

Generalitat de Catalunya

EXTENSIO
D'ENSENYAMENT
TÈCNIC



ESTÀTICA GRÀFICA

Carrer d'Urgell 187 Barcelona

ESTÀTICA GRÀFICA

PRELIMINARS

1. *L'Estàtica Gràfica* o *Grafostàtica*, estudia les condicions d'equilibri de les forces que actuen damunt d'un cos, mitjançant traçats gràfics. Per tant, permet de resoldre, amb l'ajut de regla i compàs, els problemes de composició i descomposició de forces, els de llur equilibri, el càlcul de moments estàtics i d'inèrcia i la determinació de centre de gravetat.

Tots aquests problemes també poden ésser resolts per càlculs numèrics. Amb tot, no es pot dir quin dels dos sistemes és el millor. De vegades és més breu i còmode el gràfic, però en altres casos és preferible el procediment analític.

L'Estàtica Gràfica té una gran aplicació a la teoria de la Resistència de Materials i àdhuc a la Construcció de Màquines, i permet de calcular bigues, voltes, ponts, murs, encavallades, etc.

2. *Consells pràctics sobre el traçat de dibuixos.* — Per tal de facilitar el traçat dels gràfics i obtenir el màxim de precisió en els resultats, donarem alguns consells per a la seva bona execució.

Cal emprar paper fort ben llis i sense grans, si és possible. És millor de tenir-lo tes, puix cal evitar que faci bosses.

Cal emprar llapis durs, tallats ben fins, i traçar lleugerament per tal de poder esborrar i rectificar fàcilment.

Cal igualment evitar tota empremta sobre del paper, sigui de llapis sigui sobretot de les puntes del compàs.

Per a limitar les línies cal evitar d'estrebar el llapis, és millor fer-ho amb un petit traç transversal.

Quan moltes línies concorren en un mateix punt, cal verificar cada vegada que es traci una nova línia, que passi pel punt d'encreuament.

Utilitzeu exclusivament per als traçats un parell d'escaire bons. No feu servir mai regles T; les vores dels taulers no són prou exactes per a traçar línies paral·leles.

Eviteu els traçats per línies de poca longitud; per a comprovar els que donen verificacions múltiples, utilitzeu línies com més llargues millor.

I



R. 7.696

Quan es tracta dels esforços que es produeixen a les barres que formen una construcció, serà avantatjós de distingir les que estan sotmeses a tensió de les que estan sotmeses a compressió. Cal refusar la indicació que consisteix a marcar amb un doble traç les barres comprimides. És molt millor d'emprar tintes de color distint per a les diferents menes d'esforços, reservant el color negre per a les línies estrictes del traçat.

3. *Elements de les forces.* — Tota força queda fixada quan hom coneix els seus elements, els quals són: Punt d'aplicació, direcció, sentit i intensitat.

Punt d'aplicació: El punt d'aplicació és el punt del cos on pot suposar-se concentrada l'acció de la força.

Direcció: La direcció d'una força és la del moviment que prendria el cos sotmès solament a l'efecte de la dita força.

La recta segons la qual actua la força és anomenada *línia d'acció* de la força. Sobre aquesta recta es pot desplaçar el punt d'aplicació de la força, sense alterar el sistema.

La direcció ve donada per la línia d'acció de la força.

Sentit: Sobre una mateixa direcció són possibles dos sentits oposats de moviment. Les dues forces OA i OB aplicades al punt O (fig. 1) tenen la mateixa direcció, però són de sentit oposat.

Si considerem com a positives les forces que actuen en el sentit OA les quals marcarem amb el signe $+$, les que actuen en el sentit OB seran negatives i les assenyalarem amb el signe $-$.

Intensitat. És la mesura de la valor de les forces, comparant-les amb una força unitat.

La intensitat és, doncs, un nombre que expressa la relació entre l'efecte de la força donada i l'efecte de la que prenem per unitat.

Així: 4 kg és una força equivalent a 4 forces d'intensitat unitat 1 kg.

La unitat d'intensitat sol ésser la de pes: gram, quilogram, tona, etc.

4. *Representació gràfica de les forces.* —

Una força es representa gràficament traçant pel seu punt d'aplicació una recta paral·lela a la seva direcció i posant una punta de fletxa al seu extrem per indicar el seu sentit; la valor de la seva intensitat és donada per la longitud d'una recta proporcional a la intensitat de la força.

Així, una força F (fig. 2) d'intensitat 5 kg, de la qual coneixem el punt d'aplicació O , la direcció donada per la línia d'acció AB de la força i el sentit per la fletxa i ; la intensitat és representada per un segment rectilini ab

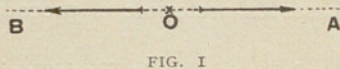


FIG. 1

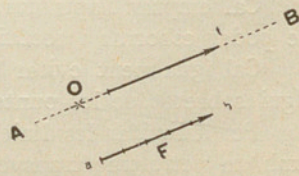


FIG. 2

de longitud proporcional a la intensitat de la força, traçat paral·lelament a la recta AB . Aquest segment ab està proveït d'una fletxa que n'indica el sentit.

5. En una construcció gràfica totes les forces han d'ésser referides a la mateixa escala, que per aquesta raó anomenarem *escala de forces*.

Prenent una escala de forces podem representar les intensitats respectives per longituds, en les quals cada unitat de longitud equival a una unitat de força. Així, a l'escala d' $1 \text{ cm} = 1 \text{ kg}$, a cada centímetre de longitud correspondrà 1 kg d'intensitat. Si escollim una escala d' $1 \text{ tona per } 25 \text{ mm}$, una força de 3 tones estarà representada al dibuix per una longitud de $3 \times 25 = 75 \text{ mm}$, i a una escala d' $1 \text{ kg} = 1 \text{ cm}$, una longitud de 80 mm representa una força de $80 : 10 = 8 \text{ kg}$.

Quan en un mateix pla hi ha diverses forces, cal, a més, prendre una escala de distàncies per a fixar llur situació. Així, si escollim per escala de distàncies $1 \text{ m} = 2,5 \text{ cm}$, els punts d'aplicació de dues forces distants de 2 m , al dibuix estaran situats a $2 \times 2,5 = 5 \text{ cm}$ un de l'altre.

A la fig. 3, OF i $O'F'$ representen, a l'escala d' $1 \text{ cm} = 1 \text{ kg}$ dues forces paral·leles de 5 i 3 kg , respectivament, situades a l'escala d' $1,5 \text{ cm} = 1 \text{ m}$, a 2 m de distància.

Per tal de facilitar el treball de conversió d'escals, cal escollir nombres amb els quals sigui fàcil d'operar.

Si no diem res en contra, suposarem que les forces actuen damunt d'un mateix pla.

La representació gràfica de totes les forces que actuen damunt d'un cos o sistema indeformable, constitueix una figura anomenada *diagrama de les forces*.

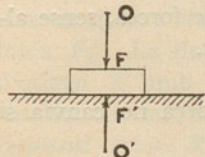


FIG. 4

6. *Reacció*. — Un cos reacciona sempre en sentit contrari a l'esforç a què és sotmès amb una intensitat igual al susdit esforç. Aquest esforç determina una pressió o una tensió. Així, quan, fig. 4, un cos reposa damunt d'un pla horitzontal, l'acció de la gravetat determina una *pressió* sobre el pla. Si el cos està suspès d'una corda l'extrem superior de la qual és fix, el seu pes produeix llavors una *tensió* de la corda.

La força $O'F'$ d'igual intensitat, de la mateixa direcció i de sentit contrari al de la força OF , és anomenada *reacció*.

Quan dues forces (fig. 5) com la $O'F'$ i la $O''F''$ d'igual intensitat i

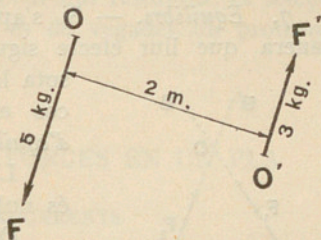


FIG. 3

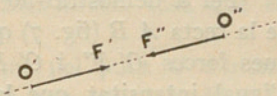


FIG. 5

de sentit contrari actuen en una mateixa línia d'acció, són anomenades forces directament oposades.

Forces concurrents. — Diem de dues o més forces F_1 , F_2 (fig. 6) que són concurrents quan llurs línies d'acció AB , $A'B'$ es tallen en un punt O . Aquest punt d'intersecció pot ésser pres com a punt d'aplicació de les susdites forces.

Dues forces en un pla són sempre concurrents o paral·leles. Encara que en aquest darrer cas es pot suposar que són concurrents en un punt situat a distància infinita.

7. *Equilibri.* — Si s'apliquen diverses forces damunt d'un cos de manera que llur efecte sigui nul, es diu que el cos està en equilibri sota la influència d'aquestes forces; la posició del cos en aquestes condicions es denomina *posició d'equilibri*.

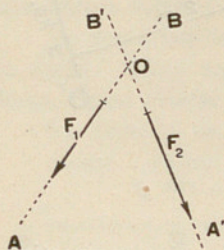


FIG. 6

Llavors la resultant d'aquest sistema de forces és nul·la.

Quan parlem de cossos sòlids o de sòlids invariables se suposa que la posició respectiva de cadascuna de les seves parts no és influïda per l'acció de les forces. Però com sigui que la rigidesa absoluta dels cossos no existeix, els teoremes d'estàtica sols tindran aplicació al cas en què el cos sol·licitat per un sistema de forces sols sofreixi alteracions molt petites.

Lema: Dues forces $O'F'$ i $O''F''$ (fig. 5) d'igual intensitat, de la mateixa direcció i de sentit contrari, s'equilibren, perquè l'efecte de l'una és igual i contrari al de l'altra, i es produeix el mateix efecte que si no hi hagués cap força. És a dir, la resultant és nul·la. Això permet d'introduir o suprimir dues forces que s'equilibren, dins un sistema de forces, sense alterar les condicions de repòs o de moviment del conjunt.

8. *Trasllat del punt d'aplicació.* — L'efecte d'una força no canvia si traslladem el seu punt d'aplicació a qualsevol punt de la línia d'acció de la força.

Per a demostrar-ho aplicarem al punt O' de la recta AB (fig. 7) que conté la força OF , dues forces $O'F'$ i $O'F''$ de sentit oposat i d'igual intensitat que la OF . Això, segons hem dit al paràgraf anterior, no canviarà en res l'efecte de la força OF .

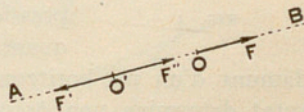


FIG. 7

Llavors els efectes de les forces OF i $O'F'$, per ésser iguals i oposades, s'anul·len i queda només la força $O'F''$ igual a la OF , que té el punt d'aplicació en O' .

9. *Composició de forces.* — Compondre dues o més forces és cercar la força única que, aplicada al cos sobre el qual actuen, produeix el mateix efecte.

Del cas invers de trobar dues o més forces que facin el mateix efecte que la força de la qual es tracta, se'n diu descompondre una força.

Les forces que es componen o les que resulten de la descomposició d'una força s'anomenen *components* de la força.

La força única que pot substituir dues o més forces, és anomenada *resultant*.

Compondre dues o més forces, és a dir, trobar llur resultant, és sempre possible. En canvi descompondre una força és de vegades un problema indeterminat.

COMPOSICIÓ I DESCOMPOSICIÓ DE FORCES EN UN PLA

COMPOSICIÓ DE FORCES CONCURRENTS

10. *Composició de dues forces concurrents.* — Siguin dues forces F_1 , F_2 (fig. 8 (a)) les línies d'acció de les quals són concurrents en un mateix punt O . Podem sempre substituir-les, pel que fa referència a llur efecte sobre aquest punt, per una resultant única determinada per un traçat gràfic fàcil. En efecte, cal només portar a partir d'un punt arbitràriament escollit a (fig. 8 (b)) una longitud ab igual a de una les forces F_1 en la direcció d'aquesta; a partir de l'extrem b portem una magnitud bc igual i paral·lela a la força F_2 . La línia que uneix el punt d'origen a amb el punt d'arribada c ens donarà en magnitud i direcció la resultant $ac = R$ de les dues forces dades. Quant al sentit en què actua aquesta resultant, el trobarem fàcilment sabent que el seu sentit és oposat al de les dues forces, cosa que és marcada a la figura per la fletxa corresponent.

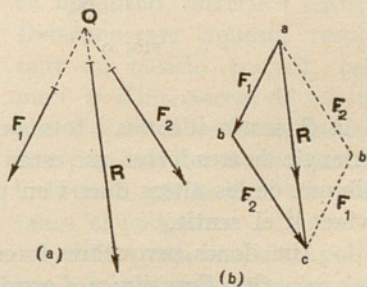


FIG. 8

Obtindrem en posició aquesta resultant menant pel punt O d'intersecció de les línies d'acció de les dues forces dades una paral·lela R' a la línia ac .

El triangle abc format per les tres forces és anomenat *triangle de les forces*.

És evident que hauríem pogut canviar l'ordre del traçat i portar primer en $a'b'$, la força F_2 (fig. 8 (b)) i després en $b'c$ la força F_1 per a acabar al

mateix punt c i obtenir, per consegüent, la mateixa resultant $a c$. El doble traçat $a b c$ i $a b'c$ constitueix el *paral·lelogram de les forces*, construcció fonamental en Mecànica i sobretot en l'Estàtica Gràfica, malgrat d'emprar-se quasi sempre exclusivament el triangle de les forces.

II. Si al punt O d'aplicació real de les forces F_1 i F_2 (fig. 9 (a)) afegim una tercera força Q igual i contrària a la resultant de les dues primeres, el punt O d'aplicació estarà en equilibri. Traçant (fig. 9 (b)) el triangle de les forces corresponent $a b c$ es veu de seguida que la tercera força Q és igual en intensitat a la resultant de les dues forces R , però de sentit contrari. La força Q és anomenada *equilibrant* del sistema; el seu sentit indicat per la fletxa és igual al de les altres dues forces.

Tots els traçats que féssim per a compondre separatament dues forces qualssevol d'un sistema en equilibri, la F_1 i la F_2 , la F_1 i la Q o per fi la F_2

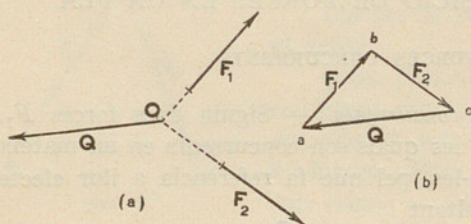


FIG. 9

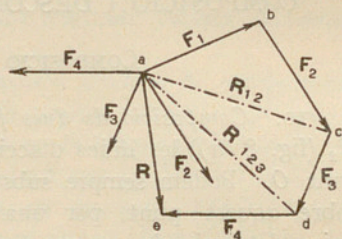


FIG. 10

i la Q , serien idèntics i tots darien el triangle $a b c$. Aquest triangle és el triangle de tres forces que estan en equilibri, i una qualsevol d'elles és l'equilibrant de les altres dues i en pot ésser presa com a resultant només canviant-li el sentit.

Així, doncs, perquè tres forces aplicades a un cos estiguin en equilibri, cal:

- Que llurs línies d'acció es tallin en un punt.
- Que el triangle de forces sigui tancat.
- Que les fletxes segueixin el mateix sentit en recórrer el triangle.

Recíprocament tot triangle que pot ésser recorregut en un sol sentit correspon a tres forces en equilibri, si llurs línies d'acció concorren en un mateix punt.

12. *Composició d'un nombre qualsevol de forces concurrents.* — Suposem que es tracta de trobar (fig. 10) la resultant de diverses forces concurrents F_1, F_2, F_3, F_4 que actuen en un mateix pla. Podem aplicar a les dues primeres el procediment emprat abans. Les compondrem traçant a partir de l'extrem b de F_1 , bc igual a F_2 , $ac = R_{1,2}$ serà la seva resultant, component la qual amb F_3 tindrem la resultant $ad = R_{1,2,3}$. Component

finalment aquesta darrera amb F_4 obtindrem la resultant total R . Les diagonals ac , ad , traçades des de l'origen a , representen les *resultants parcials* de les forces compreses des de l'origen i l'extrem on termina la diagonal corresponent. Però ens podem estalviar de traçar ac , continuarem traçant per c una línia cd igual en magnitud, direcció i sentit a F_3 , i així mateix de igual, paral·lela i del mateix sentit que F_4 . El punt final e obtingut unit a la a donarà la línia ae resultant R de les quatre forces.

