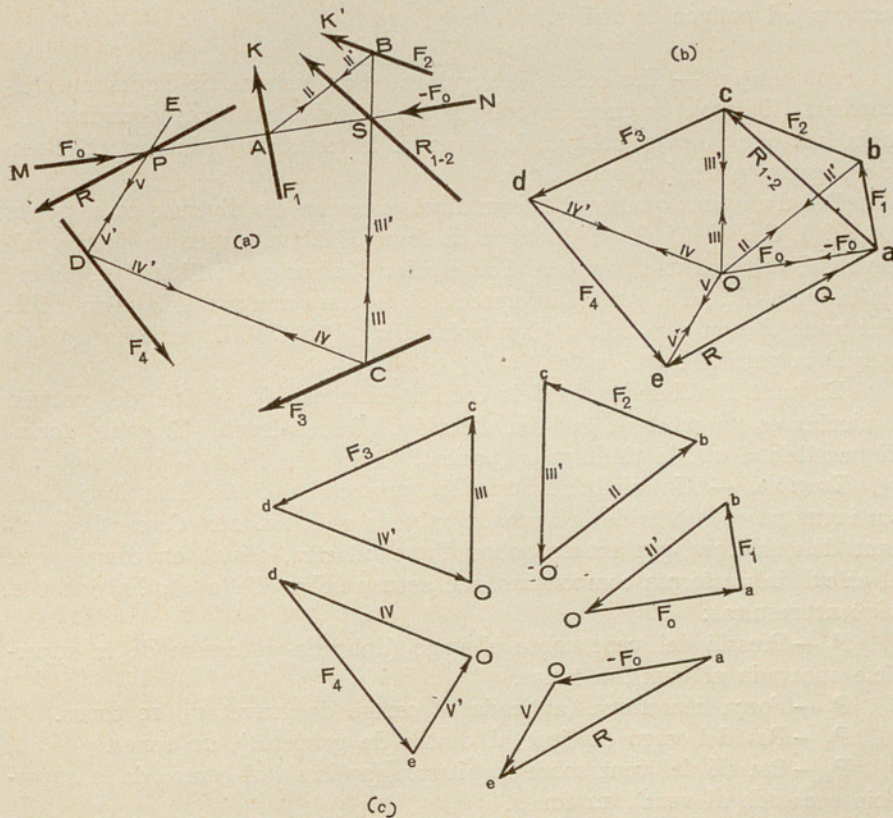


FIG. 20

una paral·lela a  $a e$  obtindrem la línia d'acció de la resultant  $R$ , la magnitud i sentit de la qual són determinats per la línia  $a e$  del polígon de forces.

Com que la intensitat de les forces auxiliars  $-F_0$  i  $F_0$  i llur línia d'acció  $M N$  poden ésser qualssevilla, és evident que hi haurà una infinitat de traçats que ens permetran de trobar la resultant d'un sistema de forces.

19. *Definicions.* — El punt  $O$  comú a tots els triangles és el pol.

Les rectes  $O a$ ,  $O b$ ,  $O c$ ,  $O d$  i  $O e$  que uneixen el pol amb cadascun dels vèrtexs del polígon de forces són els *radis polars* del polígon de forces.

La figura construïda pels radis polars, la resultant i les forces del polígon de forces és el *diagrama de forces*.

El polígon  $M A B C D E$  s'anomena *polígon funicular* de les forces donades. Els costats primer i darrer  $M A$  i  $D E$  paral·lels als radis polars que uneixen el pol amb l'origen i la fi de la resultant, s'anomenen *costats extrems* del polígon funicular.

20. *Regla*. — Per cercar la resultant d'un sistema de forces no concurrents (fig. 20), es traça el polígon  $a b c d e$  de les forces donades. La línia  $a e$ , que tanca el polígon de forces, és la resultant en intensitat, direcció i sentit de les forces donades.

Des d'un punt qualsevol  $O$  com a pol es tracen els diversos radis polars  $O a$ ,  $O b$ ,  $O c$ ,  $O d$  i  $O e$  del polígon de forces. Llavors, per un punt qualsevol  $M$ , es traça una paral·lela al radi polar  $O a$  fins que talli la línia d'acció de la força  $F_1$ . Pel punt d'intersecció  $A$  es traça una paral·lela al radi  $O b$ . Pel punt  $B$  una paral·lela al radi polar  $O c$ . Per  $C$ ,  $C D$  paral·lela a  $O d$  i per  $D$  la paral·lela  $D E$  a  $O e$ .

El punt  $P$  d'intersecció dels costats extrems  $M A$  i  $D E$  del polígon funicular és un punt de la línia d'acció de la resultant. Traçant, doncs,  $R$  paral·lela a  $a e$ , la tindrem en posició.

*Exemple*. — Un viaducte situat en una corba d'una línia fèrria està sostingut per pilastres de la forma dibuixada a la fig. 21. Cercar la resultant dels esforços que actuen sobre d'una pilastra, tenint en compte que el càlcul dels esforços components que actuen sobre d'ella ens ha donat el següent resultat:

$P_1$  — Pressió del vent sobre el vagó (aplicada al centre de la superfície encarada al vent), 6 tones.

$P_2$  — Força centrífuga (aplicada al centre de gravetat), 10 tones.

$P_3$  — Pes del vagó (aplicat al centre de gravetat), 20 tones.

$P_4$  — Pressió del vent sobre la pilastra (aplicada al centre de la superfície encarada al vent), 12 tones.

$P_5$  — Pes de la pilastra (aplicat al centre de gravetat), 80 tones.

Per un punt qualsevol  $a$  traçarem una força equivalent a  $P_1$ , pel seu extrem  $b$  una força igual i paral·lela a  $P_2$ , pel punt  $c$  extrem de l'anterior tracem un segment igual, paral·lel i de la mateixa magnitud que  $P_3$  i a continuació pel punt  $d$  un sector equivalent a  $P_4$  i per fi pel punt  $e$  traçarem una força igual i paral·lela de la mateixa magnitud i direcció que  $P_5$ . Unint el punt  $a$  amb el punt  $f$  tindrem en magnitud i direcció la resultant de  $a f$  de sentit contrari al de les components.

Per determinar la línia d'acció de la resultant traçarem el polígon funicular d'aquest sistema de forces. Per a això unirem un punt qualsevol  $O$  amb els vèrtexs  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  i  $f$  del polígon de forces i per un punt  $A$  de  $P_1$  traçarem  $A M$  paral·lel a  $a O$  i  $A B$  paral·lel a  $O b$ . Pel punt  $B$  on  $A B$

talla  $P_2$  traçarem  $BC$  paral·lel a  $Oc$  i pel punt  $C$  d'intersecció de  $BC$  amb  $P_3$  traçarem  $CD$  paral·lel a  $Od$ .

Des de  $D$  es traça  $DE$  paral·lel a  $Oe$  fins a trobar  $P_5$  i per fi traçant des de  $E$  una paral·lela  $EM$  a  $Of$  talla  $AM$  en el punt  $M$  que és un punt

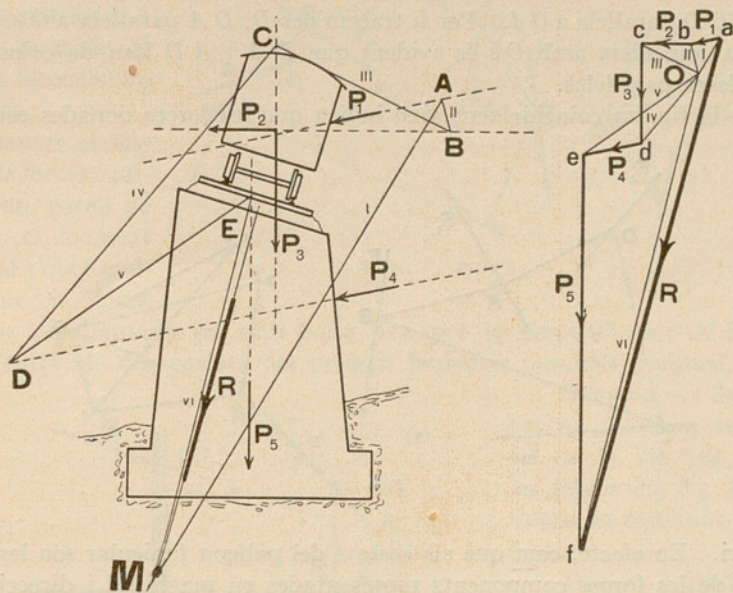


FIG. 21

de la resultant. Fent passar per  $M$  una paral·lela a  $R$  tindrem la línia d'acció de la resultant.

21. *Sistema de forces en un pla que estan en equilibri.* — Si en un sistema de forces introduïm una força de la mateixa magnitud, direcció i punt d'aplicació, però de sentit contrari al de la resultant, el sistema quedarà en equilibri.

En aquest cas (fig. 22 (b)) l'origen  $a$  i l'extrem  $e$  del polígon de forces coincideixen formant una figura tancada i el primer radi vector  $Oa$  coincideix amb l'últim  $Oe$ .

En el polígon funicular  $ABCD$  veurem que la paral·lela  $AD$  traçada pel punt  $A$  al radi vector  $Oa$  coincideix amb el costat  $DA$  traçat per  $D$  paral·lelament a l'últim radi vector  $Oe$ . Així resulta que el polígon funicular també és tancat. La línia  $AD$  de coincidència dels dos costats extrems del polígon funicular, s'anomena *línia de tancament*.

Sigui (fig. 22 (a)) un sistema de quatre forces  $F_1, F_2, F_3, F_4$  el polígon de forces  $abcde$  de les quals és tancat. Llavors un cop traçats els vectors

$ab$ ,  $bc$ ,  $cd$  i  $de$  representatius de les forces, l'extrem  $e$  coincidirà amb l'origen  $a$ . Prenem un pol  $O$  i tracem els radis polars  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$  i  $Od$ , el radi  $Oe$  coincidirà amb l' $Oa$ . Per un punt qualsevol  $A$  de  $F_1$  tracem  $AD$  i  $AB$  paral·leles respectivament a  $Oa$  i  $Ob$ . Per  $B$ , punt d'intersecció de  $AB$  amb  $F_2$ , tracem  $BC$  paral·lela a  $Oc$  fins a trobar  $F_3$  en  $C$ . Per  $C$ , tracem  $CD$  paral·lela a  $Od$ . Per fi tracem per  $D$ ,  $DA$  paral·lela a  $Oe$ . Com que  $Oa$  coincideix amb  $Oe$  és evident que  $DA$  i  $AD$  han de coincidir o han d'ésser paral·leles.

En la fig. 22 coincideixen; això indica que les forces donades estan en

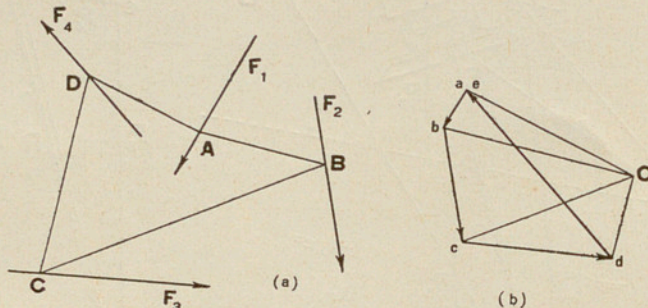


FIG. 22

equilibri. En efecte, com que els costats del polígon funicular són les línies d'acció de les forces components representades en magnitud i direcció pels radis polars del diagrama de les forces i cada radi polar representa dues forces iguals i de sentit oposat, totes aquestes components s'anul·len de dues en dues.

En la fig. 22 (b) les components  $Ob$  i  $bO$ ,  $Oc$  i  $cO$ ,  $Od$  i  $dO$  s'equilibren mútuament. Com que les components que queden  $Oa$  i  $Oe$ , a més d'ésser iguals en magnitud i de sentit oposat, tenen la mateixa línia d'acció,  $AD$  i  $DA$  s'equilibren mútuament també. Per tant, el sistema està en equilibri.

En el cas de tenir el sistema una resultant (fig. 20) en són exceptuades les dues components extremes  $Oa$  i  $Oe$ ; i com sabem, el sistema queda reduït a dues forces, les línies d'acció de les quals són respectivament  $MA$  i  $DE$ , i la resultant d'aquestes dues forces és la resultant de les forces donades.

22. Cas en què un sistema de forces forma un parell de forces. — En la fig. 23 representem cinc forces  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$ ,  $F_5$ , el polígon de forces de les quals  $abcdef$  tanca, l'extrem del vector  $ef$  coincideix amb l'origen del vector  $ab$ . Com abans, completarem el diagrama de forces traçant els radis polars des d'un pol  $O$  i el polígon funicular corresponent  $MA BC DEN$ , o com abans les forces donades poden ésser reemplaçades per dues forces

representades pels vectors  $Oa$  i  $Of = Oa$ . Amb tot, en aquest cas, encara que aquestes dues components siguin iguals i de sentit oposat, no tenen la mateixa línia d'acció, sinó que actuen segons dues línies paral·leles  $MA$  i  $NE$ , és a dir el polígon funicular no es tanca.