El traçat $abcde$ és anomenat *polígon de les forces*.

13. És molt més pràctic de traçar a part la figura del polígon de les forces. Llavors (fig. II (b)), a partir d'un punt a arbitràriament escollit, es porten una a continuació de l'altra les forces donades, de manera que formin un contorn poligonal recorregut en un sol sentit; el costat ae que tanca el polígon representa llavors

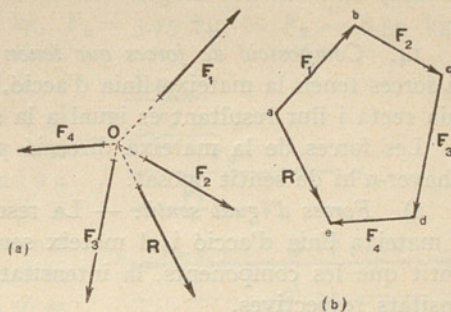


FIG. II

la resultant R de les forces, en magnitud, direcció i sentit. Determinarem aquesta resultant en posició traçant, pel punt O d'intersecció de les línies d'acció de les forces donades, una paral·lela del mateix sentit i direcció que la línia ae que tanca el polígon.

Si l'extrem final e del polígon coincideix amb l'origen a del polígon, aquest es tanca, i la força resultant és nul·la; és a dir, llavors les forces que actuen al punt O estan en equilibri.

Podem dir d'aquest polígon el que havem dit del triangle de les forces: *Si el polígon de forces d'un sistema de forces concurrents*

forma un polígon tancat de manera que el sentit dels seus costats permeti de recórrer el polígon en el mateix sentit sense interrupció, aquestes forces estan en equilibri.

Si una d'elles interromp aquest recorregut per ésser de sentit contrari a les altres, és la resultant de totes aquestes altres.

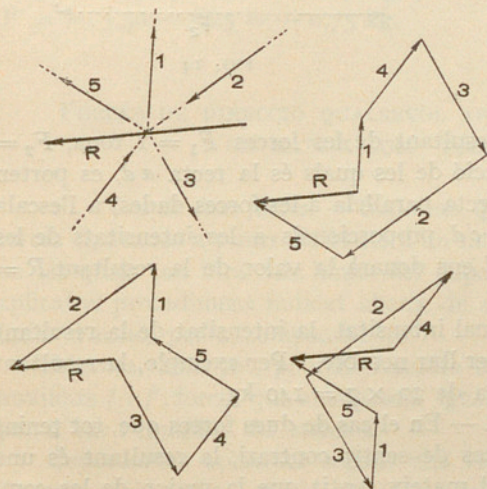


FIG. 12

La simple inspecció del traçat permet de veure que l'ordre segons el qual s'han disposat les forces en el polígon, no influeix per a res en el resultat. La fig. 12 dóna diverses composicions segons ordres diferents; de les forces dades la resultant R és la mateixa en totes elles.

14. *Composició de forces que tenen la mateixa línia d'acció.* — Quan les forces tenen la mateixa línia d'acció, el polígon de les forces esdevé una línia recta i llur resultant és igual a la suma algèbrica de les forces.

Les forces de la mateixa direcció poden ésser totes del mateix sentit o haver-n'hi de sentit oposat.

a) *Forces d'igual sentit.* — La resultant de diverses forces que tenen la mateixa línia d'acció i el mateix sentit, és una força d'igual direcció i sentit que les components, la intensitat de la qual és la suma de les intensitats respectives.

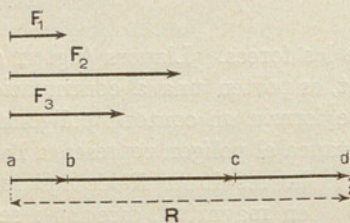


FIG. 13

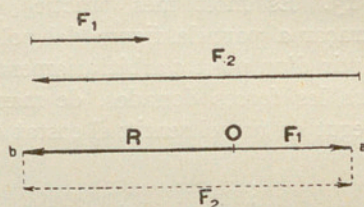


FIG. 14

Així (fig. 13) per trobar la resultant de les forces $F_1 = 1$ tona, $F_2 = 3$ tones, $F_3 = 2$ tones, la línia d'acció de les quals és la recta ad , es porten a partir d'un punt a d'aquesta recta paral·lela a les forces dades, a l'escala que sigui, els segments ab , bc , cd proporcionals a les intensitats de les forces respectives, el segment ad ens donarà la valor de la resultant $R = 1 + 3 + 2 = 6$ tones.

Quan totes les forces són d'igual intensitat, la intensitat de la resultant és la d'una d'elles multiplicada per llur nombre. Per exemple, la resultant de 7 forces de 20 kg és una força de $20 \times 7 = 140$ kg.

b) *Forces de sentits contraris.* — En el cas de dues forces que, tot tenint la mateixa línia d'acció, són forces de sentit contrari, la resultant és una força de la mateixa direcció i del mateix sentit que la major de les components; la intensitat de la resultant és la diferència de les intensitats de les dues forces.

Així (fig. 14) si volem cercar la resultant de les forces $F_1 = 45$ kg i $F_2 = 125$ kg aplicades al punt O , la línia d'acció de les quals és la recta ab , prendrem a partir de O el segment oa equivalent a la força F_1 , i a comptar des de a i en sentit contrari, prendrem el segment ab proporcional a la inten-

sitat de la força F_2 ; el segment $O b$ ens donarà la valor de la resultant $R = 45 - 125 = -80$ kg.

15. En el cas d'ésser moltes les forces que hi ha de cada mena, podem reduir el sistema a dues forces sumant les d'igual sentit. Així (fig. 15) la resultant de les forces $F_1 = 3$ kg, $F_2 = 3,75$ kg, $-F_3 = 8,50$ kg i $-F_4 = 5$ kg és la de dues forces $F = F_1 + F_2 = 3 + 3,75 = 6,75$ kg i $F' = -F_3 - F_4 = -8,50 - 5 = -(8,50 + 5) = -13,5$ kg. Llavors prenent, com en el cas 14, des del punt O una longitud $o a$ proporcional a la intensitat de la força F i des de a una longitud $a b$ proporcional a la força F' , la recta $O b$ ens donarà la valor de la resultant $R = 6,75 - 13,50 = -6,75$ kg.

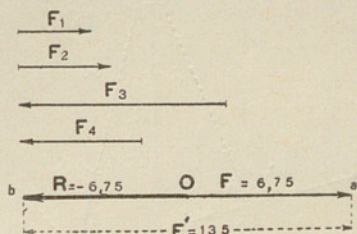


FIG. 15

En ambdós casos és indiferent l'ordre en què es prenguin les forces proposades, així com els grups que es facin quan es tracta de forces de sentits contraris. Així podríem resoldre el darrer cas cercant la resultant parcial en les forces $F_1 = 3$ kg i $-F_3 = 8,50$ kg, $F = 3 - 8,5 = -5,5$ kg, i la de les forces $F_2 = 3,75$ kg i $-F_4 = 5$ kg, $F' = 3,75 - 5 = -1,25$ kg, per a trobar la resultant total $R = -F' = -5,50 - 1,25 = -6,75$ kg.

FORCES DE DIRECCIÓ QUALSEVOL APLICADES A PUNTS DIFERENTS D'UN MATEIX COS. POLÍGON FUNICULAR.

16. *Cas de dues forces.* — Suposem que F_1 i F_2 (fig. 16 (a)) són dues forces aplicades a punts diferents d'un mateix cos, el punt de concurrència de les quals cau fora dels límits del paper, de manera que no els pot ésser aplicat el procediment indicat abans, de cercar el punt d'intersecció de les línies d'acció, per a compondre-les.

Llavors, amb tot, podem resoldre el problema introduint dues forces auxiliars f i f' , forces que si suposem iguals i de sentit contrari no canviaran per a res l'equilibri del sistema.

Suposem-les aplicades segons una recta AB escollida arbitràriament. Podem combinar una d'elles, la f , amb la F_1 , i l'altra, f' , amb la F_2 ; llavors obtindrem dues resultants, AC i BC , que substitueixen en llurs efectes les forces F_1 i F_2 .

Representem en una figura a part (fig. 16 (b)) la força F_1 menant el vector ab paral·lel a F_1 i traçant per b el vector bo que representa la força auxiliar f que actua segons AB . El costat ao del triangle abo representarà llavors la resultant de F_1 i de f .

Tracem igualment bc paral·lela a F_2 . La força auxiliar f' per tenir la mateixa línia d'acció que la f , coincideix amb el vector bo , però serà de sentit contrari. La recta oc representa la resultant de les dues forces.

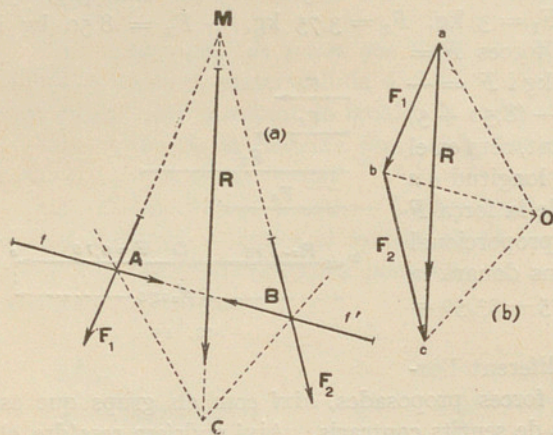


FIG. 16

De manera que tindrem quatre forces disposades en polígon ab , bo , Ob i bc que podem substituir per dues altres F_1 i F_2 . La resultant de l'un i de l'altre grup és la mateixa, és la recta ac , en magnitud i direcció.

Però la seva posició no està encara determinada: ho serà observant que podem traçar per A i B dues rectes AC i CB paral·leles a aO i Oc , que es tallen en C .

Havent substituït F_1 i f per llur resultant aO , la línia d'acció de la qual és AC , i F_2 i f' per la llur oc , que té per línia d'acció BC , la resultant colectiva R passarà evidentment per punt d'intersecció C de les dues línies d'acció i el segment ac ens la donarà en magnitud.

És fàcil de veure que la resultant determinada així pel punt C és la mateixa que la que hauríem obtingut si haguéssim prolongat simplement les línies d'acció de F_1 i F_2 fins a trobar-se en M .

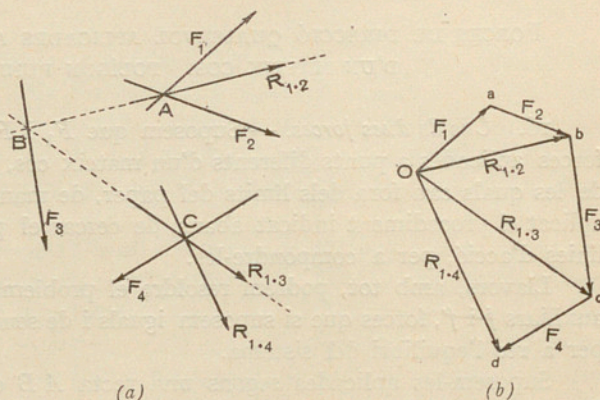


FIG. 17

17. Cas d'un nombre qualsevol de forces. — Suposem (figura 17 a) que F_1 , F_2 , F_3 i F_4 són forces no concurrents situades en el mateix pla.

Per a determinar llur resultant, podem compondre d'antuvi F_1 amb F_2 , pel triangle de forces O a b . La resultant R_{1-2} passa, com ja sabem, per A punt on es tallen les línies d'acció de F_1 i F_2 .

Compongum després R_{1-2} i F_3 . El triangle $O b c$ en dóna la intensitat i la direcció de la resultant R_{1-3} . La seva línia d'acció passarà per B .

La R_{1-3} , composta amb la darrera força F_4 (triangle de forces $O c d$), ens permet de trobar R_{1-4} , força que passa per C . R_{1-4} és la resultant total de les quatre forces F_1, F_2, F_3 i F_4 . Vegem per què. R_{1-4} és resultant de R_{1-3} i F_4 , però R_{1-3} ho és així mateix de R_{1-2} i F_3 ; doncs R_{1-4} serà també resultant de R_{1-2}, F_3 i F_4 . Com que R_{1-2} equival a F_1 i F_2 , R_{1-4} és, com volíem demostrar, resultant de F_1, F_2, F_3 i F_4 .

18. Anem a aplicar a un nombre qualsevol de forces el mètode que hem donat en el núm. 17 per a dues forces, menys enutjós que el que acabem d'explicar.

Siguin (fig. 18 (a)) F_1, F_2, F_3 i F_4 les forces que volem compondre, les quals tenen distints punts d'aplicació. Sobre una línia d'acció $M N$ arbitràriament escollida apliquem dues forces F_0 i $-F_0$ iguals i oposades. El sistema de les forces donades no canviarà en res, car F_0 i $-F_0$, estant en equilibri, no produiran cap efecte sobre el sistema.

Compongum ara, en figura a part (fig. 18 (b)) les forces concurrents F_0 i F_1 mitjançant el triangle de forces $O a b$. La resultant d'aquestes dues forces és $O b = II$, la qual té per línia d'acció la recta $A B$ traçada per A paral·lelament a $O b$, prolonguem $A B$ fins que talli en B , la línia d'acció de F_2 . La resultant de $O b = II$ i F_2 , trobada amb ajut del triangle de forces $O b c$ és $O c = III$, la seva línia d'acció és $B C$, traçada per B paral·lelament a $O c$. És evident que $O c = III$ és la resultant també de F_0, F_1 i F_2 , ja que $O b = II$ és la resultant de F_0 i F_1 .

Seguint d'aquesta forma obtindrem com a resultant de $O c = III$ i F_3 la $O d = IV$, la qual és la resultant de F_0, F_1, F_2 i F_3 . La línia d'acció de $O d$ és la línia $C D$. Continuant, cercarem la resultant $O e = V$ que és la resultant de $O d = IV$ i F_4 o sigui la resultant de F_0 i les altres forces donades F_1, F_2, F_3 i F_4 . La línia d'acció de $O e$ és la línia $D E$.

Finalment, component la força $O e = V$ amb $-F_0 = a O$, obtindrem pel triangle de forces $a O e$ la resultant $a e = R$. Aquesta resultant és també la resultant de les forces donades F_1, F_2, F_3 i F_4 , que hauríem pogut obtenir directament construint el polígon $a b c d e$ de les forces donades F_1, F_2, F_3 i F_4 .

Ara ens cal determinar la línia d'acció de la resultant R ; per això observem que el punt P d'intersecció de $M N$ i $E D$, línies d'acció de $-F_0$ i de $O e$, respectivament, és un punt de la línia d'acció de la resultant, la direcció de la qual és paral·lela a $a e$. En efecte, per formar les forces $-F_0, O e$ i R el triangle $a O e$, les línies d'acció d'aquestes tres forces passen per un mateix punt. Aquest punt no és altre que el punt P d'intersecció de les línies d'acció $M N$ i $E D$ de $-F_0$ i de $O e$, respectivament. Traçant llavors per P una paral·lela a $a e$ obtindrem la línia d'acció de la resultant R , la magnitud i sentit de la qual són determinats per la línia $a e$ del polígon de forces.

Com que la intensitat de les forces auxiliars $-F_0$ i F_0 i llur línia d'acció MN poden ésser qualssevilla, és evident que hi haurà una infinitat de traçats que ens permetran de trobar la resultant d'un sistema de forces.

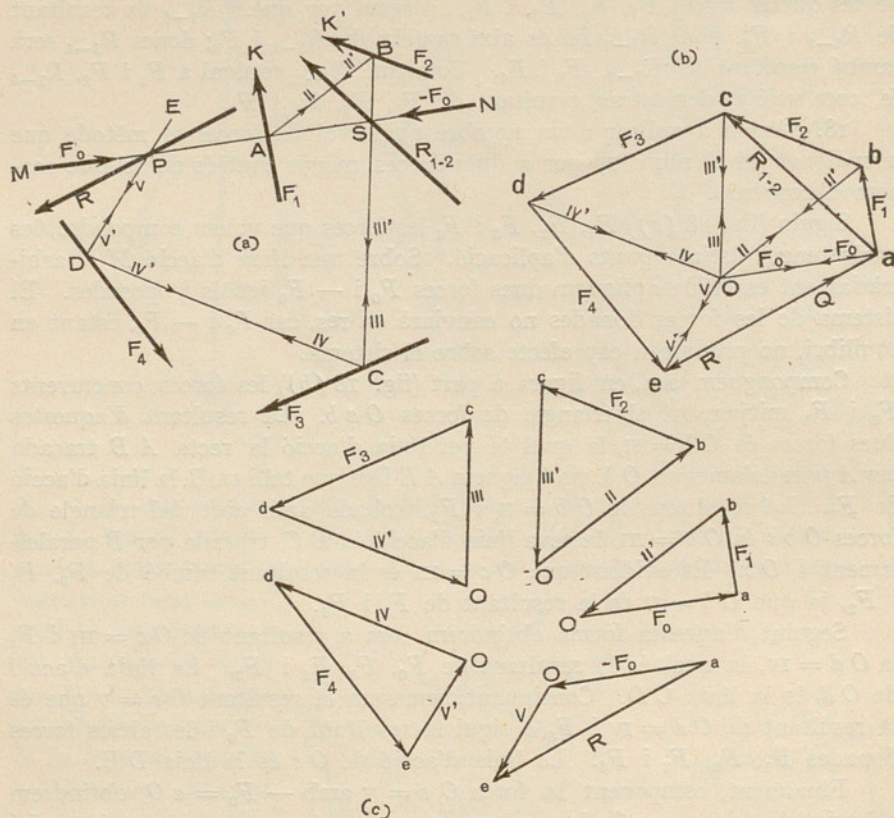


FIG. 18

19. *Definicions.* — El punt O comú a tots els triangles és el pol.

Les rectes Oa , Ob , Oc , Od i Oe que uneixen el pol amb cadascun dels vèrtexs del polígon de forces són els *radis polars* del polígon de forces.

La figura construïda pels radis polars, la resultant i les forces en polígon de forces és el *diagrama de forces*.

El polígon $MABCDE$ s'anomena *polígon funicular* de les forces donades. Els costats primer i darrer MA i DE paral·lels als radis polars que uneixen el pol amb l'origen i la fi de la resultant, s'anomenen *costats extrems* del polígon funicular.

20. *Regla.* — Per cercar la resultant d'un sistema de forces no concurrents, es traça el polígon $abcde$ de les forces donades. La línia ae , que tanca el polígon de forces, és la resultant en intensitat, direcció i sentit de les forces donades.

Des d'un punt qualsevol O com a pol es tracen els diversos radis polars Oa , Ob , Oc , Od i Oe del polígon de forces. Llavors, per un punt qualsevol M , es traça una paral·lela al radi polar Oa fins que talli la línia d'acció de la força F_1 . Pel punt d'intersecció A es traça una paral·lela al radi Ob . Pel punt B una paral·lela al radi polar Oc . Per C , CD paral·lela a Od i per D la paral·lela DE a Oe .

El punt P d'intersecció dels costats extrems MA i DE del polígon funicular és un punt de la línia d'acció de la resultant. Traçant, doncs, R paral·lela a ae , la tindrem en posició.

21. *Significança del polígon funicular.* — El polígon funicular d'un sistema de forces, que també s'anomena *polígon de les resultants auxiliars* perquè a cada costat del polígon funicular, actuen forces les intensitats de les quals vénen donades pels radis polars als quals són paral·lels, representa la forma que prendria un fil que no pesés ni s'allargués i estigués subjecte pels seus dos extrems a dos punts M i E fixos, en estar sotmès a l'acció de les forces F_1 , F_2 , F_3 i F_4 , els punts d'aplicació de les quals són els vèrtexs A , B , C i D del polígon funicular.

Observant que a cada vèrtex del polígon funicular on concorren tres forces en equilibri, correspon al diagrama de forces un triangle els costats del qual tenen el sentit de la força coneguda, deduïm que cada força donada es pot suposar que és l'equilibrant de dues forces dirigides segons els radis polars que formen amb ella el triangle de referència. Així la F_2 (figura 18 (c)) és, segons el triangle de les forces Obc , l'equilibrant de les forces $Ob = II$ i $cO = III'$, les línies d'acció de les quals són, respectivament, AB i BC . Igualment F_3 , és l'equilibrant substituïda de les components III i IV' , i F_4 la de les components IV i V' . Observem que la component II' de F_1 , és igual i de sentit oposat a la component de II de F_2 tal com s'evidencia pels vectors $Ob = II$ i $bO = II'$. De la mateixa manera la component de III' de F_2 és igual i oposada a la component III de la F_3 i la component IV' de F_3 és igual i oposada a la component IV de F_4 .

Com veiem, cada radi polar representa dues forces iguals i de sentit contrari que tenen la mateixa línia d'acció i, per tant, s'anul·len. Així, el sistema es redueix a dues forces — $F_0 = aO$ i $v = Oe$, que tenen com a línia d'acció respectiva els dos costats extrems del polígon funicular, MA i DE . Però com que d'aquestes dues forces la $v = Oe$ és la resultant de F_0 , F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , és evident que aO i v , segons el triangle Oae , tindran per resultat la $ae = R$, puix que — $F_0 + v = -F_0 + (F_0 + F_1$

+ $F_2 + F_3 + F_4$) = $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = R$, és a dir, tindran la mateixa resultant que les forces dades F_1, F_2, F_3, F_4 .

Així, podem enunciar que:

Les forces distribuïdes d'una manera qualsevol en un pla i aplicades a un sistema invariable, poden ésser sempre, sense cap excepció, reduïdes a dues forces que tinguin:

1.^a Per línia d'acció els dos costats extrems d'un dels polígons funiculars d'aquestes forces.

2.^a Com a magnitud els dos radis polars extrems. El sentit d'aquests radis és el de recórrer-lo anant de l'origen a cap a l'extrem final e del polígon de forces, passant pel pol O .

22. *Línia de tancament.* — Si dins el sistema de forces F_1, F_2, F_3, F_4 introduïm una altra força Q que les equilibri, llavors el polígon de forces $a b c d e$ es tanca en a és a dir l'origen i la fi del polígon de forces coincideixen, llavors el costat $M N$ del polígon funicular paral·lel al radi vector $O a$ que passa per l'origen del polígon de forces és anomenat *costat* i *línia de tancament* del polígon funicular.

El radi polar $O a$ representa les forces auxiliars introduïdes F_0 i $-F_0$, que, com sabem, s'equilibren també. De manera que sols subsisteix el polígon de forces $a b c d e$ amb la seva resultant R .

El radi polar $O a$ representa també la força F_0 que caldria introduir perquè el sistema estigués en equilibri i el fil representatiu del polígon funicular estigués fixat al punt E . Així mateix el radi polar $e O$ representa la força $-F_0$ que caldria per a fer que el sistema estigués en equilibri si el fil del polígon funicular estigués fixat per un punt M .

23. *Resum de les propietats dels polígons funiculars.* — De tot el que havem dit deduïm:

Que els costats del polígon funicular representen les línies d'acció de les forces components, les quals són avaluades en magnitud i en sentit pels radis polars als quals són paral·lels.

Els dos costats del polígon funicular paral·lels als radis polars que terminen als extrems d'una força representen les línies d'acció de les components d'aquesta força i tallen la seva línia d'acció en un mateix punt.

Cada costat del polígon funicular és comú a les dues forces que se succeeixen en el polígon de forces.

Cada costat del polígon funicular està comprès entre les línies d'acció de les dues forces els vectors de les quals en el polígon de les forces tallen el radi polar paral·lel al costat de què es tracta. Així, el costat $A B$ paral·lel al radi polar $b O$ està comprès entre $A K$ i $B K'$, línies d'acció de les forces F_1 i F_2 , els vectors corresponents de les quals, $a b$ i $b c$, concorren amb el radi polar $O b$ en el punt b .

A cada triangle del polígon de forces correspon a l'altra figura un vèrtex on concorren les línies d'acció de les forces que formen el triangle.

24. *Resultants parcials.* — Si allarguem dos costats qualsevol del polígon funicular, llur punt d'intersecció ens donarà un punt de la línia d'acció de la resultant de les forces compreses entre els radis polars parallels als costats donats del funicular.

Per exemple, si allarguem (fig. 18 (a)) el costat BC fins a tallar el costat MN en S , aquest punt és el punt per on passa la línia d'acció de la resultant $R_{1,2}$ de les forces F_1, F_2 , que hem traçat en el polígon de forces.

Això ens permet de trobar la resultant parcial d'un grup de forces que es succeeixen en un polígon de forces.

Quan aquest no és el cas, cal llavors traçar un nou polígon de forces de manera que les forces a compondre vagin l'una a seguit de l'altra.

Cal recordar també aquesta propietat interessant del polígon funicular.

25. *Polígons articulats.* — Suposem que els costats PA, AB, BC, CD, DE, EP (fig. 19) del polígon funicular han estat reemplaçats per barres articulades en els punts A, B, C, D, E, P i que les forces F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 i l'equilibrant Q actuen en les articulacions respectives. És evident que el sistema format per les barres estarà en equilibri, puix que cada força pot ésser substituïda per dues components, cadascuna en sentit de la barra respectiva, que formen l'articulació on actua la força. Però com ja hem dit abans, cadascuna de les components d'una força qualsevol és igual i oposada a la component d'una altra que equilibri la component anterior. Per exemple, la component de F_2 segons BC és igual i contrària a la component de F_3 que actua segons la mateixa línia. Cada barra estant, doncs, en equilibri, ho estarà també tot el sistema articulat.

És evident que les components iguals i oposades que actuen segons les mateixes barres ens indiquen les tensions a què estan sotmeses aquestes barres. De manera que podem dir que:

Quan un polígon articulat sense diagonals està en equilibri sota l'acció de forces aplicades a les seves articulacions, el polígon articulat és el polígon funicular de les forces aplicades i els radis del diagrama de les forces repre-

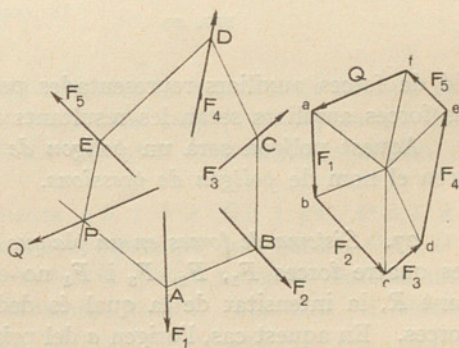


FIG. 19

senten en magnitud i direcció les tensions a què estan sotmesos els membres o costats del polígon articulat als quals són paral·lels.

El canvi de sentit de les forces aplicades F_1 , F_2 , F_3 i F_4 fa que les components d'aquestes forces que actuen en sentit dels costats o barres del polígon esdevinguin *forces de compressió*; llavors el polígon pren el nom de *polígon de pressions*.

26. *Polígon funicular de resultants successives*. — Si en lloc de prendre com a pol un punt qualsevol escollim l'origen a de la primera força del polígon de forces $a b c d e f$ (fig. 20), els polígons es simplifiquen. Es veu de seguida que la sèrie de radis polars $a b$, $a c$, $a d$, $a e$, $a f$ és la sèrie de les resultants successives de totes les forces que formen el polígon. El polígon funicular traçat amb ajut d'aquests radis, té els seus costats successius paral·lels a aquestes resultants.

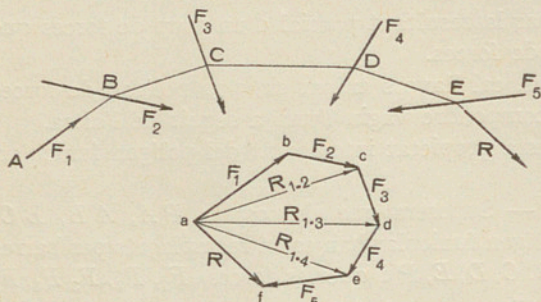


FIG. 20

Abans hem considerat els costats del polígon funicular com a línies d'acció de forces auxiliars representades pels radis del polígon de forces; aquí les forces auxiliars seran les resultants mateixes.

Aquest polígon serà un *polígon de les resultants*, que en alguns casos pren el nom de *polígon de pressions*.

27. *Sistema de forces en un pla que estan en equilibri*. — A la fig. 18 (a) les quatre forces F_1 , F_2 , F_3 i F_4 no estan en equilibri; tenen una resultant R , la intensitat de la qual és deduïda del vector $a e$ del polígon de forces. En aquest cas, l'origen a del primer vector i la fi e del darrer vector del polígon de forces no coincideixen; el vector $a e$ representa, com hem dit, en magnitud i direcció, la resultant, la línia d'acció de la qual es determina mitjançant la construcció del polígon funicular corresponent. La intersecció de les línies d'acció PA i PE corresponents als radis polars extrems $O a$ i $O e$ ens determina el punt per on passa la línia d'acció de la resultant.

Si l'origen a coincideix amb la fi e del polígon de forces, el polígon de forces es tanca; llavors el sistema de forces està en equilibri o forma un parell de forces. Això ho determina el polígon funicular corresponent.

Sigui (fig. 21 (a)) un sistema de quatre forces F_1 , F_2 , F_3 , F_4 el polígon de forces $a b c d e$ de les quals és tancat. Llavors un cop traçats els vectors $a b$, $b c$, $c d$ i $d e$ representatius de les forces, l'extrem e coincidirà amb

l'origen a . Prenem un pol O i tracem els radis polars Oa , Ob , Oc i Od , el radi Oe coincidirà amb el Oa . Per un punt qualsevol A de F_1 tracem AD i AB paral·leles respectivament a Oa i Ob . Per B , punt d'intersecció de AB amb F_2 , tracem BC paral·lela a Oc fins a trobar F_3 en C . Per C , tracem CD paral·lela a Od . Per fi tracem per D , DA paral·lela a Oe . Com que Oa coincideix amb Oe és evident que DA i AD han de coincidir o han d'ésser paral·leles.

En la fig. 21 coincideixen; això indica que les forces donades estan en equilibri. En efecte, com que els costats del polígon funicular són les línies

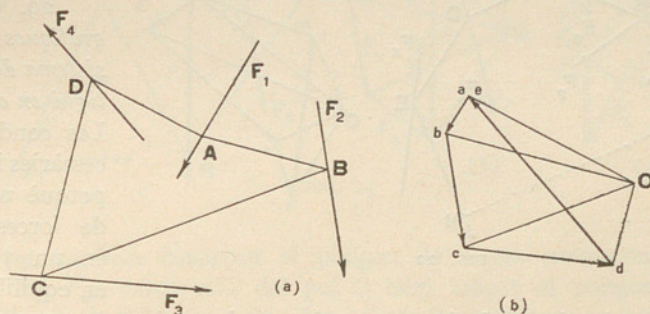


FIG. 21

d'acció de les forces components representades en magnitud i direcció pels radis polars del diagrama de les forces i cada radi polar representa dues forces iguals i de sentit oposat, totes aquestes components s'anul·len de dues en dues.

En la fig. 21 (b) les components ab i bo , Oc i co , Od i do s'equilibren mútuament. Com que les components que queden Oa i Oe , a més d'ésser iguals en magnitud i de sentit oposat, tenen la mateixa línia d'acció AD i DA s'equilibren mútuament també. Per tant, el sistema està en equilibri.

En el cas de tenir el sistema una resultant (fig. 18) en són exceptuades les dues components extremes Oa i Oe ; i com sabem, el sistema queda reduït a dues forces, les línies d'acció de les quals són respectivament MA i DE , i la resultant d'aquestes dues forces és la resultant de les forces donades.