Llavors el sistema de forces equival a un parell de forces, el moment del qual s'obté multiplicant la força

auxiliar representada pel radi polar  $Oa$  per la perpendicular  $MN$  compresa entre els dos costats del polígon funicular paral·lels a aquell vector.

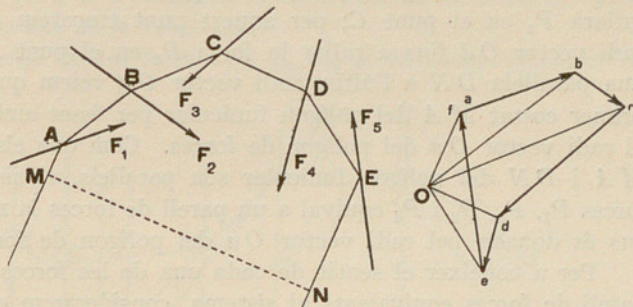


FIG. 23

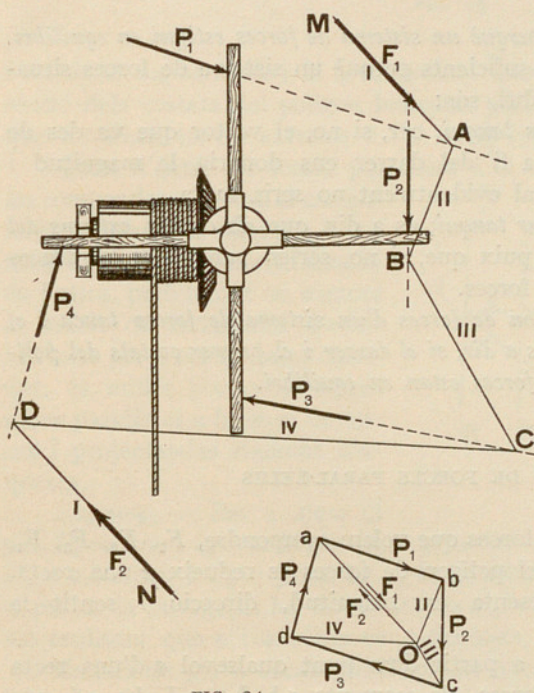


FIG. 24

*Exemple.* — Sobre els braços del torn representat a la fig. 24 actuen les forces  $P_1, P_2, P_3$  i  $P_4$ . Cercar la resultant del sistema.

Tracem a part el polígon de forces, portant, a partir del punt  $a$ , una força igual i paral·lela a  $P_1$ ; pel seu extrem  $b$  traçarem  $bc$  paral·lelament i de la mateixa magnitud que  $P_2$ ; des de  $c$  tracem  $cd$  igual i paral·lela a  $P_3$  i per fi des de  $d$  portem un segment  $da$  paral·lel i de la mateixa magnitud que  $P_4$ . Veurem que el seu extrem coincideix amb l'origen  $a$  del polígon de forces i com que aquest resulta tancat, la resultant és nul·la.

Això ens indica que el sistema o està en equilibri o bé equival a un parell de forces. Per distingir a quin cas pertany, traçarem el polígon fu-

nicular. A partir d'un punt  $A$  de la força  $P_1$  traçarem  $AM$  paral·lel a  $Oa$  i  $AB$  paral·lel a  $Ob$ , recta que perllongarem fins a tallar la força  $P_2$  en el punt  $B$ . Des de  $B$  traçarem  $BC$  paral·lel al radi vector  $Oc$ , línia que tallarà  $P_3$  en el punt  $C$ ; per aquest punt traçarem  $CD$  paral·lelament al radi vector  $Od$  fins a tallar la força  $P_4$  en el punt  $D$ . En traçar per  $D$  una paral·lela  $DN$  a l'últim radi vector  $Oa$  veiem que resulta paral·lela al primer costat  $MA$  del polígon funicular per ésser ambdós costats paral·lels al radi vector  $Oa$  del polígon de forces. Com que els dos costats extrems  $MA$  i  $DN$  del polígon funicular són paral·lels, el sistema format per les forces  $P_1, P_2, P_3$  i  $P_4$  equival a un parell de forces la magnitud de les quals ens és donada pel radi vector  $Oa$  del polígon de forces.

Per a conèixer el sentit de cada una de les forces que constitueixen el parell de forces equivalents al sistema, considerarem el polígon format per les forces  $Oa, ab, bc, cd, da$  i  $Oa$  en el qual  $Oa$  i  $aO$  representen direcció, sentit i magnitud les forces del parell. Com que el sentit cíclic de cada una d'elles ha d'ésser contrari al de les components, la força  $F_1$  tindrà el sentit  $aO$  i la força  $F_2$  el sentit  $Oa$ .

23. *Condicions gràfiques perquè un sistema de forces estigui en equilibri.* — Les condicions necessàries i suficients perquè un sistema de forces situades en un pla estigui en equilibri, són:

a) *Que el polígon de forces tanqui*, car, si no, el vector que va des de l'origen del primer vector a la fi del darrer ens donaria la magnitud i direcció de la resultant, la qual evidentment no seria nulla.

b) *Que el polígon funicular tanqui*; és a dir, que els costats extrems del polígon funicular coincideixin, puix que, si no, serien paral·lels i les forces dades formarien un parell de forces.

Recíprocament, *si el polígon de forces d'un sistema de forces tanca i el polígon funicular tanca també, és a dir, si el darrer i el primer costats del polígon funicular coincideixen, les forces estan en equilibri.*

#### COMPOSICIÓ DE FORCES PARAL·LELES

24. En el cas en què les forces que volem compondre,  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$ , (fig. 25), siguin paral·leles, el polígon de forces es redueix a una recta, la línia de forces, que representa en magnitud, direcció i sentit la resultant.

Per construir-lo prendrem, a partir d'un punt qualsevol  $a$  d'una recta paral·lela a la direcció de les forces, els segments  $ab, bc, cd, de, ef$ , que representen respectivament les forces  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$ . La recta que uneix l'origen  $a$  amb el final  $f$  representa en magnitud, direcció i sentit, la resultant del sistema.

Per determinar-la en posició, prendrem un pol arbitrari  $O$  i traçarem els radis polars  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$ ,  $Od$ ,  $Of$ , i el polígon funicular corresponent  $MABCDEN$ . El punt  $L$  d'intersecció dels costats extrems  $MA$  i  $NE$  ens determinarà la posició de la resultant  $R$ .

La resultant parcial de les forces  $F_2, F_3, F_4$  és en magnitud, direcció

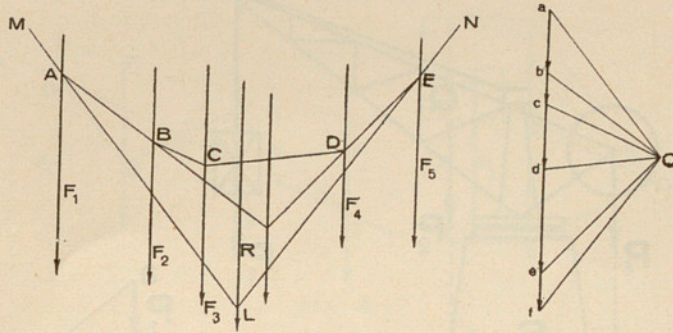


FIG. 25

i sentit el segment  $be$  i la seva posició quedarà determinada per la intersecció dels costats del polígon funicular paral·lels als radis polars  $Ob$  i  $Oe$  que terminen en els extrems  $b$  i  $e$  de la resultant parcial.

Quan d'entre les forces paral·leles n'hi ha de sentit contrari (fig. 26), les compondrem com en el cas anterior portant-les damunt d'una mateixa recta una a continuació de l'altra, però tenint en compte el sentit de cadascuna d'elles. Llavors, però, per a major claredat, és millor portar les forces sobre paral·leles a la línia de forces i projectar-les damunt d'aquesta.

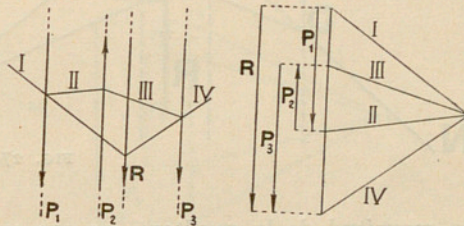


FIG. 26

*Exemple.* — Per a alçar el pes  $P_1 = 2,000$  kg, utilitzem una grua de torre el braç de la qual pesa  $P_2 = 2,000$  kg, i  $P_3 = 3,000$  kg la torre sola; a més per a contrabalancejar el pes de la càrrega hi ha un contrapès  $P_4 = 3,000$  kg; volem cercar la pressió resultant que actua sobre els fonaments.

Escollirem per a escala de forces la relació  $1 \text{ mm} = 200 \text{ kg}$ ; amb això la força  $P_1$  vindrà representada per un segment de  $2,000 : 200 = 10 \text{ mm}$  de longitud;  $P_2$  ho serà per un de  $2,000 : 200 = 10 \text{ mm}$ ,  $P_3$  ho serà per un altre de  $3,000 : 200 = 15 \text{ mm}$  i  $P_4$  vindrà representada per un segment de  $3,000 : 200 = 15 \text{ mm}$ .

A partir d'un punt qualsevol  $a$  i sobre una recta paral·lela a la direcció comuna de les forces portem  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  i  $P_4$  una a continuació de l'altra i quedarà així format el polígon de forces  $abcde$ ; el segment que va des de l'extrem de l'última  $P_4$  fins a l'origen de la primera força  $P_1$  ens dona

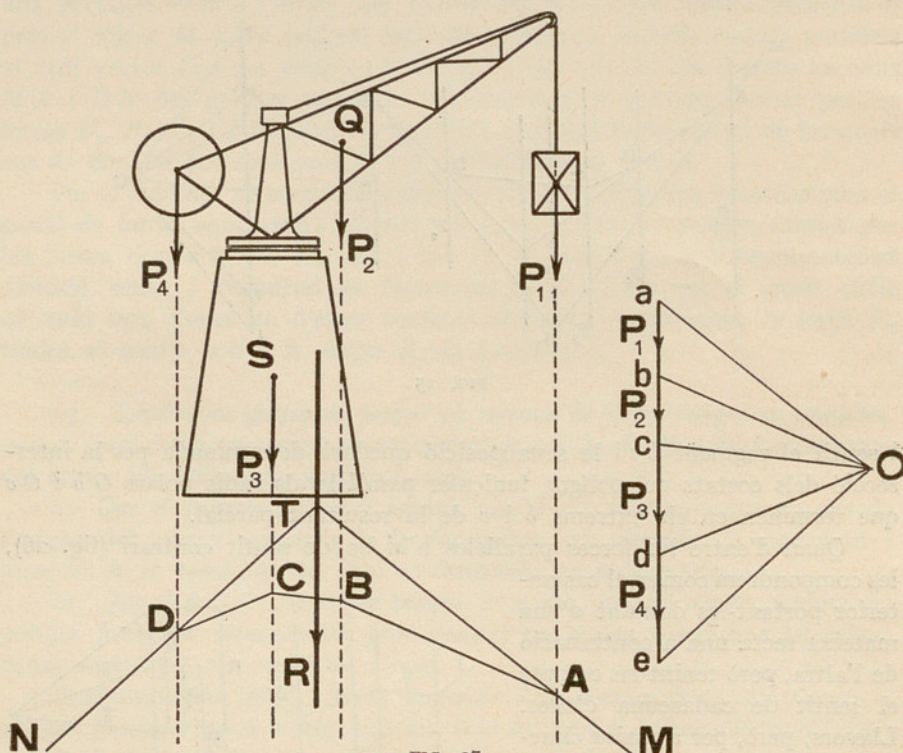


FIG. 27

la magnitud de la resultant  $ae$  que en el dibuix mesura 50 mm; la seva magnitud resulta ésser  $50 \times 200 = 10,000$  kg. El seu sentit és  $ae$ .

Per determinar la línia d'acció de la resultant, unirem un punt qualsevol  $O$  amb els vèrtexs  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  i  $e$  del polígon de forces mitjançant els radis vectors  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$ ,  $Od$  i  $Oe$ . Per un punt  $A$  de  $P_1$  traçarem  $AM$  paral·lela a  $Oa$  i  $AB$  paral·lela a  $Ob$ , recta que perllongarem fins a tallar la força  $P_2$  en el punt  $B$ , des d'on traçarem  $BC$  paral·lela a  $Oc$  fins a tallar  $P_3$  en el punt  $C$ , per on traçarem  $CD$  paral·lela a  $Od$ . Per fi traçarem pel punt  $D$  una paral·lela  $DN$  a  $Oe$  i la perllongarem fins a tallar  $AM$  en el punt  $T$  de la línia d'acció de la resultant. Traçant per aquest punt  $T$  una paral·lela a la direcció de la resultant  $ae$  tindrem en posició i magnitud la resultant del sistema.

25. *Distància polar.* — Designant, com sabem, per distància d'un punt a una recta el tros de perpendicular traçada pel punt a la recta, en un polígon de forces la *distància polar* d'una força serà el tros de perpendicular a la força compresa entre el pol i la força.

Quan les direccions de les forces són diverses, les distàncies polars

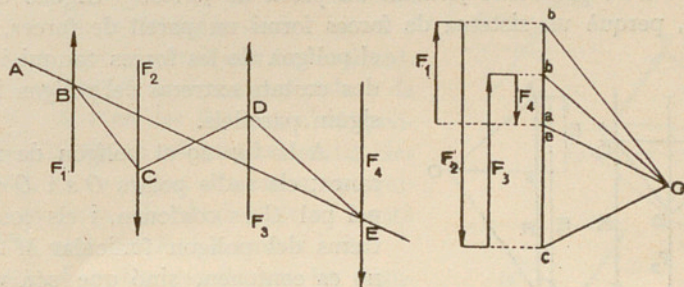


FIG. 28

seran, per regla general, diferents i distintes de la distància polar de la resultant.

En el cas de forces paral·leles, la distància polar de les components és igual a la de la resultant.

Més endavant veurem la importància que té aquesta distància polar en el cas de forces paral·leles.

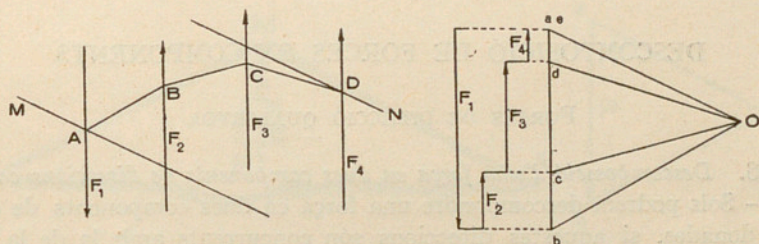


FIG. 29

26. *Forces paral·leles en equilibri.* — Segons sabem (n.º 23) les dues condicions perquè un sistema de forces estigui en equilibri són que llur polígon de forces es tanqui, és a dir, que la fi del polígon de forces es confongui amb el començament, i que els costats extrems del polígon funicular coincideixin en una sola i mateixa recta.

A la fig. 28 el sistema de forces paral·leles  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , estan en equilibri. El polígon de forces paral·leles esdevé una recta. Portem a partir d'un punt qualsevol  $a$ , pres com origen del polígon, les forces donades una després de l'altra en magnitud i sentit. Per la construcció tornem a l'origen

i l'extrem  $e$  coincideix amb l'origen  $a$ , és a dir, el polígon es tanca. Prenem un punt  $O$  qualsevol per pol i tracem els radis polars  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$ ,  $Od$  i  $Oe$  coincidint amb  $Oa$ , i el polígon funicular corresponent  $ABCDE$ . Els dos costats extrems  $AE$  i  $EA$  del polígon funicular es confonen en una sola recta  $AE$ , segona condició perquè el sistema de forces donat estigui en equilibri.

27. *Forces paral·leles formant un parell de forces.* — Segons dèiem en el n.º 23, perquè un sistema de forces formi un parell de forces, cal que el polígon de les forces tanqui i que els dos costats extrems del polígon funicular siguin paral·lels.

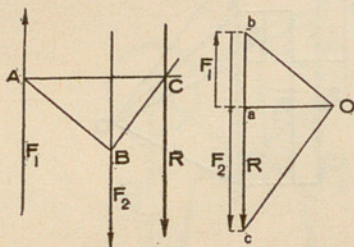


FIG. 30

A la fig. 29 el polígon de forces es tanca; els radis polars  $Oa$  i  $Oe$  traçats pel pol  $O$  es confonen, i els costats extrems del polígon funicular  $MA$  i  $DN$  no es confonen, sinó que són paral·lels.

La resultant de les forces paral·leles  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  i  $F_4$  en aquest cas forma un parell de forces.

Quan les forces sols són dues, desiguals i de sentit contrari, la resultant es troba sempre fora de les components com es veu a la fig. 30.

Si les dues forces són iguals i de sentit contrari, la seva resultant estarà a l'infinit i la seva valor serà zero; aquestes forces constituïran també un *parell de forces*.

## DESCOMPOSICIÓ DE FORCES EN COMPONENTS

### FORCES DE DIRECCIÓ QUALSEVOL

28. *Descomposició d'una força en dues components de direccions conegudes.* — Sols podrem descompondre una força en dues components de direccions donades, si aquestes direccions són concurrents amb la de la força considerada o li són paral·leles; si aquestes condicions no es complien, el problema seria impossible.

Sigui (fig. 31 (a)) la força  $R$  donada en magnitud, direcció i en sentit i posició; volem determinar la magnitud de les seves components segons les direccions 1 i 2.

Per això (fig. 31 (b)) portem en  $ab$  la força  $R$  en magnitud, direcció i sentit i pels punts  $a$  i  $b$  tracem les paral·leles a les direccions 1 i 2. Aquestes paral·leles es tallen en un punt  $c$ ;  $cb$  ens dóna la magnitud de la component 2 i  $ac$  la magnitud de la component 1; això es veu immediatament en el triangle de les forces. Les components han d'ésser de sentit oposat al de la resultant  $R$ , cosa que indicarem amb fletxes.

Arribarem al mateix resultat traçant (fig. 31 (c)) per  $b'$  una paralela a 1 i per  $a'$  una paralela a 2. Aquestes paraleles es troben en un punt  $c'$  situat a l'altre costat de  $R$ , i tindrem  $a'c' = 2$  i  $c'b' = 1$ .

Si volguéssim determinar les dues forces que, actuant segons les direccions 1 i 2, s'equilibraran amb la força donada  $R$ , emprarem el mateix mètode, però les fletxes indicadores de les forces 1 i 2 tindran el mateix sentit que la resultant. Aquesta construcció es troba indicada a la fig. 31 (d) on totes les fletxes en el polígon de forces tenen el mateix sentit; les components  $bc = 1$  i  $ca = 2$  estan en equilibri amb la força  $R$ . Així mateix, 1 està en equilibri amb 2 i  $R$ , i 2 amb 1 i  $R$ .

*Exemple I.* — Un pes de 500 kg (figura 32) està sostingut per dos tornapunts  $MA$  i  $MB$  de la mateixa longitud que formen angles de  $28^\circ$  amb l'horitzontal.

Determinar gràficament la valor de les forces que actuen en direcció dels tornapunts.

Prendrem una escala de forces d'1 cm = 200 kg; per tant representarem la força  $P$  per una longitud de  $500 : 200 = 2,5$  cm. Traçarem una recta  $ab$  paralela a la direcció de la força  $P$ ; sobre d'ella limitarem un

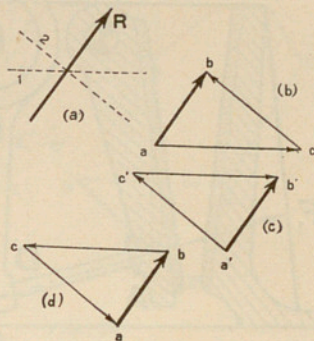


FIG. 31

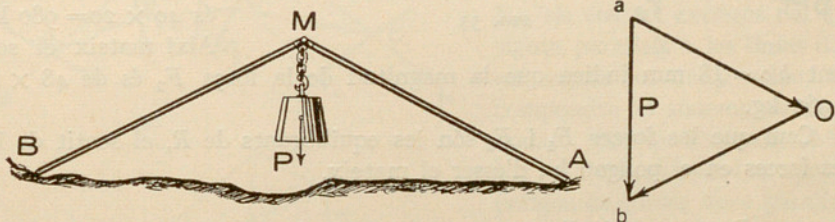


FIG. 32

segment de 2,5 cm i pels seus extrems traçarem les rectes  $Oa$  i  $Ob$  paraleles a  $MA$  i  $MB$  respectivament.

Si amb un doble decímetre amidem les magnituds  $Oa$  i  $Ob$  trobarem que la llargada de cada una d'elles és de 2,75 cm longituds que, segons l'escala de forces que hem pres, representen  $2,75 \times 200 = 550$  kg, valor de les forces que actuen sobre els tornapunts  $OA$  i  $OB$  amb direcció  $MA$  i  $MB$ .

*Exemple II.* — Una trituradora de mandíbula és accionada per un excèntric i un joc de barres tal com indica la fig. 33. La força que exerceix

la barra de l'excèntric és  $R = 500$  kg; volem conèixer les forces equilibrants que actuen sobre les barres  $AD$  i  $CB$ .

Per un punt qualsevol  $a$  traçarem una recta paral·lela a la direcció de

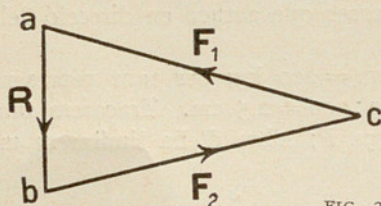
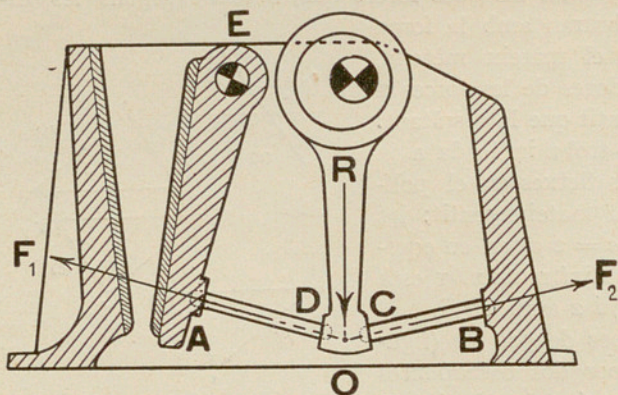


FIG. 33

la força  $R$  i sobre d'ella portarem un segment de 25 mm de llargada, cosa que equival a prendre una escala de forces de  $200 \text{ kg} = 25 \text{ mm}$  o sia  $20 \text{ kg} = 1 \text{ mm}$ . Pels extrems  $a$  i  $b$  d'aquest segment traçarem  $ac$  i  $bc$  paral·leles respectivament a les rectes  $OA$  i  $OB$ , línies d'acció de les forces que volem conèixer. Aquestes rectes  $ac$  i  $bc$  es tallen en el punt  $c$ . La magnitud  $ac = 49 \text{ mm}$  ens dóna la valor de la força  $F_1$ , que és  $49 \times 20 = 980 \text{ kg}$ .

Així mateix el seg-

ment  $bc = 48 \text{ mm}$  indica que la magnitud de la força  $F_2$  és de  $48 \times 20 = 960 \text{ kg}$ .

Com que les forces  $F_1$  i  $F_2$  són les equilibrants de  $R$ , el sentit de les tres forces en el polígon ha d'ésser el mateix.

29. *Descomposició d'una força en més de dues components.* — Quan es tracta de descompondre una força que actua damunt d'un punt en més de dues components que passin pel mateix punt, les direccions de les quals són conegudes, el problema admet infinites solucions, i és, per tant, indeterminat.

En canvi, el podem resoldre si coneixem les línies d'acció, les magnituds i sentit de totes les components, exceptuant-ne dues de les quals sols coneixem les línies d'acció. Llavors podem determinar les magnituds i el sentit d'aquestes dues.

Suposem sis forces (fig. 34 (a))  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ , de les quals les quatre primeres són completament conegudes, mentre que sols coneixem les línies d'acció  $AA'$  i  $EE'$  de les altres dues. Tracem a partir d'un

punt qualsevol  $a$  (fig. 34 (b)) el polígon de forces  $abcde$  de les forces dades. Tracem per  $e$  una línia indefinida  $e'e''$  paral·lela a  $EE'$  de la fig. 34 (a) i per  $a$  una altra  $aa_1$ , paral·lela a  $AA'$  de la fig. 34 (a), fins que talli en  $f$  la  $e'e''$ . Llavors  $ef$  i  $fa$  seran les dues forces demanades; les fletxes es marcaran de manera que el polígon es pugui seguir en un sol sentit, condició perquè les forces estiguin en equilibri.

30. *Descomposició d'un sistema de forces en dues de direcció donada.* — Podríem resoldre aquest problema component les forces i descomponent la resultant segons les dues direccions proposades, traçant un triangle de forces.

Però no cal trobar la resultant, si recordem que els costats extrems del polígon funicular són les components de la resultant d'un sistema de forces.

Llavors el problema es redueix a traçar el polígon funicular, els costats extrems del qual siguin paral·lels a les línies d'acció segons les quals volem descompondre el sistema de forces donat. Per això només cal traçar per l'origen i per l'extrem del polígon de forces dues paral·leles a les direccions donades, rectes que seran dos radis polars del diagrama de forces. Amb això coneixem el pol, cosa que ens permetrà de traçar tots els altres costats del polígon funicular.