28. *Cas en què un sistema de forces forma un parell de forces.* — En la fig. 22 representem cinc forces F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , F_5 , el polígon de forces de les quals $abcdef$ tanca, l'extrem del vector ef coincideix amb l'origen del vector ab . Com abans, completarem el diagrama de forces traçant els radis polars des d'un pol O i el polígon funicular corresponent $MABCDEN$, o com abans les forces donades poden ésser reemplaçades per dues forces

representades pels vectors Oa i $Oj = Oa$. Amb tot, en aquest cas, encara que aquestes dues components siguin iguals i de sentit oposat, no tenen la mateixa línia d'acció, sinó que actuen segons dues línies paral·leles MA i NE , és a dir el polígon funicular no es tanca.

Llavors el sistema de forces equival a un parell de forces, el moment del qual s'obté multiplicant la força auxiliar representada pel radi polar Oa per la perpendicular MN compresa entre els dos costats del polígon funicular paral·lels a aquell vector.

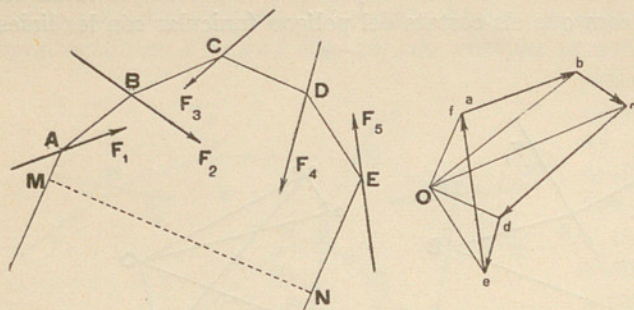


FIG. 22

29. *Condicions gràfiques perquè un sistema de forces estigui en equilibri.*— Les condicions necessàries i suficients perquè un sistema de forces situades en un pla estigui en equilibri, són:

a) *Que el polígon de forces tanqui*, car si no el vector que va des de l'origen del primer vector a la fi del darrer ens donaria la magnitud i direcció de la resultant, la qual evidentment no seria nulla.

b) *Que el polígon funicular tanqui*; és a dir, que els costats extrems del polígon funicular coincideixin, puix que, si no, serien paral·lels i les forces dades formarien un parell de forces.

Recíprocament, *si el polígon de forces d'un sistema de forces tanca i el polígon funicular tanca també, és a dir, si el darrer i primer costats del polígon funicular coincideixen, les forces estan en equilibri.*

CANVI DE L'ORDRE DE SUCCESIÓ DE LES FORCES I TRASLLAT DEL POL

30. Es comprèn que ha d'ésser indiferent l'ordre amb què es disposen les forces en el polígon; per a provar-ho bastarà fer veure que podem canviar l'ordre de dues forces qualssevol d'un polígon de forces sense que variï el resultat. A les figs. 23 (a) i (b) hem traçat els polígons de forces i el funicular corresponent al sistema de forces F_1, F_2, F_3, F_4 . A la fig. 23 (c) hem traçat amb el mateix pol els polígons de forces funicular corresponents a un altre agrupament de forces. En ambdós casos la resultant obtinguda és la mateixa en magnitud, direcció i sentit i passa pel punt d'intersecció dels dos costats extrems del polígon funicular. Els radis polars i els costats d'ambdós polígons compresos entre les ma-

teixes forces són homòlegs, i per poder-los identificar els hem designats amb les mateixes xifres.

31. També podem variar la posició del pol sense que això impliqui cap variació en la resultant del sistema.

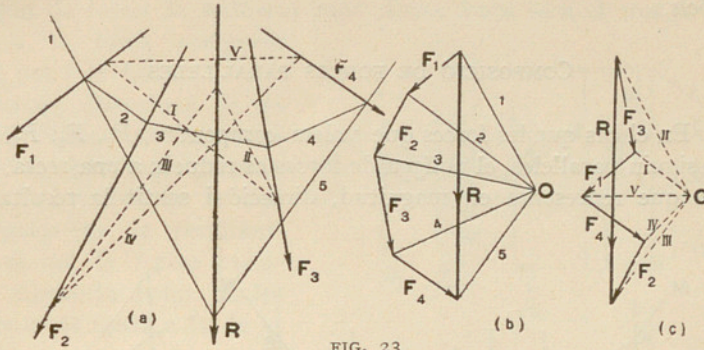


FIG. 23

A la fig. 24 hem construït el polígon de forces corresponent a tres forces F_1, F_2, F_3 ; valent-nos del pol O hem traçat el polígon funicular $A B C D E$. Amb l'altre pol O' arbitràriament escollit hem traçat l'altre polígon funicular $A' B' C' D' E'$. Suposem que el vector $O O'$ que uneix els

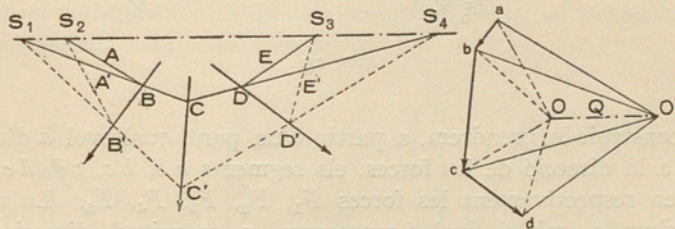


FIG. 24

pols representa una força Q . Observant el diagrama de les forces veurem que està formada per una sèrie de triangles en els quals sempre Q hi forma part com a costat. Així, doncs, la podem considerar com a resultant de les forces $O a$ i $O' a$; de les $O b$ i $O' b$; de les $O c$ i $O' c$, i de $O d$ i $O' d$. Com que Q forma triangle amb cadascun dels parells de forces esmentats, les línies d'acció corresponents a les forces de cada triangle passaran pel punt d'intersecció dels costats corresponents dels polígons funiculars. Així, les línies d'acció de $Q, O a$ i $a O'$ passen pel punt S_1 les línies d'acció de les forces $Q, O b$ i $b O'$ per S_2 , les de $Q, O c$, i $c O'$ per S_3 i les línies d'acció de $Q, O d$ i $d O'$ per S_4 . Però com que la línia d'acció de Q ha d'ésser una

recta, els punts S_1, S_2, S_3, S_4 han d'estar sobre una recta; aquesta recta és anomenada *eix polar*.

Així, podem enunciar que : *els costats homòlegs de dos polígons funiculars corresponents a un mateix sistema de forces, però de pols diferents, es tallen en punts situats en una recta anomenada eix polar, paral·lela a la que uneix els dos pols.*

COMPOSICIÓ DE FORCES PARAL·LELES

32. En el cas que les forces que volem compondre, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 , (fig. 25), siguin paral·leles, el polígon de forces es redueix a una recta, la *línia de forces*, que representa en magnitud, direcció i sentit la resultant.

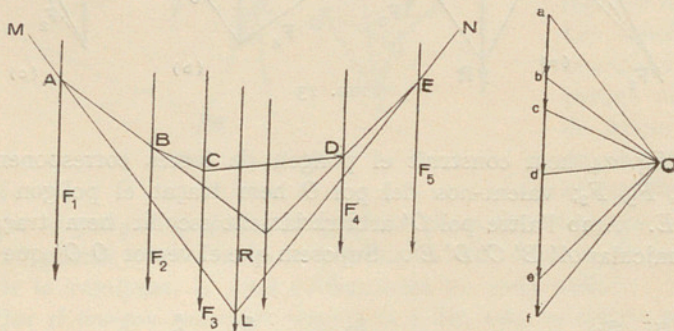


FIG. 25

Per construir-lo, prendrem, a partir d'un punt qualsevol a d'una recta paral·lela a la direcció de les forces, els segments ab, bc, cd, de, ef , que representen respectivament les forces F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 . La recta que uneix l'origen a amb el final f representa en magnitud, direcció i sentit, la resultant del sistema.

Per determinar-la en posició, prendrem un pol arbitrari O i traçarem els radis polars Oa, Ob, Oc, Od, Of , i el polígon funicular corresponent $MABCDEN$. El punt L d'intersecció dels costats extrems MA i NE ens determinarà la posició de la resultant R .

La resultant parcial de les forces F_2, F_3, F_4 és en magnitud, direcció i sentit el segment be i la seva posició quedarà determinada per la intersecció dels costats del polígon funicular paral·lels als radis polars Ob i Of que terminen en els extrems b i e de la resultant parcial.

Quan d'entre les forces paral·leles n'hi ha de sentit contrari (fig. 26), les compondrem com en el cas anterior portant-les damunt d'una mateixa recta una a continuació de l'altra, però tenint en compte el sentit de cadas-

cuna d'elles. Llavors, però, per a major claredat, és millor portar les forces sobre paral·leles a la línia de forces i projectar-les damunt d'aquesta.

33. *Distància polar.* — Designant, com sabem, per distància d'un punt a una recta el tros de perpendicular traçada pel punt a la recta, en un polígon de forces la *distància polar* d'una força serà el tros de perpendicular a la força compresa entre el pol i la força.

Quan les direccions de les forces són diverses, les distàncies polars seran, per regla general, diferents i distintes de la distància polar de la resultant.

En el cas de forces paral·leles, la distància polar de les components és igual a la de la resultant.

Més endavant veurem la importància que té aquesta distància polar en el cas de forces paral·leles.

34. *Forces paral·leles en equilibri.* — Segons sabem (núm. 29) les dues condicions perquè un sistema de forces estigui en equilibri són que llur polígon de forces es tanqui, és a dir, que la fi del polígon de forces es confongui amb el començament, i que els costats extrems del polígon funicular coincideixin en una sola i mateixa recta.

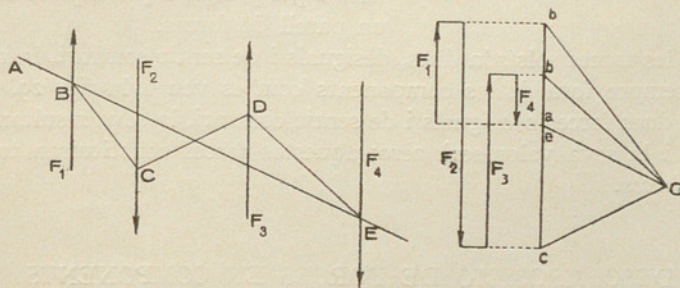


FIG. 27

A la fig. 27 el sistema de forces paral·leles F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , estan en equilibri. El polígon de forces paral·leles esdevé una recta. Portem a partir d'un punt qualsevol a , pres com origen del polígon, les forces donades una després de l'altra en magnitud i sentit. Per la construcció revenim a l'origen i l'extrem e coincideix amb l'origen a , és a dir, el polígon es tanca. Prenem un punt O qualsevol per pol i tracem els radis polars Oa , Ob , Oc , Od i Oe

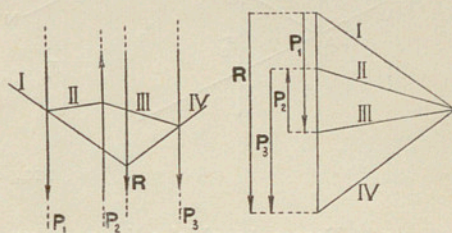


FIG. 26

coincidint amb Oa , i el polígon funicular corresponent $ABCDE$. Els dos costats extrems AE i EA del polígon funicular es confonen en una sola recta AE , segona condició perquè el sistema de forces donat estigui en equilibri.

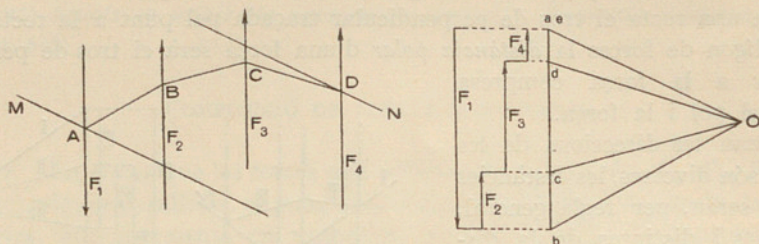


FIG. 28

35. *Forces paral·leles formant un parell de forces.* — Segons dèiem en el núm. 29, perquè un sistema de forces formi un parell de forces, cal que el polígon de les forces tanqui i que els dos costats extrems del polígon funicular siguin paral·lels.

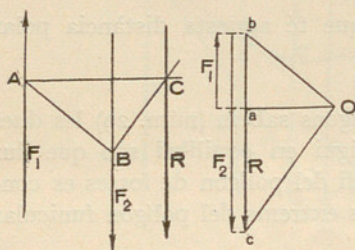


FIG. 29

A la fig. 28 el polígon de forces es tanca; els radis polars Oa i Oe traçats pel pol O es confonen, i els costats extrems del polígon funicular MA i DN no es confonen, sinó que són paral·lels.

La resultant de les forces paral·leles F_1 , F_2 , F_3 i F_4 en aquest cas forma un parell de forces.

Quan les forces sols són dues, desiguals i de sentit contrari, la resultant es troba sempre fora de les components com es veu a la fig. 29.

Si les dues forces són iguals i de sentit contrari, la seva resultant estarà a l'infinit i la seva valor serà zero; aquestes forces constituiran també un parell de forces.

DESCOMPOSICIÓ DE FORCES EN COMPONENTS

FORCES DE DIRECCIÓ QUALSEVOL

36. *Descomposició d'una força en dues components de direccions conegudes.* — Sols podrem descompondre una força en dues components de direccions donades, si aquestes direccions són concurrents amb la de la força considerada o li són paral·leles; si aquestes condicions no es complien, el problema seria impossible.

Segui (fig. 30 (a)) la força R donada en magnitud, direcció i en sentit i posició; volem determinar la magnitud de les seves components segons les direccions 1 i 2.

Per això (fig. 30 (b)) portem en ab la força R en magnitud, direcció i sentit i pels punts a i b tracem les paral·leles a les direccions 1 i 2. Aquestes paral·leles es tallen en un punt c ; cb ens dóna la magnitud de la component 2 i ac la magnitud de la component 1; això es veu immediatament en el triangle de les forces. Les components han d'ésser de sentit oposat al de la resultant R , cosa que indicarem amb fletxes.

Arribarem al mateix resultat traçant (fig. 30 (c)) per b' una paral·lela a 1 i per a' una paral·lela a 2. Aquestes paral·leles es troben en un punt c' situat a l'altre costat de R , i tindrem $a'c' = 2$ i $c'b' = 1$.

Si volguéssim determinar les dues forces que, actuant segons les direccions 1 i 2, s'equilibraran amb la força donada R , emprarem el mateix mètode, però les fletxes indicadores de les forces 1 i 2 tindran el mateix sentit que la resultant. Aquesta construcció es troba indicada a la fig. 30 (d) on totes les fletxes en el polígon de forces tenen el mateix sentit; les components $bc = 1$ i $ca = 2$ estan en equilibri amb la força R . Així mateix, 1 està en equilibri amb 2 i R , i 2 amb 1 i R .

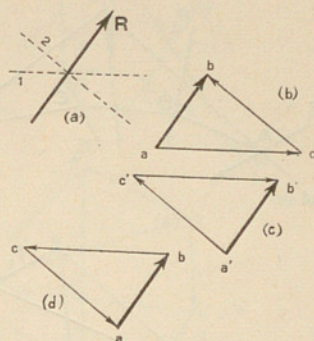


FIG. 30

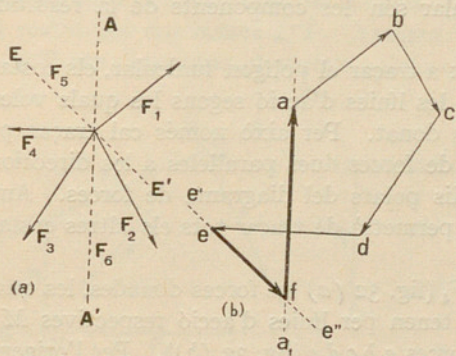


FIG. 31

En canvi, el podrem resoldre si coneixem les línies d'acció, les magnituds i sentit de totes les components, exceptuant-ne dues de les quals sols coneixem les línies d'acció. Llavors podrem determinar les magnituds i el sentit d'aquestes dues.