En efecte, siguin  $F_1, F_2, F_3, F_4$  (fig. 35 (a)) les forces donades, les quals volem descompondre en dues que tenen per línies d'acció respectives  $MP$  i  $NP$ . Tracem el polígon de les forces  $abcde$  (fig. 35 (b)). Per l'origen  $a$  tracem una recta  $Oa$  paral·lela a  $MP$  i per l'extrem  $e$  una recta  $Oe$  paral·lela a  $PD$ . El punt d'intersecció  $O$  és el pol del polígon funicular

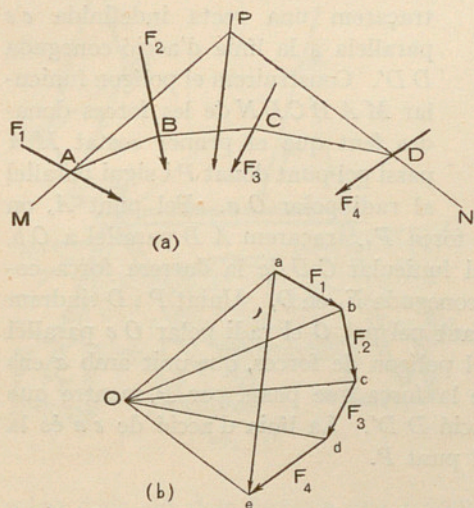


FIG. 35

4

$MABCDN$ . Per traçar-lo farem passar pel punt  $A$ , intersecció de  $MP$  amb la línia d'acció de  $F_1$ , una recta  $AB$ , paral·lela al radi polar  $Ob$ ; per  $B$ , una paral·lela  $BC$  al radi  $Oc$ ; per  $C$ , una paral·lela  $CD$  al radi  $Od$ . Aquest costat  $CD$  del polígon funicular ha de passar, si el traçat és correcte, pel punt  $D$  d'intersecció de les línies d'acció de  $F_4$  i de la component  $DN$ .

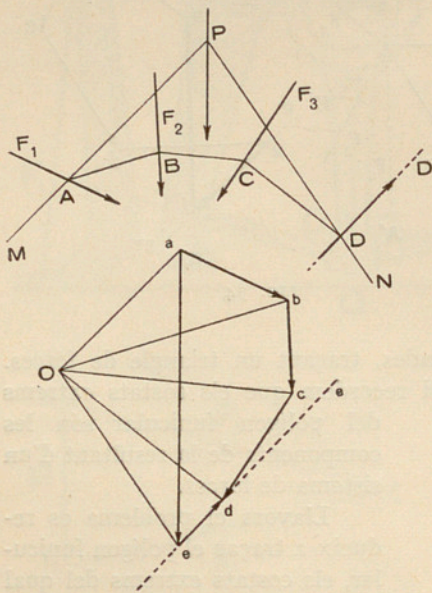


FIG. 36

talla la línia d'acció de la primera força  $F_1$ , traçarem  $AB$  paral·lela a  $Ob$ , i així seguint. El darrer costat del funicular  $CD$  de la darrera força coneguda talla la línia d'acció de la desconeguda  $F_4$  en  $D$ . Unint  $P$  i  $D$  tindrem el costat que ens manca  $DP$ . Traçant pel pol  $O$  el radi polar  $Oe$  paral·lel a  $DP$  ens determina el vèrtex  $e$  del polígon de forces, que unit amb  $a$  ens dóna el vector  $ea$  representatiu de la força que passa per  $P$ , mentre que  $de$  és la força que té per línia d'acció  $DD'$ . La línia d'acció de  $ea$  és la recta  $P$ , paral·lela a  $ea$  traçada pel punt  $P$ .

32. *Descomposició d'una força en altres tres no concurrents, de direcció coneguda.* — Sigui (fig. 37 (a))  $R$  la força que volem descompondre en les altres tres no concurrents  $F_1$ ,  $F_2$  i  $F_3$ , les línies d'acció de les quals coneixem. Per a resoldre aquest problema emprarem el mètode de *Culmann*. Per això unirem el punt  $M$  d'intersecció de dues línies d'acció donades, per exemple les  $AB$  i  $CD$ , amb el punt  $N$  d'intersecció de les línies d'acció de  $E$  i  $G$  i  $R$ . La recta  $MN$  d'unió d'aquests dos punts pot ésser considerada

Les dues components cercades resulten donades en magnitud i sentit pels radis polars  $aO$  i  $Oe$ .

Com veiem, no ha calgut, per a resoldre el problema, trobar la resultant.

31. En cas (fig. 36) que les dues forces components siguin determinades per la línia d'acció  $DD'$  d'una d'elles i pel punt  $P$  per on ha de passar la línia d'acció a l'altra, traçarem el polígon  $abcd$  de les forces conegudes  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ . Prenent com a pol un punt arbitràriament escollit  $O$ , traçarem els radis polars  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$ ,  $Od$ . Pel punt  $d$  traçarem una recta indefinida  $ee$  paral·lela a la línia d'acció coneguda  $DD'$ . Construïrem el polígon funicular  $MABCDN$  de les forces donades fent que el primer costat  $MA$  passi pel punt donat  $P$  i sigui paral·lel al radi polar  $Oa$ . Pel punt  $A$ , on

com a línia d'acció d'una força component  $F'$  i amb ajut d'un triangle de forces  $adb$  (fig. 37 (b)) descompondre la  $R$  en les dues components  $F'$  i  $F_3$ , totes tres concurrents en  $N$ . Per fi la força  $F'$  que passa per  $M$  es descompon, mitjançant el triangle  $bcd$ , en altres  $F_1$  i  $F_2$ , concurrents amb  $F'$  en  $M$ .

Si les forces  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  i  $R$  s'equilibren, el polígon de forces  $abcd$  es tanca i la força  $R$  apareixerà com a equilibrant de les altres tres.

Aquest traçat és impossible o indeterminat en dos casos.

El primer es presenta quan les tres forces són concurrents en un mateix punt; en aquest cas llur resultant haurà de passar-hi també. El segon, quan dues de les forces dades es tallen damunt la resultant;

llavors aquesta es descompon en dues forces úniques, la tercera esdevé nul·la.

Moltes vegades ens caldrà equilibrar un grup de forces per tres d'altres dirigides d'una manera qualsevol. Ens seria factible de trobar la resultant del grup i de descompondre-la com havem dit.

*Exemple.*— Al damunt d'un terreny poc consistent s'ha construït un embarcador de la forma que representa la fig. 38. La direcció de la resultant dels esforços que sobre d'ell actuen és  $P$  i la seva valor és de 2,000 kg. ¿Quina és la força que actua

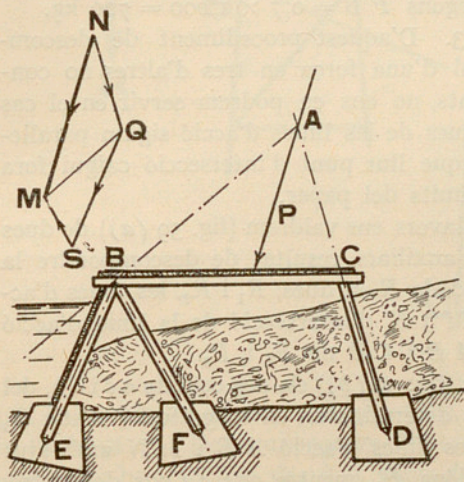


FIG. 38

sobre cada un dels puntals que sostenen el tauler?

Perllonguem la direcció de l'eix del puntal  $CD$  fins a tallar la força  $P$  en el punt  $A$  i unim aquest punt amb el  $B$  d'intersecció dels eixos dels puntals  $EB$  i  $FB$ , i obtindrem la direcció  $AB$ .

Prentem una escala de forces d'1 cm = 1,000 kg, la força  $P$  vindrà representada per una longitud 2,000 : 1,000 = 2 cm. Per l'extrem  $M$  de la força  $P$  traçarem una paral·lela  $AB$  i per l'origen  $N$  traçarem una

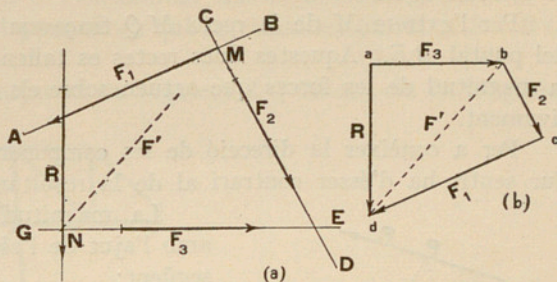


FIG. 37

paralela a  $AC$ . Les dues rectes dibuixades es tallen en el punt  $Q$ . El segment  $NQ$  representa la magnitud de la força que actua sobre el puntal  $CD$  i el segment  $MQ$  representa la magnitud de la força que actua segons la direcció  $AB$ .

Per l'extrem  $M$  de la recta  $MQ$  traçarem una paralela a la direcció del puntal  $BE$ . Aquestes dues rectes es tallen en el punt  $S$  i representen la magnitud de les forces que actuen sobre els puntals  $BF$  i  $BE$  respectivament.

Per a conèixer la direcció de les components tindrem en compte que llur sentit ha d'ésser contrari al de la resultant.

La magnitud de les forces la deduirem amb l'ajut de l'escala de forces en la forma següent:

Longitud  $NQ = 1,3$  cm; força que actua segons  $CD = 1,3 \times 1,000 = 1,300$  kg.

Longitud  $QS = 1,6$  cm; força que actua segons  $BE = 1,6 \times 1,000 = 1,600$  kg.

Longitud  $SM = 0,7$  cm; força que actua segons  $FB = 0,7 \times 1,000 = 700$  kg.

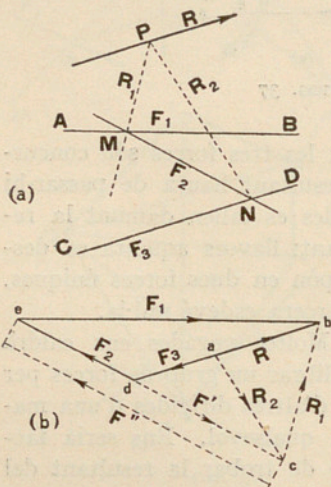


FIG. 39

33. D'aquest procediment de descomposició d'una força en tres d'altres no concurrents, no ens en podem servir en el cas que dues de les línies d'acció siguin paral·leles o que llur punt d'intersecció caigui fora dels límits del paper.

Llavors ens valdrem (fig. 39 (a)) de dues forces auxiliars resultat de descompondre la força dada  $R$  en dues,  $R_1$  i  $R_2$ , les línies d'acció de les quals passin pels punts  $M$  i  $N$  d'intersecció de la línia d'acció  $MN$  de  $F_2$  amb les línies d'acció  $AB$  i  $CD$  de  $F_1$  i  $F_3$ .

Tracem el triangle de forces  $abc$  (fig. 39 (b)) els dos costats  $ac$  i  $cb$ , del qual són paral·lels a  $PN$  i  $PM$ ; ens determinaran en magnitud i sentit  $R_1$  i  $R_2$ . Descomponguem  $R_1$  segons les línies d'acció  $AB$  i  $MN$  amb ajut del triangle  $bce$ ; el costat  $eb$  ens dóna  $F_1$ , mentre que  $ce$  ens determina la component de  $F''$ , que actua segons  $MN$ ; en descompondre  $R_2$  segons les línies d'acció  $MN$  i  $CD$  amb ajut del triangle  $acd$ , el costat  $ad$ , paral·lel a  $CD$ , ens determina  $F_3$ , mentre que  $dc$ , paral·lel a  $MN$ , ens dóna la component  $F'$  que actua segons la línia d'acció  $MN$ .

La resultant de les dues forces  $F'$  i  $F''$ , que actuen segons la línia d'acció  $MN$ , ens determina la intensitat de la tercera força  $F_2$  que ens mancava.

La descomposició de forces és molt emprada en el càlcul de sistemes reticulats.

*Exemple.* — Una torre de conducció elèctrica (fig. 40) està sotmesa a

una força  $R = 500$  kg. Cercar la valor de les forces que actuen sobre cada una de les barres  $AB$ ,  $BC$  i  $CD$ .

Unirem un punt  $M$  qualsevol de la força  $R$  amb el punt  $C$  en què es tallen les direccions  $BC$  i  $DC$  i obtindrem així la direcció  $MC$ .

Unint el punt  $M$  amb el punt  $B$  en què es tallen les barres  $AB$  i  $BC$  obtindrem la direcció  $MB$ .

En una figura a part traçarem un segment  $LQ$  de 2,5 cm de longitud

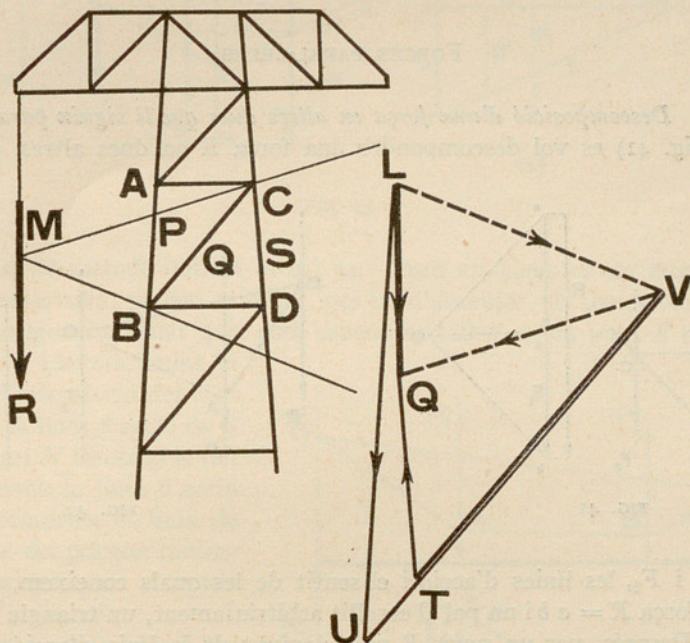


FIG. 40

que, a l'escala de forces  $1 \text{ cm} = 200$  kg, ens representarà la valor de 500 kg de la força  $P$ . Descomponguem  $P$  segons les direccions  $MC$  i  $MB$ . Per aconseguir-ho traçarem des dels punts  $L$  i  $Q$  paral·leles a aquestes direccions, les quals es tallen en el punt  $V$ ; el sentit de les components és contrari al de les resultants.

Descomponguem la força  $LV$ , que actua segons la línia  $MB$ , en dues components  $LU$  i  $UV$  que actuen segons les barres  $BA$  i  $BC$  respectivament. El seu sentit serà contrari al de la resultant parcial  $LV$ .

D'altra banda, descomponguem la força  $QV$ , que actua segons la direcció  $MC$ , en les dues components  $QT$  i  $TU$ , que són les forces que obren sobre les barres  $BC$  i  $CD$ . Els sentits seran contraris al de la resultant parcial  $QV$ .

Examinem les quatre forces  $LU$ ,  $UV$ ,  $VT$  i  $TQ$  obtingudes de la descomposició de la força  $R$ . Les forces  $UV$  i  $VT$  tenen la mateixa línia d'acció i el sentit contrari; per tant la seva resultant és  $UT$  i en total hem descompost la força  $R$  en tres, que són:

$LU = 6$  cm que equival a  $6 \times 200 = 1,200$  kg que actua segons  $AB$ .

$UT = 1$  cm que equival a  $1 \times 200 = 200$  kg que actua segons  $BC$ .

$TQ = 2,8$  cm que equival a  $2,8 \times 200 = 560$  kg que actua segons  $CD$ .

### FORCES PARAL·LELES

34. *Descomposició d'una força en altres dues que li siguin paral·leles.* — Quan (fig. 41) es vol descompondre una força  $R$  en dues altres de paral·

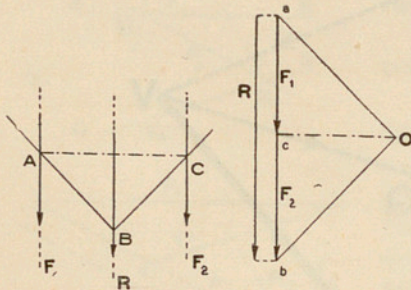


FIG. 41

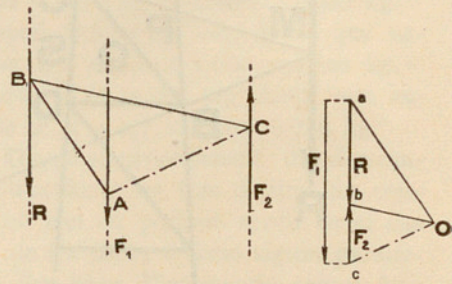


FIG. 42

leles  $F_1$  i  $F_2$ , les línies d'acció i el sentit de les quals coneixem, traçarem amb la força  $R = ab$  i un pol  $O$  escollit arbitràriament, un triangle de forces  $abO$ . Després, per un punt  $B$  pres damunt de la línia d'acció de  $R$ , es tracen paral·leles  $BA$  i  $BC$  als radis polars  $Oa$  i  $Ob$  fins a tallar, respectivament en  $A$  i  $C$ , les línies d'acció de les forces  $F_1$  i  $F_2$ . La recta que uneix els punts  $A$  i  $C$  forma la línia de tancament del polígon funicular, al qual ha d'ésser paral·lel el radi polar  $Oc$ . Aquest radi polar talla la força  $R = ab$  en un punt  $c$  tal que  $ac = F_1$  i  $cb = F_2$ .

La fig. 42 representa el cas que les línies d'acció de les components caiguin a un mateix costat de la resultant; llavors els sentits de les components són oposats.

35. *Reduir un sistema de forces paral·leles a dues de paral·leles a les donades.* — Suposem que volem descompondre (fig. 43 (a)) el sistema de forces donat  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , en dues de conegudes per les seves línies d'acció  $MP$  i  $NS$ , paral·leles a les forces donades.

Determinarem la resultant  $R$  (fig. 43 (b)) del sistema traçant el polígon

de forces  $abcd$  i el polígon funicular corresponent I, II, III, IV, prenent el punt  $O$  arbitràriament escollit, per pol.

Ara el problema es redueix a descompondre la resultant  $R$  en dues  $Q'$  i

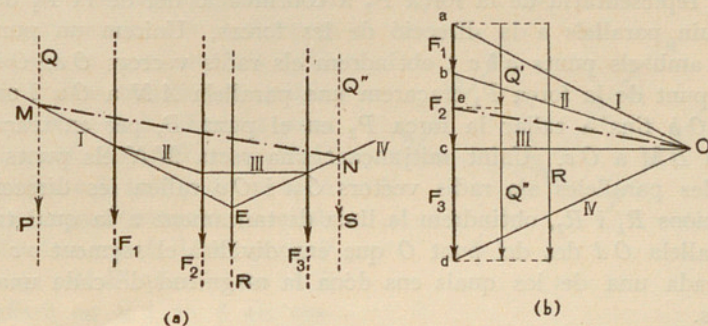


FIG. 43

$Q''$  emprant el mètode indicat al n.º 34. Però en comptes de traçar dues rectes qualssevilla, podem utilitzar, per tal d'abreujar, els costats extrems I i IV del polígon funicular que, com sabem, es tallen en un punt  $E$  de la resultant  $R$ . Llavors, unint el punt  $M$  d'intersecció del costat I amb la línia d'acció de  $Q$  amb el punt  $N$  intersecció del costat IV amb la línia d'acció de  $Q''$ , obtindrem la línia de tancament del polígon funicular corresponent als sistemes  $Q Q''$  i  $F_1, F_2, F_3$ .

Traçant per  $O$  un radi polar  $Oe$  paral·lel a  $MN$  determinarem les dues forces  $Q$  i  $Q''$  que cercàvem.

Com es pot veure no cal determinar la línia d'acció de la resultant.

Per saber del cert quina és la línia d'acció de cadascuna

de les components  $Q$  i  $Q''$ , ens fixarem que al punt  $M$  on concorren tres forces  $Q, I$  i  $MN$  correspon al diagrama de forces el triangle  $Oae$ , en el qual  $Oa, ae$  i  $eO$  són paral·leles i corresponen, per tant, a  $I, Q$  i  $MN$ , respectivament.

*Exemple.* — Trobar les reaccions que es desenrotllen en els descansos de la biga de la fig. 44, tenint en compte que la valor de les forces que actuen sobre la biga és de 180 i 130 kg, respectivament.

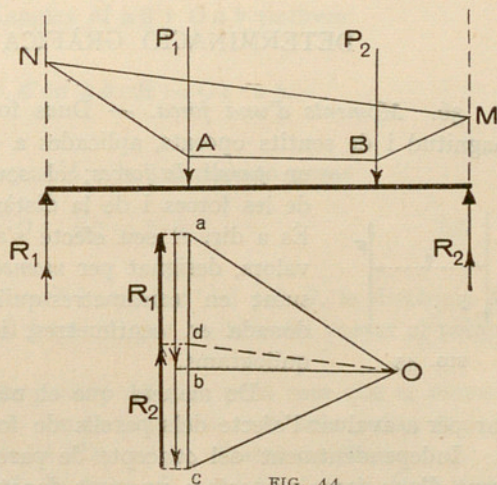


FIG. 44

Prendrem una escala de forces d'1 cm = 100 kg amb la qual cosa la força  $P_1$  vindrà representada per un segment de 180 : 100 = 1,8 cm de llargada i la  $P_2$  per una magnitud de 130 : 100 = 1,3 cm. Collocarem el segment representatiu de la força  $P_2$  a continuació del de la  $P_1$  de forma que siguin paral·lels a la direcció de les forces. Unirem un punt qual-sevol  $O$  amb els punts  $a b c$  i obtindrem els radis vectors  $O a$ ,  $O b$  i  $O c$ . Per un punt de la força  $P_1$  traçarem una paral·lela  $A N$  a  $O a$  i una altra  $A B$  a  $O b$  fins a tallar la força  $P_2$  en el punt  $B$ , per on traçarem la paral·lela  $B M$  a  $O c$ . Unint mitjançant una recta  $M N$  els punts  $M$  i  $N$  en què les paral·leles als radis vectors  $O a$  i  $O c$  tallen les direccions de les reaccions  $R_1$  i  $R_2$ , obtindrem la línia de tancament a la qual traçarem una paral·lela  $O d$  des del punt  $O$  que ens dividirà el segment  $o c$  en dues parts, cada una de les quals ens dóna la magnitud de cada una de les reaccions.

El mesurament d'aquests segments ens diu que  $R_1$ , representada per una longitud d'1,5 cm, té una valor de 150 kg, i  $R_2$ , que és donada per la magnitud d'1,6 cm, val 160 kg. El seu sentit ha d'ésser contrari al de les forces  $P_1$  i  $P_2$ .

### DETERMINACIÓ GRÀFICA DE MOMENTS

36. *Moments d'una força.* — Dues forces paral·leles (fig. 45) d'igual magnitud i de sentits oposats, aplicades a distints punts d'un cos, formen un *parell de forces*; el seu efecte depèn de la magnitud de les forces i de la distància de les seves línies d'acció. És a dir, el seu efecte s'avalua pel producte d'ambdues valors, designat per *moment estàtic*;  $M = F \cdot d$  que és mesurat en centímetres-quilograms, si la distància  $d$  és donada en centímetres, i la intensitat de la força en quilograms.

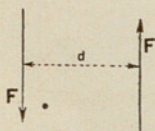


FIG. 45

De manera que el moment estàtic és el mitjà auxiliar per a avaluar l'efecte dels parells de forces.

Independentment del concepte de parell de forces, sabem que el moment d'una força respecte a un punt donat és el producte d'aquesta força per la seva distància al punt considerat, és a dir, per la perpendicular abaixada del punt a la direcció de la força. La distància entre el punt i la força és designat per *braç de palanca*.

Els moments poden ésser positius o negatius, segons que les forces facin girar el braç de palanca en el mateix sentit que les busques del rellotge o en l'oposat.

37. L'avaluació d'un moment és cosa fàcil en estàtica gràfica. Representem en  $AB = F$  la direcció i la magnitud d'una força qualsevol (fig. 46), el moment de la qual respecte al punt  $P$  volem cercar. Tracem el vector  $ab = F$ , prenem un pol  $O$  i menem els radis  $Oa$  i  $Ob$ , així com la perpendicular  $Oc = h$  a  $ab$ . Per un punt qualsevol  $M$  de  $AB$  tracem els dos costats  $\alpha M$  i  $M\beta$  del polígon funicular, respectivament paral·lels als radis  $Oa$  i  $Ob$ , i pel punt  $P$  una recta  $A'B'$  paral·lela a  $AB$  que tallarà en  $\alpha$  i en  $\beta$  els costats  $\alpha M$  i  $M\beta$ , respectivament. Abaixem des de  $M$  la perpendicular  $MS$  a  $\alpha\beta$ .

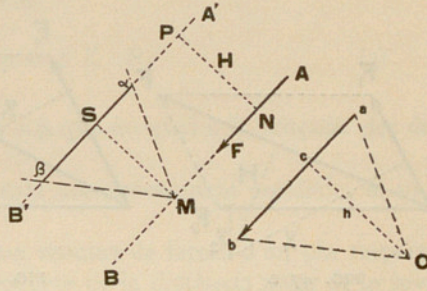


FIG. 46

Si designem per  $M$  el moment de la força donada podem establir

$$M = F \cdot PN = ab \cdot MS = ab \cdot H \quad (1)$$

Per ésser semblants els triangles  $M\alpha\beta$  i  $Oab$  tindrem:

$$\frac{ab}{Oc} = \frac{\alpha\beta}{H}, \text{ d'on } ab \cdot H = Oc \cdot \alpha\beta.$$

Igualant aquesta darrera equació a la (1) podem posar

$$M = Oc \cdot \alpha\beta = h \cdot \alpha\beta \quad (2)$$

És evident que mentre no variï la posició del pol, la distància  $\alpha\beta$  és independent de la posició del punt  $M$ , per on hem fet passar el polígon funicular.