Suposem sis forces (fig. 31 (a)) $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$, de les quals les

37. *Descomposició d'una força en més de dues components.*
— Quan es tracta de descompondre una força que actua damunt d'un punt en més de dues components que passin pel mateix punt, les direccions de les quals són conegudes, el problema admet infinites solucions, i és, per tant, indeterminat.

quatre primeres són completament conegudes, mentre que sols coneixem les línies d'acció AA' i EE' de les altres dues. Tracem a partir d'un punt qualsevol a (fig. 31 (b)) el polígon de forces $abcde$ de les forces donades. Tracem per e una línia indefinida $e'e''$ paral·lela a EE' de la fig. 32 (a) i per a una altra aa_1 , paral·lela a AA' de la fig. 31 (a), fins que talli en f la $e'e''$. Llavors ef i fa seran les dues forces demanades; les fletxes es marcaran de manera que el polígon es pugui seguir en un sol sentit. Condició perquè les forces estiguin en equilibri.

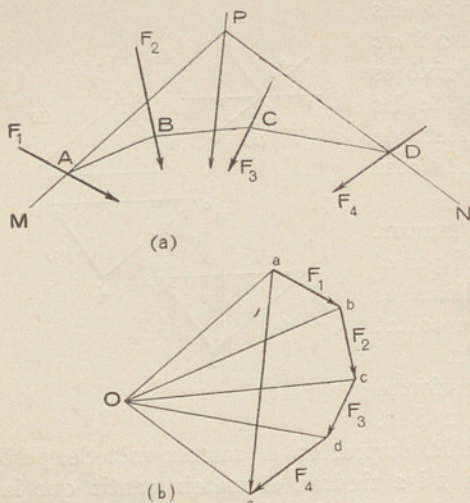


FIG. 32

costats extrems del polígon funicular són les components de la resultant d'un sistema de forces.

Llavors el problema es redueix a traçar el polígon funicular, els costats extrems del qual siguin paral·lels a les línies d'acció segons les quals volem descompondre el sistema de forces donat. Per això només cal traçar per l'origen i per l'extrem del polígon de forces dues paral·leles a les direccions donades, rectes que seran dos radis polars del diagrama de forces. Amb això coneixem el pol, cosa que ens permetrà de traçar tots els altres costats del polígon funicular.

En efecte, siguin F_1, F_2, F_3, F_4 (fig. 32 (a)) les forces donades, les quals volem descompondre en dues que tenen per línies d'acció respectives MP i NP . Tracem el polígon de les forces $abcde$ (fig. 32 (b)). Per l'origen a tracem una recta Oa paral·lela a MP i per l'extrem e una recta Oe paral·lela a PD . El punt d'intersecció O és el pol del polígon funicular $MABCDN$. Per traçar-lo, farem passar pel punt A , intersecció de MP amb la línia d'acció de F_1 , una recta AB , paral·lela al radi polar Ob ; per B , una paral·lela BC al radi Oc ; per C , una paral·lela CD al radi Od . Aquest costat CD del polígon funicular ha de passar, si el traçat és correcte, pel punt D d'intersecció de les línies d'acció de F_4 i de la component DN .

38. *Descomposició d'un sistema de forces en dues de direcció donada.* — Podríem resoldre aquest problema component les forces i descomponent la resultant segons les dues direccions proposades, traçant un triangle de forces.

Però no cal trobar la resultant, si recordem que els

Les dues components cercades resulten donades en magnitud i sentit pels radis polars aO i Oe .

Com veiem, no ha calgut, per a resoldre el problema, trobar la resultant.

39. En cas (fig. 33) que les dues forces components siguin determinades per la línia d'acció DD' d'una d'elles i pel punt P per on ha de passar la línia d'acció a l'altra, traçarem el polígon $abcd$ de les forces conegudes F_1, F_2, F_3 . Prenent com a pol un punt arbitràriament escollit O , traçarem els radis polars Oa, Ob, Oc, Od . Pel punt d traçarem una recta indefinida ee paral·lela a la línia d'acció coneguda DD' . Construïrem el polígon funicular $MABCDN$ de les forces donades fent que el primer costat MA passi pel punt donat P i sigui paral·lel al radi polar Oa . Pel punt A , on talla la línia d'acció de la primera força F_1 , traçarem AB paral·lel a Ob , i així seguint. El darrer costat del funicular CD de la darrera força coneguda talla la línia d'acció de la desconeguda F_4 en D . Unint P i D tindrem el costat que ens manca DP . Traçant pel pol O el radi polar Oe paral·lel a DP ens determina el vèrtex e del polígon de forces, que unit amb a ens

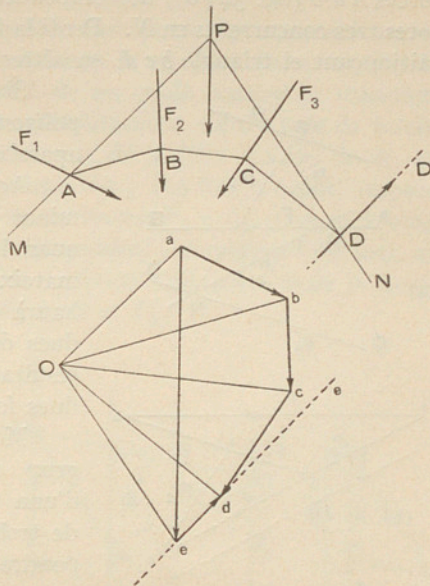


FIG. 33

dóna el vector ea representatiu de la força que passa per P , mentre que de és la força que té per línia d'acció DD' . La línia d'acció de ea és la recta P , paral·lela a ea traçada pel punt P .

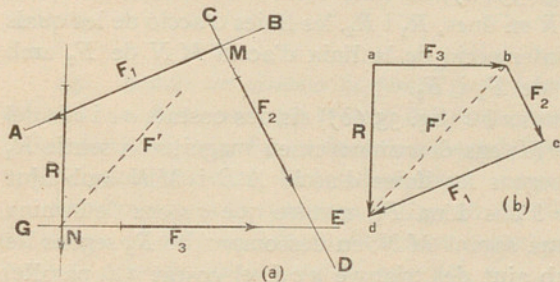


FIG. 34

ció coneguda. — Sigui (fig. 34 (a)) R la força que volem descompondre en les altres tres no concurrents F_1, F_2 i F_3 , les línies d'acció de les quals coneixem. Per a resoldre aquest problema emprarem el mètode de *Culmann*. Per això unirem el punt M d'intersecció de dues línies d'acció donades, per

40. *Descomposició d'una força en altres tres no concurrents, de direcció coneguda.*

exemple les AB i CD , amb el punt N d'intersecció de les línies d'acció de EG i R . La recta MN d'unió d'aquests dos punts pot ésser considerada com a línia d'acció d'una força component F' i amb ajut d'un triangle de forces adb (fig. 34 (b)) descompondre la R en les dues components F' i F_3 , totes tres concurrents en N . Per fi la força F' que passa per M es descompon, mitjançant el triangle bcd , en altres F_1 i F_2 , concurrents amb F' en M .

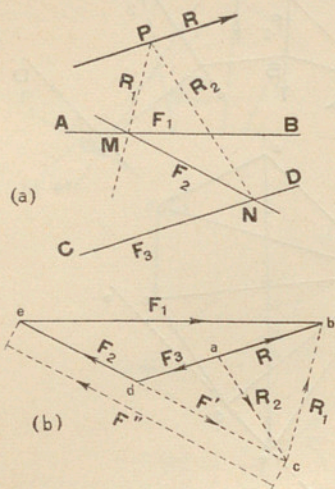


FIG. 35

Si les forces F_1 , F_2 , F_3 i R s'equilibren, el polígon de forces $abcd$ es tanca i la força R apareixerà com a equilibrant de les altres tres.

Aquest traçat és impossible o indeterminat en dos casos. El primer es presenta quan les tres forces són concurrents en un mateix punt; en aquest cas llur resultant haurà de passar-hi també. El segon, quan dues de les forces dades es tallen damunt la resultant; llavors aquesta es descompon en dues forces úniques, la tercera esdevé nul·la.

Moltes vegades ens caldrà equilibrar un grup de forces per tres d'altres dirigides d'una manera qualsevol. Ens seria factible de trobar la resultant del grup i de descompondre-la com havem dit.

41. D'aquest procediment de descomposició d'una força en tres d'altres no concurrents, no ens en podem servir en el cas que dues de les línies d'acció siguin paral·leles o que llur punt d'intersecció caigui fora dels límits del paper.

Llavors ens valdrem (fig. 35 (a)) de dues forces auxiliars resultat de descompondre la força dada R en dues, R_1 i R_2 , les línies d'acció de les quals passin pels punts M i N d'intersecció de la línia d'acció MN de F_2 amb les línies d'acció AB i CD de F_1 i F_3 .

Tracem el triangle de forces abc (fig. 35 (b)) els dos costats ac i cb , del qual són paral·lels a PN i PM ; ens determinaran en magnitud i sentit R_1 i R_2 . Descomponguem R_1 segons les línies d'acció AB i MN amb ajut del triangle bce ; el costat eb ens dóna F_1 , mentre que ce ens determina la component de F_2 , que actua segons MN ; en descompondre R_2 segons les línies d'acció MN i CD amb ajut del triangle acd , el costat ad , paral·lel a CD , ens determina F_3 , mentre que dc , paral·lel a MN , ens dóna la component F' que actua segons la línia d'acció MN .

La resultant de les dues forces F' i F'' , que actuen segons la línia d'acció MN , ens determina la intensitat de la tercera força F_2 que ens mancava.

La descomposició de forces és molt emprada en el càlcul de sistemes reticulats.

FORCES PARAL·LELES

42. *Descomposició d'una força en altres dues que li siguin paral·leles.* — Quan (fig. 36) es vol descompondre una força R en dues altres de paral·leles F_1 i F_2 , les línies d'acció i el sentit de les quals coneixem, traçarem amb la força $R = a b$ i un pol O escollit arbitràriament, un triangle de forces $a b O$. Després, per un punt B pres damunt de la línia d'acció de R , es tracen paral·leles $B A$ i $B C$ als radis polars $O a$ i $O b$ fins a tallar, respectivament en A i C , les línies d'acció de les forces F_1 i F_2 . La recta que uneix els punts A i C forma la línia de tancament del polígon funicular, al qual ha d'ésser paral·lel el radi polar $O c$. Aquest radi polar talla la força $R = a b$ en un punt c tal que $a c = F_1$ i $c b = F_2$.

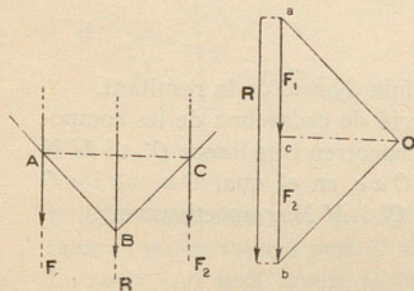


FIG. 36

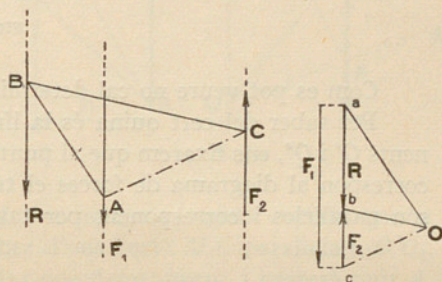


FIG. 37

La fig. 37 representa el cas que les línies d'acció de les components caiguin a un mateix costat de la resultant; llavors els sentits de les components són oposats.

43. *Reduir un sistema de forces paral·leles a dues de paral·leles a les donades.* — Suposem que volem descompondre (fig. 38 (a)) el sistema de forces donat F_1, F_2, F_3 , en dues de conegudes per les seves línies d'acció $M P$ i $N S$, paral·leles a les forces donades.

Determinarem la resultant R (fig. 38 (b)) del sistema traçant el polígon de forces $a b c d$ i el polígon funicular corresponent I, II, III, IV, prenent el punt O arbitràriament escollit, per pol.

Ara el problema es redueix a descompondre la resultant R en dues Q' i Q'' emprant el mètode indicat al núm. 38. Però en comptes de traçar dues rectes qualssevilla, podem utilitzar, per tal d'abreujar, els costats extrems I i IV del polígon funicular que, com sabem, es tallen en un punt E de la resultant R . Llavors, unint el punt M d'intersecció del costat I amb la línia d'acció de Q' amb el punt N intersecció del costat IV amb la línia d'acció

de Q'' , obtindrem la línia de tancament del polígon funicular corresponent als sistemes $Q' Q''$ i F_1, F_2, F_3 .

Traçant per O un radi polar Oe paral·lel a MN determinarem les dues forces Q' i Q'' que cercàvem.

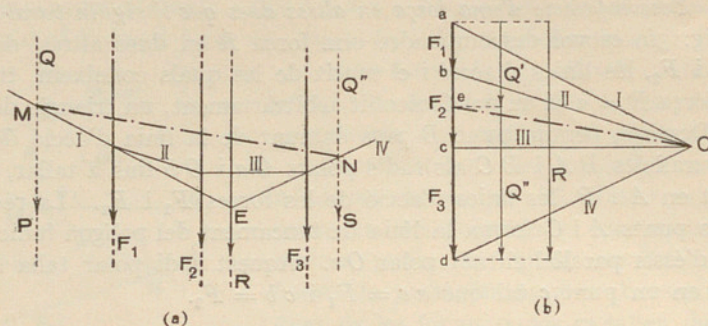


FIG. 38

Com es pot veure no cal determinar la línia d'acció de la resultant.

Per saber del cert quina és la línia d'acció de cadascuna de les components Q' i Q'' , ens fixarem que al punt M on concorren tres forces Q' , Q'' i MN correspon al diagrama de forces el triangle Oae , en el qual Oa , ae i ea són paral·leles i corresponen, per tant, a Q' , Q'' i MN , respectivament.

APLICACIONS DE LES PROPIETATS DELS POLÍGONS FUNICULARS

44. *Fer passar per dos punts donats el polígon funicular d'una o més forces.* — De vegades, per a resoldre certs problemes, cal fer passar per dos punts donats el polígon funicular d'una o més forces.

Cas d'una força única. — Si es tracta d'una força única F (fig. 39), prendrem com a eix polar dels polígons funiculars, la recta AB que uneix els dos punts A i B pels quals ha de passar el polígon funicular. Com sabem, si els costats homòlegs dels polígons funiculars es troben en el mateix punt d'una recta (eix polar) els pols d'aquests polígons funiculars estaran damunt d'una recta paral·lela a l'eix polar. Llavors si des dels punts A i B tracem rectes $A\alpha$ i αB que es tallin en un mateix punt α , aquestes rectes seran els costats del polígon funicular que passa pels dos punts donats A i B . Com que les rectes $A\alpha$ i αB són rectes qualssevol, es dedueix que hi ha una infinitat de polígons funiculars de la força F que passa pels dos punts A i B .

El pol d'aquest polígon funicular es determina traçant pels extrems a i b de la força F els radis polars Oa i Ob paral·lels als costats 1 i 2 del polígon funicular.

Si ultra la força única F (fig. 40) ens fixessin la distància polar h , llavors traçaríem, amb ajut d'un pol qualsevol O situat a la distància polar h de la força F , un polígon funicular de prova MBC , el primer costat MB del qual passés per un dels punts donats M ; el segon costat CB és quasi segur que no passaria per l'altre punt N . Però és de notar que si desplaçem el pol O al llarg d'una paral·lela OO_1 a F_1 distant d'ella una longitud h , formarem un sistema de

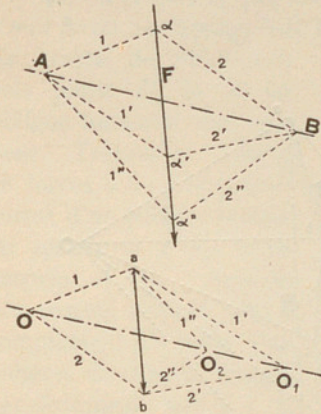


FIG. 39

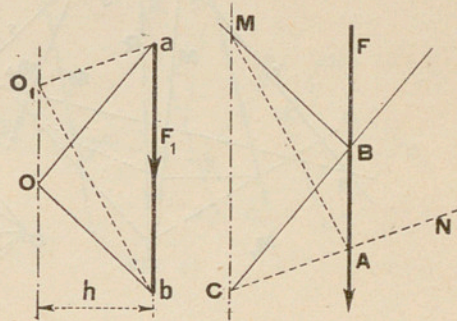


FIG. 40.

polígons funiculars que, passant per M , tindran uns segons costats que es tallaran en un mateix punt C situat sobre d'una recta MC paral·lela a OO_1 . La recta CN serà, doncs, el segon costat que demanàvem, i bastarà unir A , punt d'intersecció de NC amb la força F , amb M , per a tenir el primer costat O_1b del polígon funicular.