La longitud  $\alpha\beta$  depèn de la posició del pol, però com que el moment d'una força respecte a un punt només pot tenir una sola valor, deduïm per la fórmula (2), que el producte  $Oc \cdot \alpha\beta$  ha d'ésser constant.

El moment estàtic  $F \cdot H$  de la força  $F$  respecte al punt  $P$  es representa pel producte  $h \cdot \alpha\beta$ , essent  $h$  la *distància polar* i  $\alpha\beta$  la longitud del tros de paral·lela a  $F$  que passa per  $P$ , compresa entre els costats extrems del polígon funicular.

38. En el cas de dues forces  $F_1$  i  $F_2$  de direcció diferent, podem escriure

$$M_R = M_1 + M_2$$

Aquest procediment pot ésser aplicat a un nombre qualsevol de forces. Així, doncs, *el moment estàtic de la resultant d'un sistema de forces, respecte a un punt del seu pla,*

*és igual a la suma dels moments de les seves components respecte al mateix punt.*

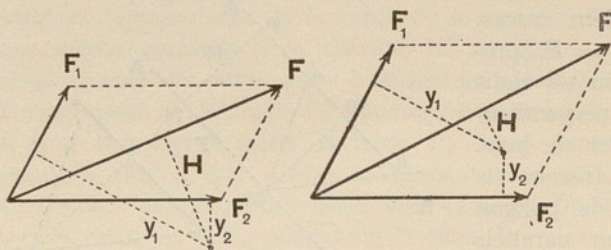


FIG. 47 a

FIG. 47 b

En prendre els moments de les forces d'un sistema cal tenir en compte el signe del moment de cada una de les forces.

Així, en la fig. 47 a els moments de les components són positius, puix que les forces fan girar els braços de palanca respectius com les busques del rellotge. Per tant,

$$M = F \cdot H = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2.$$

En canvi, en la fig. 47 b, el moment de la resultant és

$$M = F \cdot H = F_1 \cdot y_1 - F_2 \cdot y_2,$$

on el moment de la força  $F_2$  és negatiu, puix que el seu braç de palanca gira en un sentit contrari al de les busques del rellotge.

39. *Moment d'un grup de forces.* — D'això deduïm un procediment molt còmode per a cercar el moment respecte a un punt  $P$  d'un grup de forces  $F_1, F_2, F_3, F_4$ .

Formem, per a aquest grup, un polígon de forces; la seva resultant serà en magnitud i direcció  $R$  (fig. 48). Escollim per pol un punt qualsevol  $O$  i construïm el polígon funicular  $M A B C D N$ . El punt d'intersecció dels costats

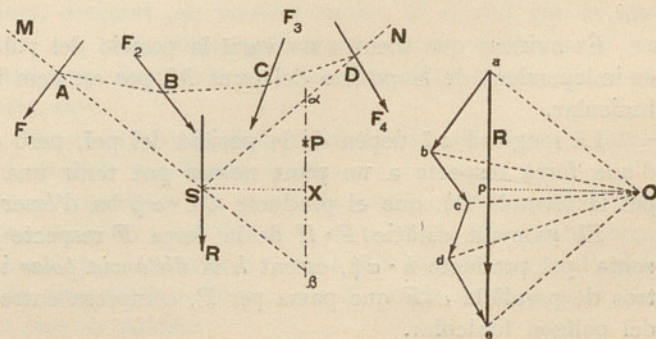


FIG. 48

extrems  $MA$  i  $DN$  serà un punt de la resultant  $R$  que serà paral·lela a  $ae$ . El moment de les forces  $F_1, F_2, F_3, F_4$  és el mateix que el de  $R$ . Tracem pel

punt  $P$ ,  $\alpha\beta$  paral·lela a  $R$ . El segment  $\alpha\beta = y$  multiplicat per la distància polar  $O\phi = h$  serà igual al moment cercat. En efecte, el triangle  $Oae$  és semblant al triangle  $\alpha\beta S$ , i tindrem:

$$M = \alpha\beta \cdot O\phi = SX \cdot R, \quad (3)$$

essent  $SX$  la perpendicular des de  $S$  a  $\alpha\beta$  que és igual a la traçada des del punt donat  $P$  a  $R$ .

El segment  $\alpha\beta$  mesura, a una escala convenientment escollida, el moment de  $R$  respecte a  $P$ .

Així, doncs, el moment estàtic d'un sistema de forces d'un pla respecte a un punt d'aquest pla, és igual al producte de la distància polar de la seva resultant pel segment determinat damunt de la recta paral·lela a la resultant traçada pel centre de moments, comprès entre els costats extrems del polígon funicular.

40. *Moment de diverses forces paral·leles.* — Aquest mètode és molt interessant en el cas d'ésser les forces paral·leles. Representem (fig. 49) un grup de forces d'aquesta mena  $Q, F_1, F_2$  amb el polígon de forces corresponent. La seva resultant és  $R$  i l'hem determinada amb ajut del polígon funicular  $ABC$ . El moment de  $R$  respecte a un punt qualsevol  $P$ , és avaluat pel segment  $\alpha\beta$ , amidat entre els costats extrems  $SA$  i  $SC$  del polígon funicular, de la paral·lela a les forces dades traçada pel centre de moments  $P$  multiplicat pel radi polar  $h$ .

Per la fórmula (3) tindrem:

$$M = R \cdot L = \alpha\beta \cdot h.$$

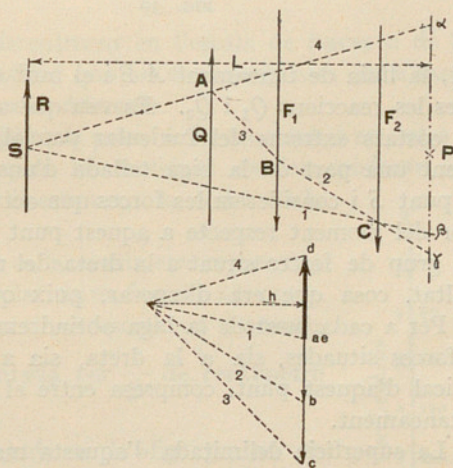


FIG. 49

Si, per exemple, volem determinar únicament el moment d'una sola força  $F_2$  respecte al punt  $P$ , s'allarguen els costats 1 i 2 del polígon funicular que la comprenen, fins que la paral·lela talla aquesta pel punt  $\gamma$ ; si el segment que determinen damunt d'ella és  $\beta\gamma = y_3$  tindrem com abans

$$M_3 = y_3 \cdot h.$$

Per tant, el moment estàtic d'una força pertanyent a un sistema de forces paral·leles, respecte a un punt del seu pla, és el producte de la distància polar,  $h$ , pel segment  $\beta\gamma$  que els costats del polígon funicular que comprenen la força donada determinen sobre la paral·lela a ella traçada pel centre de moments.

41. *Superfície de moments.* — Aquest agrupament de forces es troba molt sovint en l'estudi de bigues reposant damunt dos punts de sosteniment.

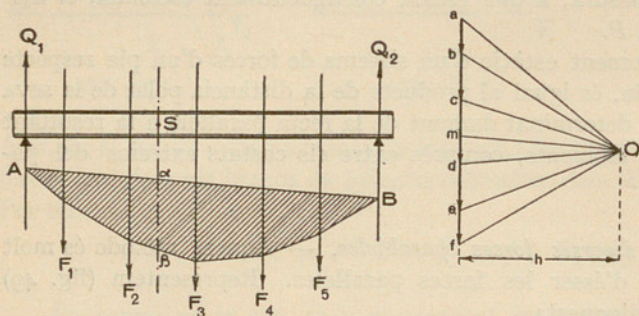


FIG. 50

La fig. 50 representa una biga sotmesa a les càrregues  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$ . Les dues reaccions, també verticals, es troben en  $Q_1$  i  $Q_2$  i es determinen tal com hem explicat en el n.º 35, traçant el polígon de forces  $abcdefi$  i el polígon funicular corresponent.

La línia de tancament  $AB$  i el radi  $Om$  determinen en el polígon de forces les reaccions  $Q_1$  i  $Q_2$ . Es veu que aquesta línia de tancament és un dels costats extrems del funicular parcial, que és obtingut considerant solament una part de la biga tallada d'una manera qualsevol. Si la tallem pel punt  $S$  i considerem les forces que actuen a l'esquerra d'aquest punt, la valor del moment respecte a aquest punt és  $\alpha\beta \cdot h$ . Si considerem el mateix grup de forces situat a la dreta del mateix punt, arribarem al mateix resultat, cosa que era d'esperar, puix que les forces estan en equilibri.

Per a cada punt de la biga obtindrem, doncs, la valor del moment de les forces situades, sia a la dreta, sia a l'esquerra, pel tros d'ordenada vertical d'aquest punt, compresa entre el polígon funicular i la seva línia de tancament.

La superfície delimitada d'aquesta manera és designada per *superfície dels moments* de la biga sota l'acció de les càrregues considerades. Com és natural varia amb les càrregues.

42. *Escala de moments.* — Cal parar molt d'esment en la tria de les escales quan s'empren traçats gràfics per a avaluar els moments de les forces. Com que les línies el mateix poden representar forces que longituds, cal saber a quina escala cal llegir els resultats.

Suposem que prenem com a escala de longituds  $\frac{1}{1250} = 0,0008$  m per

metre, i que representem les forces a l'escala de 5 mm per tona o  $0,005 \text{ m} = 1'$ , llavors podrem representar una força  $F$  de 4,6 tones per exemple, per 23 mm. El moment d'aquesta força per a un braç de 17'5 m, serà

$$M = 4,6 \text{ t} \times 17,5 \text{ m} = 80,5 \text{ metre-tones}$$

Prenem com a distància polar  $h = 18,4 \text{ mm}$ , que equival a  $18,4 : 0,0008 = 23 \text{ m}$ ; el segment  $\alpha\beta$  que amida 17,5 mm, equival a  $17,5 : 0,005 = 3,5 \text{ tones}$  el moment és el mateix

$$M = 3,5 \text{ t} \times 23 \text{ m} = 80,5 \text{ metre-tones}$$

Però és evident que no canviariem en res si variéssim l'ordre dels factors, a condició que determinéssim la distància polar  $h$  a l'escala de les forces, llavors hauriem de mesurar  $\alpha\beta$  en l'escala de longituds. La longitud  $h = 18,4 \text{ mm}$  representarà, també,  $0,0184 : 0,005 = 3,68 \text{ tones}$ ; el segment  $\alpha\beta$  que té 17,5 mm representa  $0,0175 : 0,0008 = 21,875 \text{ m}$ , però el resultat és el mateix:

$$M = 3,68 \text{ t} \times 21,875 \text{ m} = 80,5 \text{ metre-tones}$$

Podrem prendre, doncs, indiferentment en l'escala de forces o de longituds les línies a mesurar, a condició que les dues longituds que s'han de multiplicar siguin preses sobre escales diferents.

En els diagrames de què la distància polar  $h$  és constant, i en totes les altres en què sigui igual i s'emprin les mateixes escales, podrem establir una escala per a mesurar directament la valor dels moments.

Suposem un diagrama en què cada centímetre representa 2 t multiplicades per la distància polar, 15 m, és a dir  $2 \text{ t} \times 15 \text{ m} = 30 \text{ mt}$ , per tant, podrem traçar una escala de moments on cada metre-tons serà representada per  $\frac{1}{30}$  de centímetre o 0,333 cm.

Aquesta escala és representada a la fig. 51, on es troben encarades les divisions en centímetres i en metre-tons.

Si demanéssim, per exemple, el moment de  $F$  respecte al punt  $P$ , només haurem de traçar  $\alpha\beta$  paral·lela a  $F$  i a mesurar aquest segment damunt l'escala: el trobem igual a 285 mm equivalent a  $2,85 \times 30 = 85,5 \text{ metre-tons}$ .

*Exemple.* — Sobre una biga de 5 m de llargada actuen les forces  $P_1 = 500 \text{ kg}$ ,  $P_2 = 900 \text{ kg}$ ,  $P_3 = 600 \text{ kg}$  i  $P_4 = 700 \text{ kg}$ , separades unes d'altres per les distàncies indicades a la fig. 52. Cercar la valor del moment

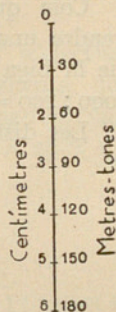


FIG. 51

de les forces que actuen a la dreta de la secció  $\alpha\beta$  situada a 2,9 m de distància del descans esquerre, respecte a un punt de la dita secció.

Prendrem una escala de forces d'1 mm = 50 kg, amb la qual cosa les forces vindran representades pels següents segments:  $P_1 = 500 : 50 = 10$  mm;  $P_2 = 900 : 50 = 18$  mm;  $P_3 = 600 : 50 = 12$  mm;  $P_4 = 700 : 50 = 14$  mm.