El pol O_1 , que ni cal determinar aquesta vegada, és el pol del polígon funicular MAN .

45. *Cas d'un grup de forces.* — En el cas d'un grup de forces (fig. 39), els dos costats 1 i 2 del polígon funicular poden ésser considerats com a costats extrems del polígon funicular de les forces considerades. El pol del polígon funicular d'aquestes forces és determinat per les paral·leles a aquests dos costats extrems traçades per l'extrem de la força F , considerada com a resultant de les forces dades. Com és natural, aquest pol ens permetrà de traçar els altres costats del polígon funicular que passa pels dos punts.

Quan es tracta d'un grup de forces poden ocórrer dos casos: *a*) que els dos punts donats estiguin fora del grup de forces (fig. 41), i *b*) que un dels punts o tots dos estiguin entre les diferents forces del grup (fig. 42).

Tant en el primer cas com en el segon determinarem d'antuvi la resultant de les forces compreses entre els dos punts donats, mitjançant un polígon de forces i el funicular corresponent $abcde$ prenent com a pol un punt qualsevol O .

En el cas de la fig. 41, la resultant serà la de tot el grup de forces, mentre que en el de la fig. 42 la resultant serà la parcial de les forces compreses entre els punts donats. Determinarem en ambdós casos en posició aquesta resultant valent-nos del pol O . Damunt de la línia d'acció de la

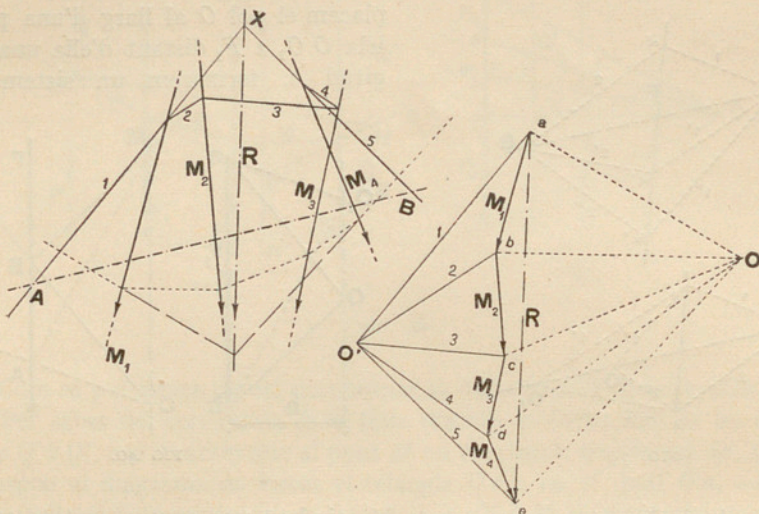


FIG. 41

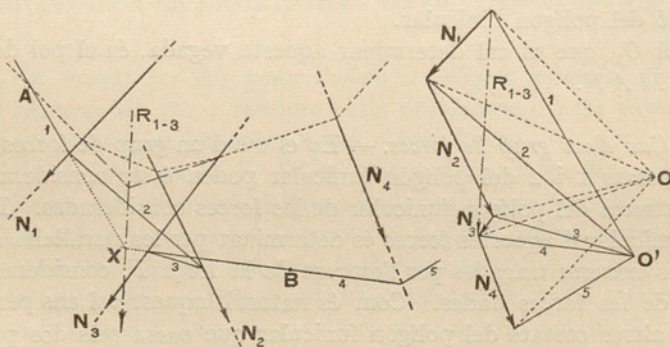


FIG. 42

resultant R prendrem un punt qualsevol X , que unirem amb els dos punts donats A i B . Aquestes dues rectes $A X$ i $B X$ seran els dos costats extrems del polígon funicular que passa pels dos punts A i B . Anem a determinar el pol. Per això traçarem pels extrems de les resultants R i $R_{1,3}$ dels dia-

grames de forces, els radis polars 1 i 5 en la fig. 41 i 1 i 4 en la fig. 42, paral·lels a les rectes AX i BX . El punt d'intersecció O' serà el pol demanat.

Per a completar el polígon funicular només caldrà traçar els altres radis polars 2, 3, 4 i els costats del polígon funicular corresponent.

46. Fer passar per tres punts donats el funicular corresponent a una o més forces. — Siguin dues forces (fig. 43) paral·leles o no paral·leles F_1 i F_2 .

Es tracta de fer passar pels punts P, Q, R un polígon funicular corresponent. Tracem el polígon de forces abc i el primer costat d'un polígon funicular qualsevol PA_1 , unim després A_1Q . Aquests dos costats tindran com a complement els radis d'un polígon de forces traçats paral·lelament per a i b ,

cosa que ens dona el pol O_1 . El tercer costat del polígon funicular traçat amb l'ajut d'aquest pol probablement no passarà per R .

Observem que, quan haurem fet variar la posició dels costats PA_1 i A_1Q , sempre hauran de continuar passant per P i Q . Aquests punts seran,

doncs, els punts d'intersecció dels costats de mateix rang dels polígons funiculars consecutius que es poden traçar amb pols diferents, a condició que la línia que passa per aquests pols sigui paral·lela a PQ . El nou pol cercat estarà sobre aquesta paral·lela O_1O_3 .

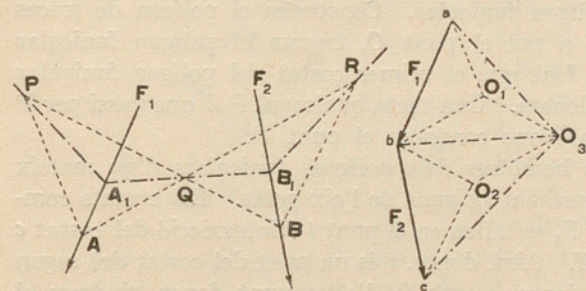


FIG. 44

Es podria, així mateix, procedir començant per R , traçant RB_1 i B_1Q , després les seves paral·leles bO_2 i cO_2 . Els pols possibles dels funiculars que passen per R i Q estaran sobre la línia O_2O_3 paral·lela a QR . D'això es desprèn que el pol cercat serà O_3 , intersecció de O_1O_3 i O_2O_3 i PA_2QB_2R serà el polígon funicular demanat.

Aquest procediment serveix per a resoldre el cas d'ésser les forces paral·leles.

47. Aquest traçat encara es pot simplificar (fig. 44). En comptes de

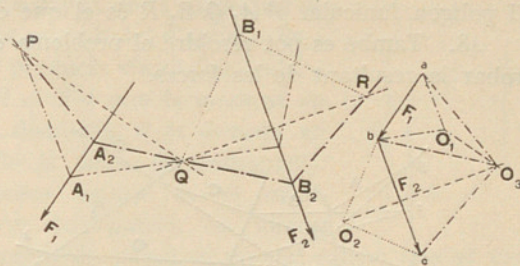


FIG. 43

traçar arbitràriament els primers costats dels funiculars, traçarem primer la recta PQ fins que trobi en B la força F_2 , després la recta BR , les quals, mitjançant les respectives paral·leles O_2b i O_2c en el diagrama de forces, ens donen el pol O_2 . Així mateix, O_1b i O_1a , respectivament paral·leles a la recta RQ prolongada fins a tallar en A la força F_1 i a la recta AP , ens determinen en el diagrama de forces l'altre pol O_1 . Aquests pols hauran de desplaçar-se, el primer segons la paral·lela a AR , el segon seguint la paral·lela a PQ , les quals es tallen en O_3 , que és el pol cercat. El polígon funicular PA_1QB_1R és el que demanàvem.

48. També es pot resoldre el problema del núm. 45 sense necessitat de trobar la resultant de les forces.

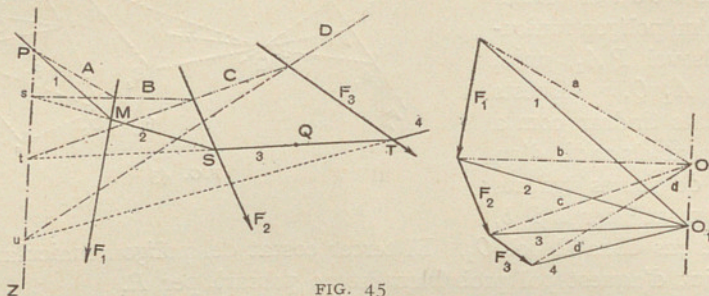


FIG. 45

Siguin (fig. 45) F_1, F_2, F_3 les forces donades i P i Q els dos punts per on ha de passar el polígon funicular. Construïm el polígon de forces F_1, F_2, F_3 i, prenent com a pol el punt O , tracem el polígon funicular $ABCD$ d'aquestes forces, fent que el primer costat del polígon funicular passi per P , un dels punts donats. Una recta qualsevol PZ que passi per P és un dels molts eixos polars que contenen el punt P .

Sabem que els costats homòlegs dels polígons funiculars d'un mateix grup de forces es tallen en un mateix punt de l'eix polar. Els costats compresos entre les forces F_2 i F_3 es tallen en el punt t d'intersecció del costat c allargat amb l'eix polar PZ . Així, doncs, t és un punt del costat del segon polígon funicular. Unint, doncs, t amb Q , l'altre punt donat, tindrem el costat del segon funicular homòleg al C . El punt s , intersecció del costat B amb l'eix polar, unit amb el punt S , intersecció del costat 3 amb la força F_2 , ens donarà el costat 2, i finalment, unint u , punt d'intersecció del costat D amb l'eix polar, amb el punt T d'intersecció del costat 3 amb la força F_3 tindrem el costat 4. El punt M d'intersecció del costat 2 amb la força F_1 , unit amb el punt P , ens determinarà el costat 1 del segon polígon funicular.

Els dos costats extrems 1 i 4 del segon polígon funicular ens determinen el nou pol O_1 . La recta OO_1 que uneix els dos pols ha de resultar paral·lela a PZ .

DETERMINACIÓ GRÀFICA DE MOMENTS

49. *Moments d'una força.* — Dues forces paral·leles (fig. 46) d'igual magnitud i de sentits oposats, aplicades a distints punts d'un cos, formen un *parell de forces*; el seu efecte depèn de la magnitud de les forces i de la distància de les seves línies d'acció. És a dir, el seu efecte s'avalua pel producte d'ambdues valors, designat per *moment estàtic*; $M = F \cdot d$ que és mesurat en centímetres-quilograms, si la distància d és donada en centímetres, i la intensitat de la força en quilograms.

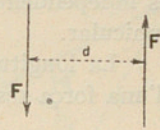


FIG. 46

De manera que el moment estàtic és el mitjà auxiliar per a avaluar l'efecte dels parells de forces.

Independentment del concepte de parell de forces, sabem que el moment d'una força respecte d'un punt donat és el producte d'aquesta força per la seva distància al punt considerat, és a dir, per la perpendicular abaixada del punt a la direcció de la força. La distància entre el punt i la força és designat per *braç de palanca*.

Els moments poden ésser positius o negatius, segons que les forces facin girar el braç de palanca en el mateix sentit que les busques del rellotge o en l'oposat.

50. L'avaluació d'un moment és cosa fàcil en estàtica gràfica. Representem en $AB = F$ la direcció i la magnitud d'una força qualsevol (fig. 47), el moment de la

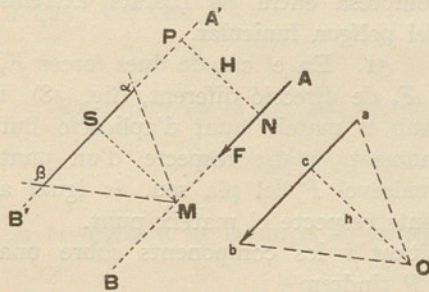


FIG. 47

qual respecte del punt P volem cercar. Tracem el vector $ab = F$, prenem un pol O i menem els radis Oa i Ob , així com la perpendicular $Oc = h$ a ab . Per un punt qualsevol M de AB tracem els dos costats αM i $M\beta$ del polígon funicular, respectivament paral·lels als radis Oa i Ob , i pel punt P una recta $A'B'$ paral·lela a AB que tallarà en α i en β els costats αM i $M\beta$, respectivament. Abaixem des de M la perpendicular MS a $\alpha\beta$.

Si designem per M el moment de la força donada podem establir

$$M = F \cdot PN = ab \cdot MS = ab \cdot H \quad (\text{I})$$

Per ésser semblants els triangles $M \alpha \beta$ i $O a b$ tindrem:

$$\frac{a b}{O c} = \frac{\alpha \beta}{H}, \text{ d'on } a b \cdot H = O c \cdot \alpha \beta.$$

Igualant aquesta darrera equació a la (1) podrem posar

$$M = O c \cdot \alpha \beta = h \cdot \alpha \beta \quad (2)$$

És evident que mentre no variï la posició del pol O , la distància $\alpha \beta$ és independent de la posició del punt M , per on hem fet passar el polígon funicular.

La longitud $\alpha \beta$ depèn de la posició del pol, però com que el moment d'una força respecte d'un punt només pot tenir una sola valor, deduïm per la fórmula (2), que el producte $O c \cdot \alpha \beta$ ha d'ésser constant.

El moment estàtic $F \cdot H$ de la força F respecte del punt P es representa pel producte $h \cdot \alpha \beta$, essent h la *distància polar* i $\alpha \beta$ la longitud del tros de paral·lela a F que passa per P , compresa entre els costats extrems del polígon funicular.

51. En el cas de dues forces F_1 i F_2 de direcció diferent, (fig. 48), i amb el mateix punt d'aplicació, llur moment estàtic respecte d'un punt qualsevol P del pla seu, és igual a

la suma dels moments de les components respecte el mateix punt.

En efecte, si projectem la resultant i les components sobre una recta $N M$ perpendicular a la recta $O P$ tindrem

$$N M = N T + T M = N T + N S.$$

ja que $T M = N S$ per ésser projeccions de dues rectes iguals i paral·leles. L'anterior igualtat permet escriure

$$N M \cdot O P = N T \cdot O P + N S \cdot O P,$$

i tenint en compte que

$$\begin{aligned} N M \cdot O P &= \text{àrea } O P R = R \cdot r \\ N T \cdot O P &= \text{àrea } O P F_1 = F_1 \cdot r_1 \\ N S \cdot O P &= \text{àrea } O P F_2 = F_2 \cdot r_2, \end{aligned}$$

resulta

$$R \cdot r = F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2;$$

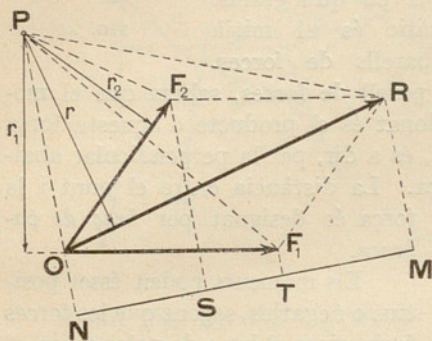


FIG. 48

però com que a cada un dels termes d'aquesta igualtat representa el moment de la força respectiva respecte del punt P , podrem escriure

$$M_R = M_1 + M_2$$

Aquest procediment pot ésser aplicat a un nombre qualsevol de forces. Així, doncs, *el moment estàtic de la resultant d'un sistema de forces, respecte d'un punt del seu pla, és igual a la suma dels moments de les seves components respecte del mateix punt.*

En prendre els moments de les forces d'un sistema cal tenir en compte el signe del moment de cada una de les forces.

Així, en la fig. 49 (a) els moments de les components són positius, puix que les forces fan girar els braços de palanca respectius com les busques del rellotge. Per tant,

$$M = F \cdot H = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2.$$

En canvi, en la fig. 49 (b), el moment de la resultant és

$$M = F \cdot H = F_1 \cdot y_1 - F_2 \cdot y_2,$$

on el moment de la força F_2 és negatiu, puix que el seu braç de palanca gira en un sentit contrari al de les busques del rellotge.

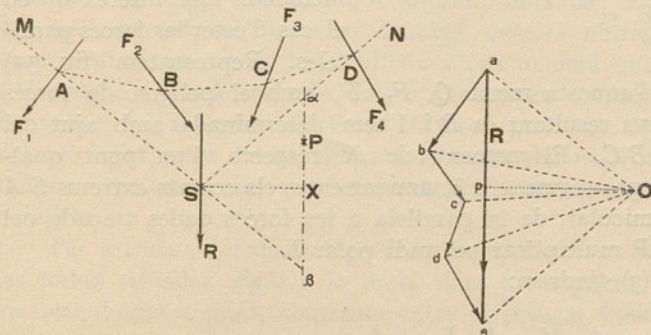


FIG. 50

Formem, per a aquest grup, un polígon de forces; la seva resultant serà en magnitud i direcció R (fig. 50). Escollim per pol un punt qualsevol O i

52. *Moment d'un grup de forces.* — D'això deduïm un procediment molt còmode per a cercar el moment respecte d'un punt P d'un grup de forces F_1, F_2, F_3, F_4 .

construïm el polígon funicular $M A B C D N$. El punt d'intersecció dels costats extrems $M A$ i $D N$ serà un punt de la resultant R que serà paral·lela a $a e$. El moment de les forces F_1, F_2, F_3, F_4 és el mateix que el de R . Tracem pel punt P , $\alpha \beta$ paral·lela a R . El segment $\alpha \beta = y$ multiplicat per la distància polar $O p = h$ serà igual al moment cercat. En efecte, el triangle $O a e$ és semblant al triangle $\alpha \beta S$, i tindrem:

$$M = \alpha \beta \cdot O p = S X \cdot R, \quad (3)$$

essent $S X$ la perpendicular des de S a $\alpha \beta$ que és igual a la traçada des del punt donat P a R .

El segment $\alpha \beta$ mesura, doncs, aquí com en la fig. 47 a una escala convenientment escollida, el moment de R respecte de P .

Així, doncs, el moment estàtic d'un sistema de forces d'un pla respecte d'un punt d'aquest pla, és igual al producte de la distància polar de la seva resultant pel segment determinat damunt de la recta paral·lela a la resultant traçada pel centre de moments, comprès entre els costats extrems del polígon funicular.

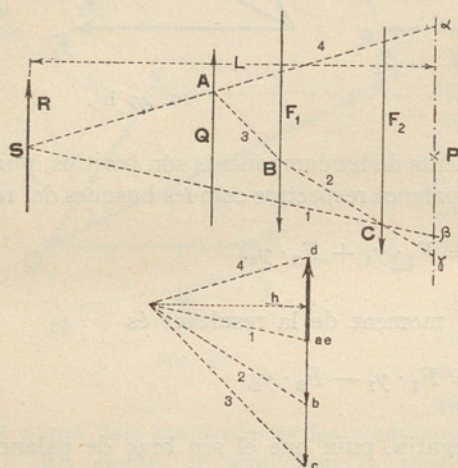


FIG. 51

un grup de forces d'aquesta mena Q, F_1, F_2 amb el polígon de forces corresponent. La seva resultant és R i l'hem determinada amb ajut del polígon funicular $A B C$. El moment de R respecte d'un punt qualsevol P , és avaluat pel segment $\alpha \beta$, amidat entre els costats extrems $S A$ i $S C$ del polígon funicular, de la paral·lela a les forces dades traçada pel centre de moments P multiplicat pel radi polar h .

Per la fórmula (3) tindrem:

$$M = R \cdot L = \alpha \beta \cdot h.$$

Si, per exemple, volem determinar únicament el moment d'una sola força F_2 respecte del punt P , s'allarguen els costats 1 i 2 del polígon fu-

nicular que la comprenen, fins a tallar la paral·lela a aquesta pel punt γ ; si el segment que determinen damunt d'ella és $\beta\gamma = y_3$ tindrem com abans

$$M_3 = y_3 \cdot h.$$

Per tant, el moment estàtic d'una força pertanyent a un sistema de forces paral·leles, respecte d'un punt del seu pla, és el producte de la distància polar, h , pel segment $\beta\gamma$ que els costats del polígon funicular que comprenen la força donada determinen sobre la paral·lela a ella traçada pel centre de moments.

54. *Superfície de moments.* — Aquest agrupament de forces es troba molt sovint en l'estudi de bigues reposant damunt dos punts de sosteniment. La fig. 52 representa una biga sotmesa a les càrregues F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 .

Les dues reaccions, també verticals, es troben en Q_1 i Q_2 i es determinen tal com hem explicat en el núm. 42, traçant el polígon de forces $abcdef$ i el polígon funicular corresponent, la línia de tancament AB i el radi Om determinen en el polígon de forces les

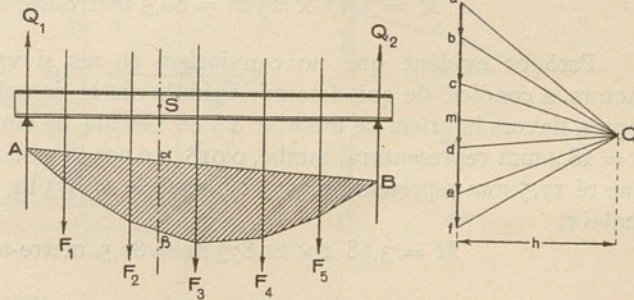


FIG. 52

reaccions Q_1 i Q_2 . Es veu que aquesta línia de tancament és un dels costats extrems del funicular parcial, que és obtingut considerant solament una part de la biga tallada d'una manera qualsevol. Si la tallem pel punt S i considerem les forces que actuen a l'esquerra d'aquest punt, la valor del moment respecte d'aquest punt és $\alpha\beta \cdot h$. Si considerem el mateix grup de forces situat a la dreta del mateix punt, arribarem al mateix resultat, cosa que era d'esperar, puix que les forces estan en equilibri.

Per a cada punt de la biga obtindrem, doncs, la valor del moment de les forces situades, sigui a la dreta sigui a l'esquerra, pel tros d'ordenada vertical d'aquest punt, compresa entre el polígon funicular i la seva línia de tancament.

La superfície delimitada d'aquesta manera és designada per *superfície dels moments* de la biga sota l'acció de les càrregues considerades. Com és natural varia amb les càrregues.

55. *Escala de moments.* — Cal parar molt d'esment en la tria de les escales quan s'empren traçats gràfics per a avaluar els moments de les forces. Com que les línies el mateix poden representar forces que longituds, cal saber a quina escala cal llegir els resultats.

Suposem que prenem com a escala de longituds $\frac{1}{1250} = 0,0008$ m per metre, i que representem les forces a l'escala de 5 mm per tona o $0,005$ m = 1^t, llavors podrem representar la força F (fig. 47) de 4,6 tones per exemple, per 23 mm. El moment d'aquesta força per a un braç de 17'5 m, serà

$$M = 4,6 \text{ t} \times 17,5 \text{ m} = 80,5 \text{ metre-tones}$$

Prenem com a distància polar $h = 18,4$ mm, que equival a $18,4 : 0,0008 = 23$ m; el segment $\alpha \beta$ que amida 17,5 mm, equival a $17,5 : 0,005 = 3,5$ tones el moment és el mateix

$$M = 3,5 \text{ t} \times 23 \text{ m} = 80,5 \text{ metre-tones.}$$

Però és evident que no canviaríem en res si variéssim l'ordre dels factors, a condició de què determinéssim la distància polar h a l'escala de les forces, llavors hauríem de mesurar $\alpha \beta$ en l'escala de longituds. La longitud $h = 18,4$ mm representarà, també, $0,0184 : 0,005 = 3,68$ tones; el segment $\alpha \beta$ que té 17,5 mm representa $0,0175 : 0,0008 = 21,875$ m, però el resultat és el mateix:

$$M = 3,68 \text{ t} \times 21,875 \text{ m} = 80,5 \text{ metre-tones.}$$

Podrem prendre, doncs, indiferentment en l'escala de forces o de longituds les línies a mesurar, a condició que les dues longituds que s'han de multiplicar siguin preses sobre escales diferents.

En els diagrames que la distància polar h és constant, i en totes les altres en què sigui igual, i s'emprin les mateixes escales, podrem establir una escala per a mesurar directament la valor dels moments.

En efecte, en el diagrama cada centímetre representa 2 t multiplicades per la distància polar, 15 m, és a dir $2 \text{ t} \times 15 \text{ m} = 30 \text{ mt}$, per tant, podrem traçar una escala de moments on cada metre-tons serà representada per $\frac{1}{30}$ de centímetre o 0,333 cm.

Aquesta escala està representada a la fig. 53 on es troben encarades les divisions en centímetres i en metre-tons.

Si demanéssim, per exemple, el moment de F respecte al punt P , només haurem de traçar $\alpha \beta$ paral·lela a F i a mesurar aquest segment damunt l'escala: el trobem igual a 285 mm equivalent a $2,85 \times 30 = 85,5$ metre-tons.

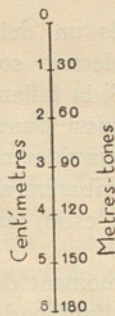


FIG. 53

CENTRES DE GRAVETAT

56. Una de les aplicacions més freqüents de la composició de forces paral·leles és la determinació dels centres de gravetat. Per a determinar aquest punt d'una superfície qualsevol, se suposa a l'efecte, que cada un dels seus elements té un pes propi, proporcional a la seva superfície. Es divideix, doncs, la superfície considerada en un cert nombre de porcions, l'àrea de les quals, així com el seu centre de gravetat respectiu, siguin fàcils de determinar.

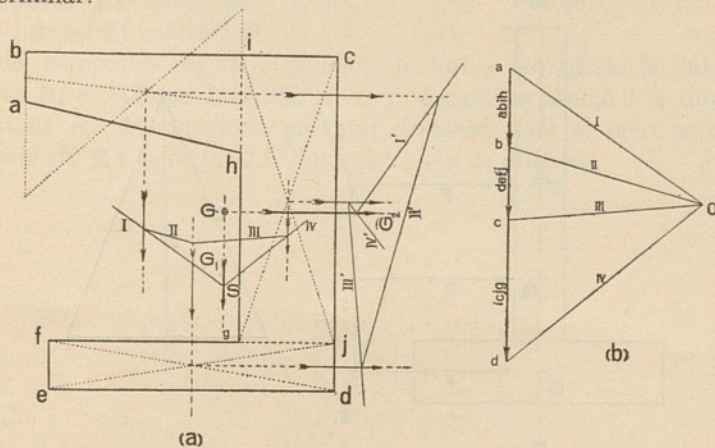


FIG. 54

Suposarem aplicada a cada un d'aquests punts una força paral·lela a una mateixa direcció qualsevol i avaluada per la seva superfície, i component-les gràficament obtindrem la posició de llur resultant. Repetint el traçat per a una altra direcció qualsevol, obtindrem una segona posició de la resultant; el centre de gravetat es trobarà en la intersecció de les línies d'acció de les resultants.

La fig. 54 representa la secció d'un ferro especial que suposem no simètric respecte de cap eix, per a considerar el cas més general. El descompondrem en tres parts, l'àrea de les quals són, respectivament:

$$a b i h = \frac{2 + 1}{2} \times 4,5 = 6,75 \text{ cm}^2$$

$$i c j g = 6 \times 2 = 12,00 \text{ cm}^2$$

$$f j d e = 6 \times 1 = 6,00 \text{ cm}^2$$

Traçarem un primer polígon de forces (fig. 54 b) la intensitat de les quals serà proporcional a les àrees donades i té per punt d'aplicació el centre de gravetat respectiu a cada porció. Amb un punt O com a pol tracem el polígon funicular I, II, III, IV, els dos costats extrems del qual, I i IV, es detallen en S , per on passa la primera resultant G_1 paral·lela a les forces donades. Podríem repetir la mateixa operació amb altra direcció de les forces i trobaríem una segona resultant G_2 . La intersecció de G_1 i G_2 ens determina el centre de gravetat G cercat.

Aquesta operació es pot simplificar traçant un sol polígon de forces, però suposant traçat el segon al qual s'ha donat un gir de 90° respecte al

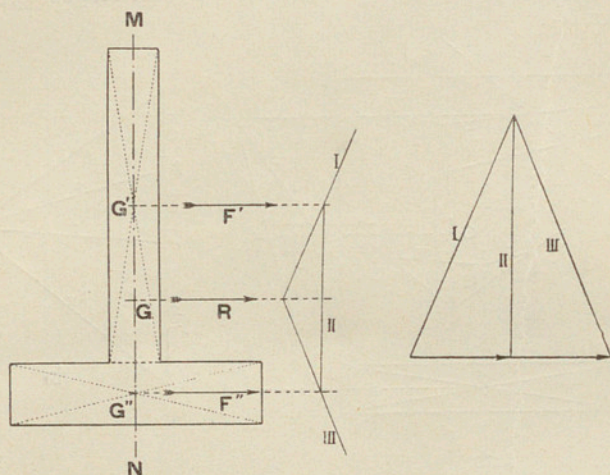


FIG. 55

primer. Llavors les línies homòlogues dels polígons de forces i funicular primers són perpendiculars a les dels polígons de forces i funicular traçats després.

Amb l'ajut d'un escaire de 90° podrem, doncs, traçar d'antuvi les dues sèries de forces en angle recte, després els funiculars corresponents, traçant cada cop una paral·lela i una perpendicular a cada un dels radis polars de O . D'aquesta manera s'obté ràpidament, i amb molta més precisió que escollint dues direccions arbitràries, el centre de gravetat.

Quan la superfície presenta un eix de simetria MN , només cal traçar un sol polígon de forces. L'escollirem amb preferència de manera que les seves forces siguin perpendiculars a l'eix de simetria (fig. 55).

Es pot emprar el mateix procediment per a determinar el centre de gravetat d'una línia trencada. Aplicarem a cada element linial una força proporcional a la seva longitud i operarem d'una manera semblant a l'explicada.

57. *Centre de gravetat d'una superfície que té una porció buida.* — En aquest cas (fig. 56), per a aplicar els mètodes explicats fins ara, cal que ens fixem que la superfície proposada és la diferència entre l'àrea del cercle que té per centre el punt C i l'àrea del cercle de centre C' .

Considerant les àrees com a forces, en els punts C i C' , centres de gravetat dels respectius cercles, podrem aplicar les forces paral·leles i de sentit contrari F

i F' que, compostes segons el polígon de forces obtindrem la valor de la resultant R ; el polígon funicular 1, 2, 3, donarà la posició i la direcció de la resultant R . El centre de gravetat demanat G és el punt on es tallen la direcció de R i la recta CC' , que és un eix de simetria.

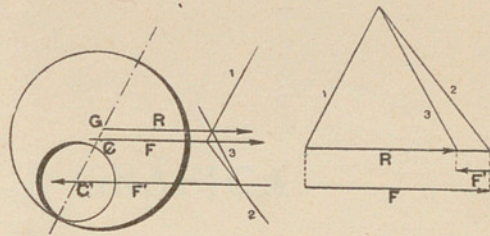


FIG. 56



Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.

ESTÀTICA GRÀFICA

PROBLEMES

1. Representar quatre forces de 6, 3, 4,5 i 8,75 kg, respectivament, a una escala d'1 cm = 2 kg.

2. Un pilar de 3 m d'alçada (fig. 1) suporta a la part superior una càrrega P , de 10 tones i pesa 250 kg per metre d'alçada. ¿Quina és la pressió total sobre la base?

3. Trobar gràficament l'equilibrant de les forces

$$F_1 = 4 \text{ kg}, F_2 = 3 \text{ kg}, F_3 = 1 \text{ kg}, F_4 = 5 \text{ kg}$$

situades sobre la mateixa línia d'acció, i de les quals són positives F_1 i F_4 i negatives F_2 i F_3 .