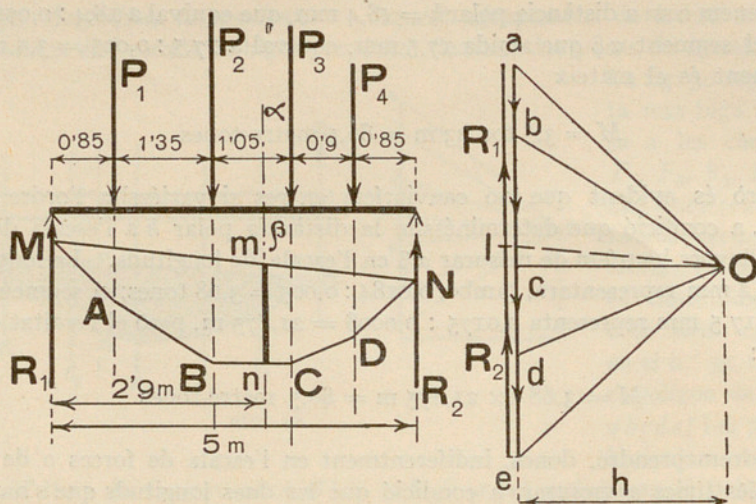


FIG. 52

Com que volem determinar la valor d'un moment, ens cal també prendre una escala de longituds que serà d'1 mm = 100 mm. Així, com que la biga té una longitud de 5 m serà representada per una llargada de  $5,000 : 100 = 50$  mm.

Les distàncies entre les forces es converteixen en

$$\begin{aligned} 850 : 100 &= 8,5 \text{ mm} \\ 1,350 : 100 &= 13,5 \text{ mm} \\ 1,050 : 100 &= 10,52 \text{ mm} \\ 900 : 100 &= 9 \text{ mm} \end{aligned}$$

Per obtenir el polígon de forces portarem els anteriors segments uns a continuació d'altres, i prenent un pol  $O$  traçarem els radis vectors  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$ ,  $Od$  i  $Oe$ .

Des d'un punt qualsevol  $A$  de la força  $P_1$  traçarem una paral·lela al radi vector  $Oa$  fins a tallar la reacció  $R_1$  en el punt  $M$  i una altra paral·lela al radi vector  $Ob$  fins a tallar la força  $P_2$  en el punt  $B$ . Des de  $B$  traça-

rem una paral·lela a  $Oc$ ; des de  $C$  una paral·lela a  $Od$  i des de  $D$  una paral·lela  $Oe$  fins a tallar la línia d'acció de  $R_2$  en el punt  $N$ .

Traçant una recta que passi pels punts  $M$  i  $N$  obtindrem la línia de tancament  $MN$  a la qual traçarem una paral·lela des del punt  $O$  i ens quedarà dividida la recta  $ae$  en dos segments  $al$  i  $le$ , representatius de la valor de les reaccions  $R_1$  i  $R_2$  respectivament. Per conèixer les seves magnituds aplicarem l'escala de forces

$$R_1 = 25 \times 50 = 1,250 \text{ kg}; \quad R_2 = 29 \times 50 = 1,450 \text{ kg}$$

Per a mesurar en el polígon funicular la magnitud del moment de les forces  $R_2$ ,  $P_2$  i  $P_4$  respecte a la secció  $\alpha\beta$ , es perllonga aquesta línia i s'amida el segment  $mn$  que queda comprès entre els costats del polígon funicular.

Aquest resulta ésser igual a 13,5 mm, que, tenint en compte l'escala de forces, representa una valor de

$$13,5 \times 50 = 675 \text{ kg}$$

Com que la distància polar  $h$  mesura 29 mm, que, a l'escala de longituds representen

$$29 \times 100 = 2,900 \text{ mm} = 2,9 \text{ m},$$

la magnitud del moment cercat és

$$675 \times 2,9 = 1,957 \text{ kgmts.}$$

En el cas d'haver de mesurar diversos moments, en lloc d'efectuar tantes operacions és millor d'establir una escala única de moments, que trobarem en aquest cas tenint en compte que 1 mm de la longitud compresa entre els costats del polígon funicular equival a  $1 \times 50 \times 29 \times 0,1$  quilogràmetres; per tant l'escala serà

$$1 \text{ mm} = 145 \text{ kgmts.}$$

Si la longitud  $mn$  compresa dins el polígon funicular val 13,5 mm el moment tindrà una valor de

$$13,5 \times 145 = 1,957 \text{ kgmts.}$$

## CENTRES DE GRAVETAT

43. Una de les aplicacions més freqüents de la composició de forces paral·leles és la determinació dels centres de gravetat. Per a determinar aquest punt d'una superfície qualsevol, se suposa a l'efecte, que cada un dels seus elements té un pes propi, proporcional a la seva superfície. Es divideix, doncs, la superfície considerada en un cert nombre de porcions, l'àrea de les quals, així com el seu centre de gravetat respectiu, siguin fàcils de determinar.

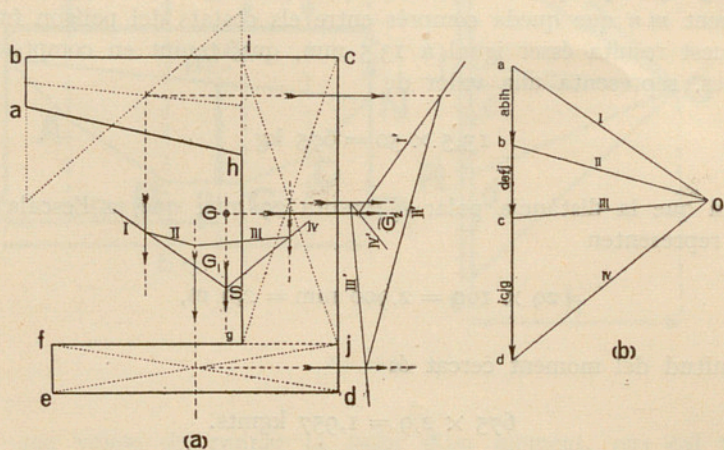


FIG. 53

Suposarem aplicada a cada un d'aquests punts una força paral·lela a una mateixa direcció qualsevol i avaluada per la seva superfície, i component-les gràficament obtindrem la posició de llur resultant. Repetint el traçat per a una altra direcció qualsevol, obtindrem una segona posició de la resultant; el centre de gravetat es trobarà en la intersecció de les línies d'acció de les resultants.

La fig. 53 representa la secció d'un ferro especial que suposem no simètric respecte a cap eix, per a considerar el cas més general. El descompondrem en tres parts, l'àrea de les quals és, respectivament:

$$a b i h = \frac{2 + 1}{2} \times 4,5 = 6,75 \text{ cm}^2$$

$$i c j g = 6 \times 2 = 12,00 \text{ cm}^2$$

$$f j d e = 6 \times 1 = 6,00 \text{ cm}^2$$

Traçarem un primer polígon de forces (fig. 53 b) la intensitat de les quals serà proporcional a les àrees donades i té per punt d'aplicació el centre de gravetat respectiu a cada porció. Amb un punt  $O$  com a pol tracem el polígon funicular I, II, III, IV, els dos costats extrems del qual, I i IV, es detallen en  $S$ , per on passa la primera resultant  $G_1$  paral·lela a les forces donades. Podríem repetir la mateixa operació amb altra direcció de les forces i trobaríem una segona resultant  $G_2$ . La intersecció de  $G_1$  i  $G_2$  ens determina el centre de gravetat  $G$  cercat.

Aquesta operació es pot simplificar traçant un sol polígon de forces, però suposant traçat el segon al qual s'ha donat un gir de  $90^\circ$  respecte al

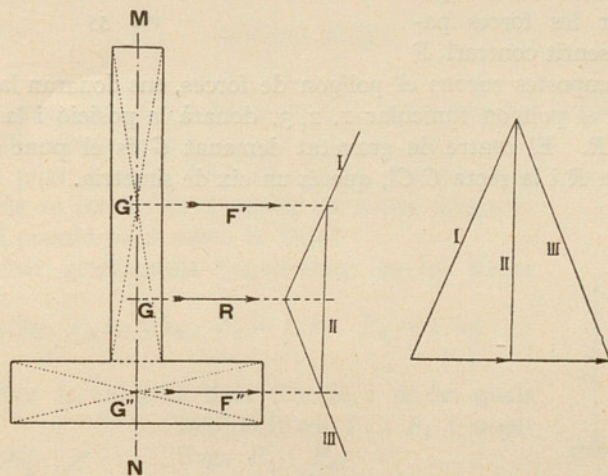


FIG. 54

primer. Llavors les línies homòlogues dels polígons de forces i funicular primers són perpendiculars a les dels polígons de forces i funicular traçats després.

Amb l'ajut d'un escaire de  $90^\circ$  podrem, doncs, traçar d'antuvi les dues sèries de forces en angle recte, després els funiculars corresponents, traçant cada cop una paral·lela i una perpendicular a cada un dels radis polars de  $O$ . D'aquesta manera s'obté ràpidament, i amb molta més precisió que escollint dues direccions arbitràries, el centre de gravetat.

Quan la superfície presenta un eix de simetria  $MN$ , només cal traçar un sol polígon de forces. L'escollirem amb preferència de manera que les seves forces siguin perpendiculars a l'eix de simetria (fig. 54).

Es pot emprar el mateix procediment per a determinar el centre de gravetat d'una línia trencada. Aplicarem a cada element lineal una força proporcional a la seva longitud i operarem d'una manera semblant a l'explicada.

44. *Centre de gravetat d'una superfície que té una porció buida.* — En aquest cas (fig. 55), per a aplicar els mètodes explicats fins ara, cal que ens fixem que la superfície proposada és la diferència entre l'àrea del cercle que té per centre el punt  $C$  i l'àrea del cercle de centre  $C'$ .

Considerant les àrees com a forces, en els punts  $C$  i  $C'$ , centres de gravetat dels respectius cercles, podrem aplicar les forces paral·leles i de sentit contrari  $F$

i  $F'$  que, compostes segons el polígon de forces, ens donaran la valor de la resultant  $R$ ; el polígon funicular 1, 2, 3, donarà la posició i la direcció de la resultant  $R$ . El centre de gravetat demanat  $G$  és el punt on es tallen la direcció de  $R$  i la recta  $CC'$ , que és un eix de simetria.

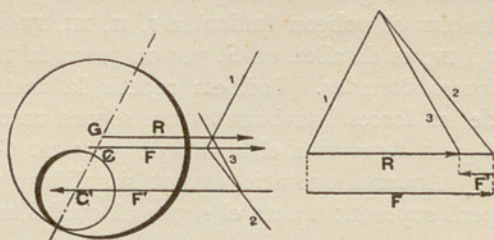


FIG. 55

# ELEMENTS D'ESTÀTICA GRÀFICA

## PROBLEMES

1. Representar quatre forces de 6, 3, 4,5 i 8,75 kg, respectivament, a una escala d'1 cm = 2 kg.

2. Un pilar de 3 m d'alçada (fig. 1) suporta a la part superior una càrrega  $P$ , de 10 tones i pesa 250 kg per metre d'alçada. ¿Quina és la pressió total sobre la base?

3. Trobar gràficament l'equilibrant de les forces

$$F_1 = 4 \text{ kg}, F_2 = 3 \text{ kg}, F_3 = 1 \text{ kg}, F_4 = 5 \text{ kg}$$

situades sobre la mateixa línia d'acció, i de les quals són positives  $F_1$  i  $F_4$  i negatives  $F_2$  i  $F_3$ .

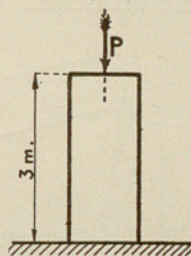


FIG. 1

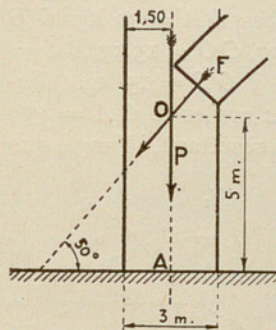


FIG. 2

4. En la lluita esportiva d'estirar la corda l'equip  $A$  es compon de 8 homes, la força dels quals és de 35, 70, 40, 55, 30, 60, 65 i 80 kg, i l'equip  $B$  de 8 homes amb forces de 90, 45, 50, 60, 75, 35, 25 i 40 kg. Quin equip guanyarà?

Resoldre el problema gràficament amb l'escala de forces 1 cm = 50 kg.

5. Trobar gràficament la resultant de dues forces de 40 kg i 90 kg, aplicades a un punt:  $a$ ) quan llurs direccions formin un angle de  $45^\circ$ ,  $b$ ) quan en formin un de  $90^\circ$ ,  $c$ ) quan l'angle sigui

de  $135^\circ$ ,  $d$ ) quan sigui de  $180^\circ$ ,  $e$ ) de  $225^\circ$ , i  $f$ ) de  $0^\circ$ .

6. L'empenta  $F = 15$  tones d'un arc (fig. 2) forma un angle de  $50^\circ$  amb l'horitzontal, talla en un punt  $O$  a 5 m del sòl, la línia d'acció del pes del mur,  $P = 80$  tones. Trobar llur resultant i la distància en metres, entre el punt on aquesta resultant troba la base del mur i el peu  $A$  del pes del mur.