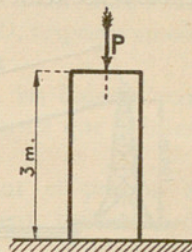


FIG. 1

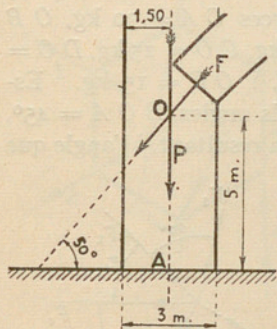


FIG. 2

4. En la lluita esportiva d'estirar la corda l'equip A es compon de 8 homes, la força dels quals és de 35, 70, 40, 55, 30, 60, 65 i 80 kg, i l'equip B de 8 homes amb forces de 90, 45, 50, 60, 75, 35, 25 i 40 kg. ¿Quin equip guanyarà?

Resoldre el problema gràficament amb l'escala de forces 1 cm = 50 kg.

5. Trobar gràficament la resultant de dues forces de 40 kg i 90 kg, aplicades a un punt: a) quan llurs direccions formin un angle de 45° , b) quan en formin un de 90° , c) quan l'angle sigui de 135° , d) quan sigui de 180° , e) de 225° , i f) de 0° .

6. L'empenta $F = 15$ tones d'un arc (fig. 2) forma un angle de 50° amb l'horitzontal, talla en un punt O a 5 m del sòl, la línia d'acció del pes del mur, $P = 80$ tones. Trobar llur resultant i la distància en metres, entre el punt on aquesta resultant troba la base del mur i el peu A del pes del mur.

7. En un triangle, quin és el sentit de la resultant respecte del de les components? I el de l'equilibrant? ¿Quina és la resultant de tres forces, els costats del triangle de forces de les quals poden ésser recorreguts en un mateix sentit?

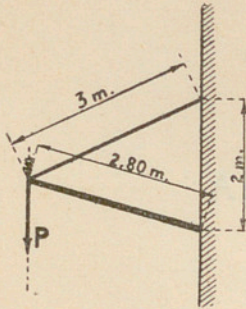


FIG. 3

8. A l'extrem lliure d'una barra de 2,80 m de longitud (fig. 3) empotrada a la paret pengem un pes P de 50 kg sustentat per un filferro de 3 metres de longitud fixat a la paret 2 m més amunt de la barra. Trobar les tensions del filferro i de la barra.

9. Trobar la força que equilibra les dues forces $F = 5$ kg i $F' = 8,5$ quilograms (fig. 4) que fan entre elles un angle de 60° , i les resultants de F i R i de F' i R , respectivament.



FIG. 4

10. La cabina d'un transbordador aeri (fig. 5) pesa 2000 kg plena de passatgers i 1200 kg buida. Calcular en ambdós casos les dues tensions del cable sense tenir en compte el seu pes. Escala de forces: 1 cm = 400 kg. Escala de longituds 1 cm = 20 m.

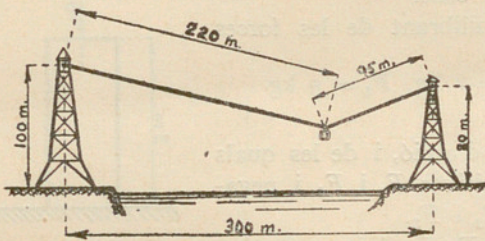


FIG. 5

11. Compondre les quatre forces dibuixades en la figura 6: a) mitjançant paral·lelograms de força, b) pel polígon de forces.

12. Compondre (fig. 7) les forces $OA = 30$ kg, $OB = 50$ kg, $CO = 15$ kg, $DO = 80$ kg, i $OE = 15$ kg. Essent els angles $BOA = 45^\circ$, $COA = 90^\circ$, $DOA = 135^\circ$, $EOA = 270^\circ$. Trobar la resultant, i l'angle que seva direcció forma amb la de la força OA .

13. Es demana la força equilibrant de

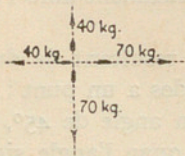


FIG. 6

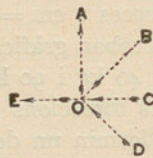


FIG. 7

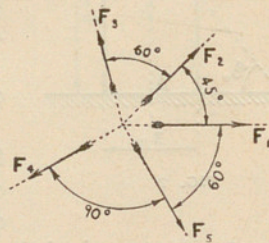


FIG. 8

les següents forces concurrents: $F_1 = 4,5$ tones, $F_2 = 3$ tones, $F_3 = 5,5$ tones, $F_4 = 6,75$ tones, $F_5 = 2$ tones. Els angles que fan unes forces amb altres són indicades a la fig. 8.

14. Quantes coses pot representar la recta que uneix l'origen amb l'extrem d'un polígon de forces?

15. Tenim quatre forces concurrents que s'equilibrin. Suprimim una de les forces. Quina és la resultant de les tres que queden?

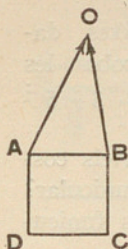


FIG. 9

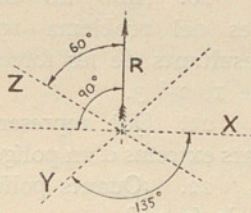


FIG. 10

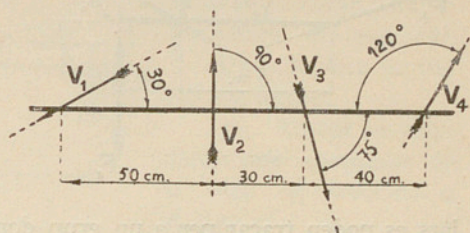


FIG. 11

16. En els vèrtexs A i B d'un quadrat de 3 cm de costat (fig. 9) hem aplicat les forces A o B , la intensitat de les quals ve expressada per una longitud de 5 cm la A o per una de 4,5 cm la B . Trobar dues forces concurrents que equilibrin les donades, passin per C i per D , respectivament.

Escala de forces : 1 cm = 25 kg.

17. Trobar (fig. 10) les equilibrants de $R = 50$ kg, les línies d'acció de les quals són X , Y i Z , de forma que la intensitat de X sigui la meitat de R .

18. Compondre, mitjançant el polígon de forces i el funicular corresponent, les forces de

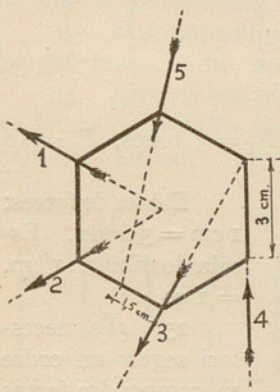


FIG. 12

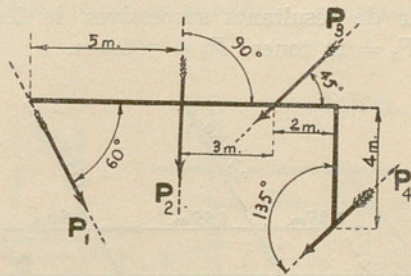


FIG. 13

la fig. 11, les intensitats de les quals són : $V_1 = 400$ gr, $V_2 = 125$ gr, $V_3 = 750$ gr, $V_4 = 675$ gr. La posició relativa ve donada pels angles i les distàncies de la figura.

Escala de forces : 1 cm = 250 gr. Escala del dibuix : 1 cm = 10 cm.

19. Tenim (fig. 12) un hexàgon regular de 3 cm. de costat. Les forces

1, 2, 3, 4 i 5 situades com indica el dibuix, tenen una intensitat igual per totes de 20 kg. Trobar la força equilibrant del sistema.

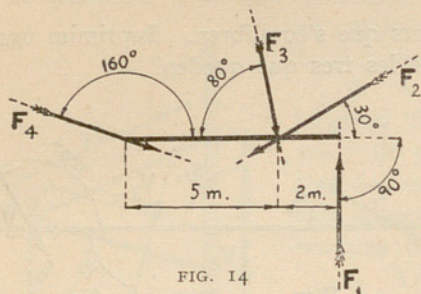


FIG. 14

Escala de forces : 1 cm. = 10 kg.

20. Amb les mateixes dades del problema 19 trobar les resultants de les forces 2, 3 i 5 i de 1, 2 i 3.

21. Què representen els costats extrems d'un polígon funicular?

22. ¿Quants polígons funiculars es poden traçar per a un grup donat de forces?

23. Dibuixeu un polígon de pressions de les forces següents : $P_1 =$

15 kg, $P_2 = 20$ kg, $P_3 = 25$ kg, $P_4 = 30$ kg, situades sobre els costats de l'angle recte representat a la fig. 13.

Escala de forces: 1 cm = 10 kg. Escala de distàncies: 1 cm = 1 m.

24. Construir (fig. 14) el polígon funicular de resultants successives de les forces $F_1 = 3$ tones, $F_2 = 10$ tones, $F_3 = 12$ tones, $F_4 = 5$ tones.

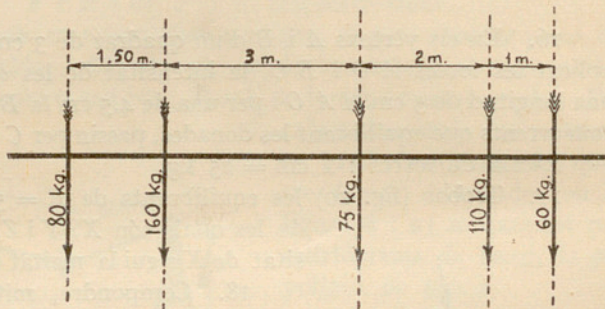


FIG. 15

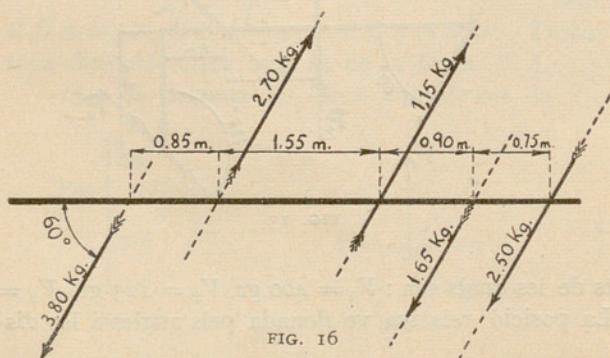


FIG. 16

Escala de forces: 1 cm = 3 tones. Escala de dibuix: 1 cm. = 1 m.

25. ¿És necessari seguir un ordre en compondre forces mitjançant el polígon funicular?

26. ¿Quins són el primer i darrer radi polar d'un polígon de forces tancat?

27. Trobar la resultant de les forces paral·leles representades a la fig. 15. Escala de forces : 1 cm = 100 kg. Escala de distàncies : 1 cm = 1 m.

28. Trobar l'equilibrant de les forces paral·leles indicades a la fig. 16. Indiqueu la valor de la distància polar.
Escala de forces i de distàncies a escollir.

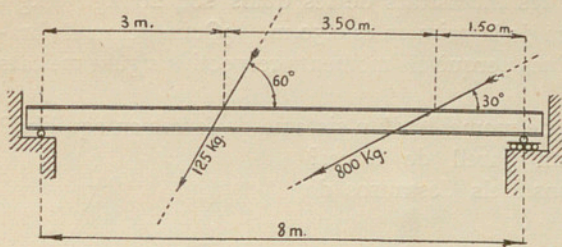


FIG. 17

29. Citeu les condicions gràfiques perquè un sistema de forces paral·leles estigui en equilibri.
Quan formen un parell de forces?

30. Trobar les reaccions dels descansos de la biga representada a la fig. 17.

31. Determinar la intensitat de dues forces paral·leles aplicades als extrems de la barra indicada en la fig. 18, per tal que la reacció al punt de sustentació sigui de 5 kg.

32. Buscar la valor de les reaccions dels descansos de la biga de la figura 19. Totes les forces tenen la mateixa intensitat de 250 kg i estan igualment espaciades.

33. Què és i per què serveix la línia de tancament?

34. Descompondre la força R en tres que tinguin per línies d'acció les que indica la fig. 20.

35. ¿Quines són les condicions gràfiques necessàries perquè un sistema de forces qualsevulla tingui resultant, estigui en equilibri o equivalgui a un parell de forces?

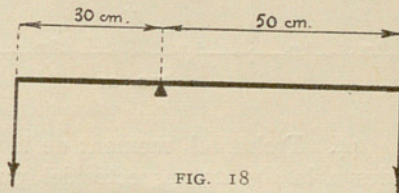


FIG. 18

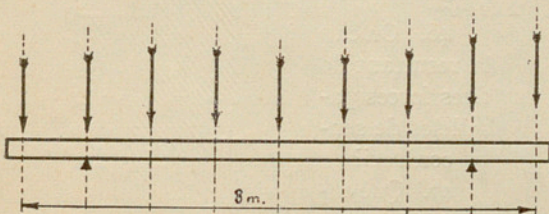


FIG. 19

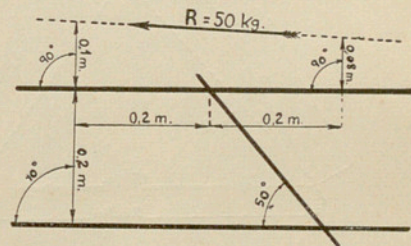


FIG. 20

36. Construïu un sistema de 4 forces en equilibri.

37. Per un dels procediments esmentats en el text, traçar el polígon funicular de 5 forces paral·leles, que passi per dos punts donats. Dues de les forces són de sentit contrari a les altres.

38. Construir el polígon funicular de 4 forces paral·leles del mateix sentit, que passa per tres punts fixats.

39. Què són moments de les forces? En quines unitats es mesuren?

40. Tenim tres forces, les intensitats de les quals són 20 kg, 5 kg i 35 kg. El braç de la palanca de la primera és 0,50 m. ¿Quins seran els braços de palanca de les altres dues perquè els moments respectius siguin meitats dels d'aquella força?

41. Quant val la suma de moments d'un sistema de forces en equilibri?

42. Com s'equilibra un parell de forces?

43. Trobar les reaccions dels descansos de la biga de la fig. 21.

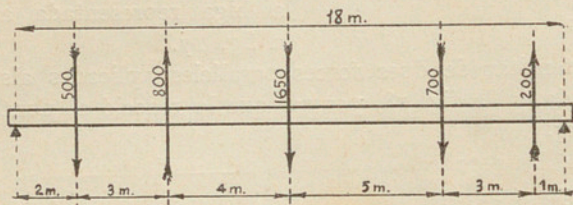


FIG. 21

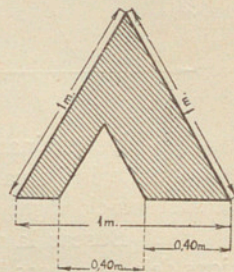


FIG. 23

44. Trobar el moment de la resultant de les quatre forces representades a la fig. 22 respecte del punt O .

45. Es donen 6 forces paral·leles d'igual sentit, de 50 kg d'intensitat cadascuna i a distàncies de 2 cm. Cercar la valor del moment de la resultant respecte un punt de la línia d'acció de la quarta força.

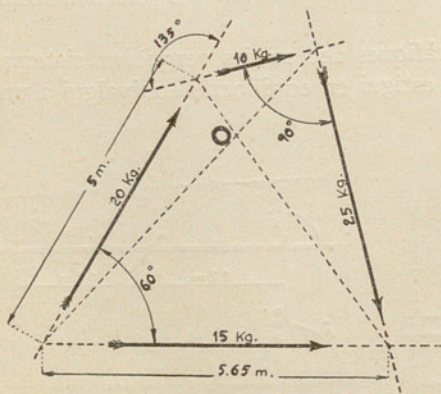


FIG. 22

46. On cau la resultant de dues forces paral·leles de sentit contrari?

47. Què entenem per centre de gravetat d'un cos?

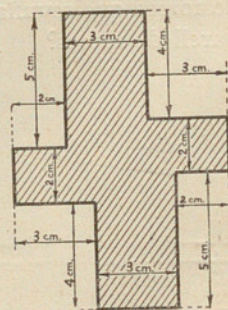


FIG. 24

48. Trobar el centre de gravetat del perímetre d'un exàgon regular.

49. Trobar el centre de gravetat de l'àrea de la fig. 23.

Escala de 1 : 2.

50. Centre de gravetat de la secció dibuixada en la fig. 24.

8°

~~R. 290~~

RF-5-21

E·E·T