7. En un triangle, ¿quin és el sentit de la resultant respecte al de les components? I el de l'equilibrant? ¿Quina és la resultant de tres forces, els costats del triangle de forces de les quals poden ésser recorreguts en un mateix sentit?

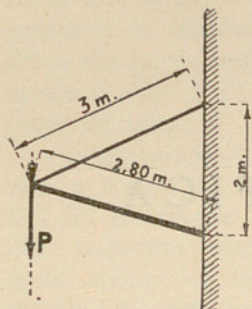


FIG. 3

8. A l'extrem lliure d'una barra de 2,80 m de longitud (fig. 3) encastada a la paret pengem un pes  $P$  de 50 kg sustentat per un filferro de 3 metres de longitud fixat a la paret 2 m més amunt de la barra. Trobar les tensions del filferro i de la barra.

9. Trobar la força que equilibra les dues forces  $F = 5$  kg i  $F' = 8,5$  quilograms (fig. 4) que fan entre elles un angle de  $60^\circ$ , i les resultants de  $F$  i  $R$  i de  $F'$  i  $R$ , respectivament.

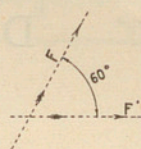


FIG. 4

10. La cabina d'un transbordador aeri (fig. 5) pesa 2000 kg plena de passatgers i 1200 kg buida. Calcular en ambdós casos les dues tensions del cable sense tenir en compte el seu pes. Escala de forces: 1 cm = 400 kg. Escala de longituds 1 cm = 20 m.

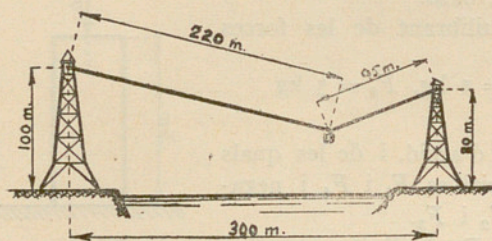


FIG. 5

11. Compondre les quatre forces dibuixades en la figura 6: a) mitjançant parallelograms de força, b) pel polígon de forces.

12. Compondre (fig. 7) les forces  $OA = 30$  kg,  $OB = 50$  kg,  $CO = 15$  kg,  $DO = 80$  kg, i  $OE = 15$  kg. Essent els angles  $BOA = 45^\circ$ ,

$COA = 90^\circ$ ,  $DOA = 135^\circ$ ,  $EOA = 270^\circ$ . Trobar la resultant, i l'angle que la seva direcció forma amb la de la força  $OA$ .

13. Es demana la força equilibrant de

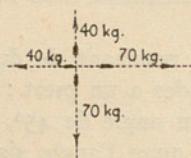


FIG. 6

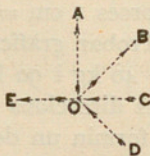


FIG. 7

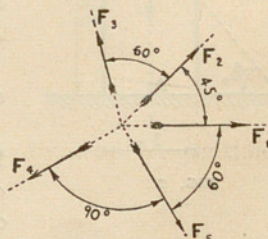


FIG. 8

les següents forces concurrents:  $F_1 = 4,5$  tones,  $F_2 = 3$  tones,  $F_3 = 5,5$  tones,  $F_4 = 6,75$  tones,  $F_5 = 2$  tones. Els angles que fan unes forces amb altres són indicades a la fig. 8.

14. Quantes coses pot representar la recta que uneix l'origen amb l'extrem d'un polígon de forces?

15. Tenim quatre forces concurrents que s'equilibren. Suprimim-ne una. Quina és la resultant de les tres que queden?

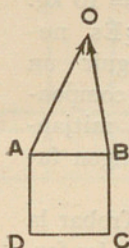


FIG. 9

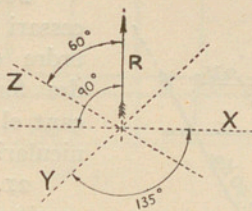


FIG. 10

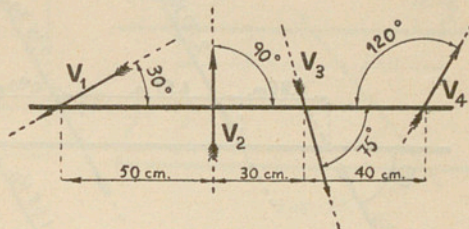


FIG. 11

16. En els vèrtexs A i B d'un quadrat de 3 cm de costat (fig. 9) hem aplicat les forces AO i BO, la intensitat de les quals ve expressada per una longitud de 5 cm la AO i per una de 4,5 cm la BO. Trobar dues forces concurrents que, equilibrant les donades, passin per C i per D, respectivament.

Escala de forces : 1 cm = 25 kg.

17. Trobar (fig. 10) les equilibrants de  $R = 50$  kg, les línies d'acció de les quals són X, Y i Z, de forma que la intensitat de X sigui la meitat de R.

18. Compondre, mitjançant el polígon de

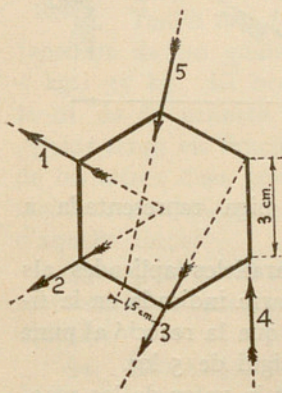


FIG. 12

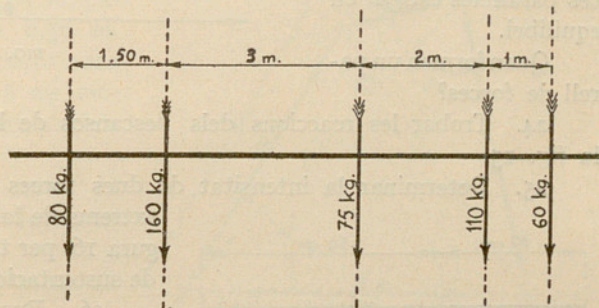


FIG. 13

forces i el funicular corresponent, les forces de la fig. 11, les intensitats de les quals són :  $V_1 = 400$  gr,  $V_2 = 125$  gr,  $V_3 = 750$  gr,  $V_4 = 675$  gr. La posició relativa ve donada pels angles i les distàncies de la figura.

Escala de forces : 1 cm = 250 gr. Escala del dibuix : 1 cm = 10 cm.

19. Tenim (fig. 12) un hexàgon regular de 3 cm de costat. Les forces 1, 2, 3, 4 i 5 situades com indica el dibuix, tenen totes la mateixa intensitat, 20 kg. Trobar la força equilibrant del sistema.

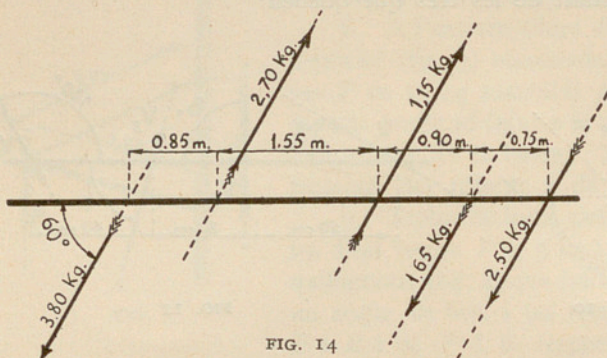


FIG. 14

Escala de forces: 1 cm. = 10 kg.

20. ¿És necessari seguir un ordre en compondre forces mitjançant el polígon funicular?

21. Trobar la resultant de les forces paral·leles representades a la figura 13.

Escala de forces : 1 cm = 100 kg. Escala de distàncies : 1 cm = 1 m.

22. Trobar l'equilibrant de les forces paral·leles indicades a la fig. 14. Indiqueu la valor de la distància polar.

Escala de forces i de distàncies a escollir.

23. Citeu les condicions gràfiques perquè un sistema de forces paral·leles estigui en equilibri.

Quan formen un parell de forces?

24. Trobar les reaccions dels descansos de la biga representada a la fig. 15.

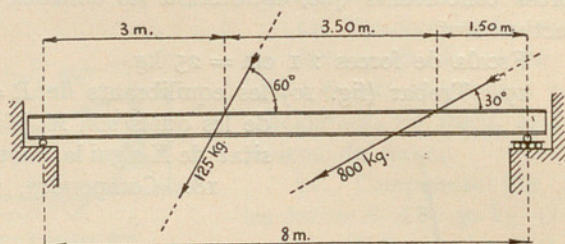


FIG. 15

25. Determinar la intensitat de dues forces paral·leles aplicades als extrems de la barra indicada en la figura 16, per tal que la reacció al punt de sustentació sigui de 5 kg.

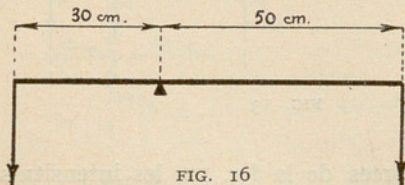


FIG. 16

26. Buscar la valor de les reaccions dels descansos de la biga de la figura 17. Totes les forces tenen la mateixa intensitat de 250 kg i estan igualment espaiades.

27. Què és i per què serveix la línia de tancament?

28. Descompondre la força  $R$  en tres que tinguin per línies d'acció les que indica la fig. 18.

29. ¿Quines són les condicions gràfiques necessàries perquè un sistema de forces qualsevulla tingui resultant, estigui en equilibri o equivalgui a un parell de forces?

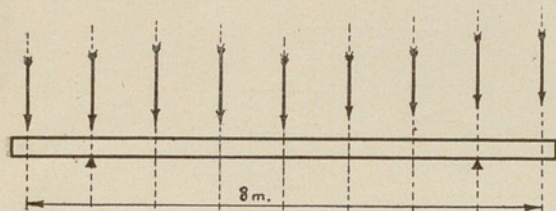


FIG. 17

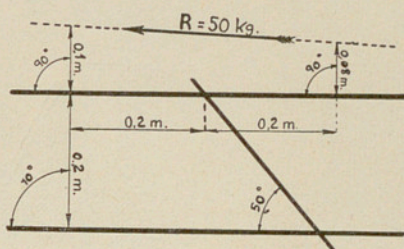


FIG. 18

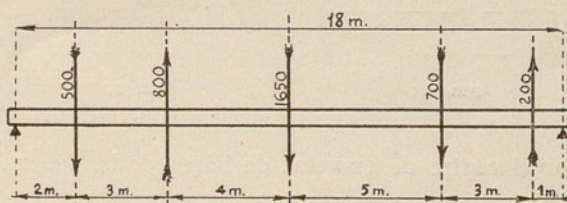


FIG. 19

30. Construïu un sistema de 4 forces en equilibri.

31. Què són moments de les forces? En quines unitats es mesuren?

32. Tenim tres forces, les intensitats de les quals són 20 kg, 5 kg i 35 kg. El braç de la palanca de la primera és 0,50 m. ¿Quins seran els braços de palanca de les altres dues perquè els moments respectius siguin meitats dels d'aquella força?

33. Quant val la suma de moments d'un sistema de forces en equilibri?

34. Com s'equilibra un parell de forces?

35. Trobar les reaccions dels descansos de la biga de la fig. 19.

36. Trobar el moment de la resultant de les quatre forces representades a la fig. 20 respecte al punt O.

37. Es donen 6 forces paral·leles d'igual sentit, de 50 kg d'intensitat cadascuna i a distàncies de 2 cm. Cercar la valor del moment de la resultant respecte a un punt de la línia d'acció de la quarta força.

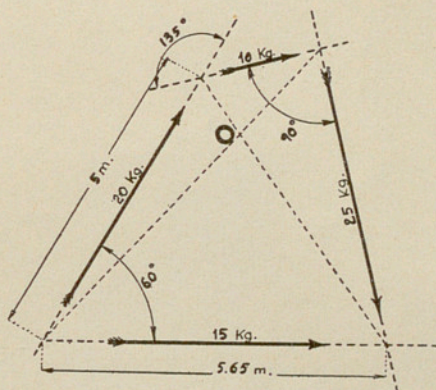


FIG. 20

38. On cau la resultant de dues forces paral·leles de sentit contrari?  
 39. Què entenem per centre de gravetat d'un cos?  
 40. Trobar el centre de gravetat del perímetre d'un hexàgon regular.

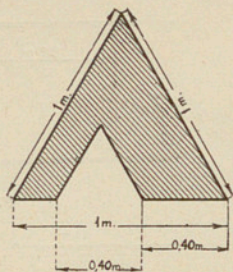


FIG. 21

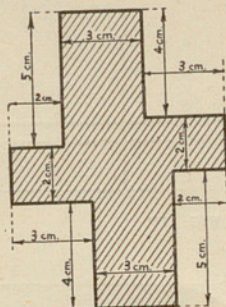


FIG. 22

41. Trobar el centre de gravetat de l'àrea de la fig. 21.  
 Escala d'I : 2.  
 42. Centre de gravetat de la secció dibuixada en la fig. 22.



RF-5-20

E·E·T