

Mancomunitat de Catalunya

EXTENSIO
D'ENSENYAMENT
T E C N I C



E·E·T

TEXT N.º 2

ARITMETICA

PART II

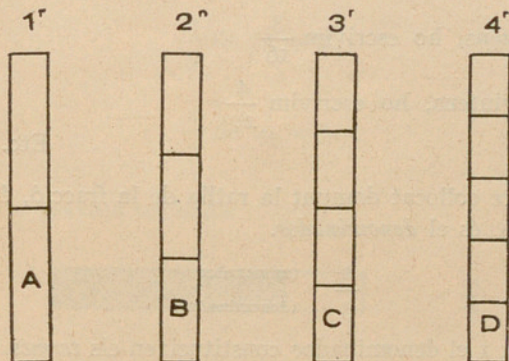
Carrer d'Urgell 187 Barcelona

ARITMÈTICA

SEGONA PART

FRACCIONS O TRENCATS

1. Per comprendre què són fraccions o nombres trencats observeu les figures següents i la seva representació numèrica. Si cada una d'elles representa la unitat,



A, representa la meitat, que escrivim $\frac{1}{2}$

B, representa la tercera part, que escrivim $\frac{1}{3}$

C, representa la quarta part, que escrivim $\frac{1}{4}$

D, representa la quinta part, $\frac{1}{5}$



R. 7.699

La sisena part o un sisè, és escrit $\frac{1}{6}$

La setena part o un setè, és escrit $\frac{1}{7}$

La vuitena part o un vuitè, és escrit $\frac{1}{8}$

La novena part o un novè, és escrit $\frac{1}{9}$

La desena part o un desè, és escrit $\frac{1}{10}$

Dues meitats, ho escrivim $\frac{2}{2}$

Dues terceres parts, ho escrivim $\frac{2}{3}$

Tres quartes parts o tres quarts, ho escrivim $\frac{3}{4}$

Cinc vuitens, ho escrivim $\frac{5}{8}$

Sis onzens, ho escrivim $\frac{6}{11}$

Tres setzens, ho escrivim $\frac{3}{16}$

Quatre vintens, ho escrivim $\frac{4}{20}$

Etc., etc.*

2. El nombre col·locat damunt la ratlla de la fracció, és el *numerador*; el col·locat dessor, és el *denominador*.

$$\frac{2}{3} \quad \begin{array}{l} \text{(numerador)} \\ \text{(denominador)} \end{array}$$

El numerador i el denominador constitueixen els *termes* de la fracció.

* Així la nomenclatura dels trencats, serà:

El *numerador* és enunciat com el nombre que el representa i el *denominador*:

quan és un 2, meitat	quan és un 8, vuitè
quan és un 3, terç	quan és un 9, novè
quan és un 4, quart	quan és un 10, desè
quan és un 5, quint o cinquè	quan és un 11, onzè
quan és un 6, sisè	quan és un 12, dotzè
quan és un 7, setè	quan és un 50, cinquantè

I així sempre, el nombre seguit de la terminació: "è", fins:

quan és el 100, centèsima	quan és el 200, doscentès
quan és el 101, centunè	quan és el 1000, mil·lèsima
quan és el 105, centcinquè	quan és el 10000, deumil·lèsima
	quan és el 100000, milionèsima

Quan el denominador té diverses xifres significatives, la lectura es fa d'altra manera, així,

$\frac{21}{3275}$ és llegit: vint-i-un, tres mil dos cents setanta cincens, i també vint-i-un partit per tres mil dos cents setanta cinc, car un trencat no és altra cosa que una divisió indicada.

3. El *denominador* indica les parts en què és dividida la unitat; així: $\frac{3}{4}$ vol dir que la unitat és dividida en quatre parts,

El *numerador* indica les parts que té la fracció. $\frac{3}{4}$ vol dir que d'aquestes quartes parts, la fracció en té 3.

El trencat $\frac{4}{5}$ vol dir que la unitat ha estat dividida en cinc parts, de les quals en prenem quatre.

Els trencats representen una part o parts de la unitat, però cal tenir en compte que aquesta unitat pot tenir diferents valors i que podem considerar $\frac{3}{4}$ d'un nombre qualsevol, com 12 per exemple.

$\frac{3}{4}$ de 12 és igual a 12 partit en quatre parts que valen cada una 3 i de les quals en prenem 3.

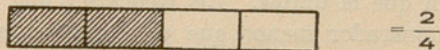
$$\frac{3}{4} \text{ de } 12 = 9$$

De la mateixa manera podríem veure que

$$\frac{4}{5} \text{ de } 25 = 20$$

$$\frac{2}{7} \text{ de } 21 = 6$$

Observant els gravats següents

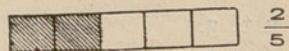
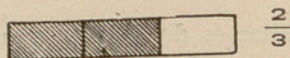


resulta evident que $\frac{3}{4}$ és major que $\frac{2}{4}$; de la mateixa manera podríem mostrar que $\frac{4}{9}$ és major que $\frac{2}{9}$; que $\frac{9}{11}$ és major que $\frac{4}{11}$, etc.

Podem, doncs, establir la primera propietat dels trencats:

DE DOS O MÉS TRENCATS QUE TENEN EL MATEIX DENOMINADOR, ÉS MAJOR EL QUE TÉ MAJOR NUMERADOR.

4. Observant els gravats següents



resulta evident que $\frac{2}{3}$ és major que $\frac{2}{5}$.

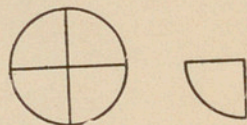
De la mateixa manera podríem mostrar que $\frac{3}{8}$ és major que $\frac{3}{12}$; que $\frac{5}{8}$ és major que $\frac{5}{18}$, etc.

La segona propietat dels trencats, podem formular-la així:

DE DOS O MÉS TRENCATS QUE TENEN EL MATEIX NUMERADOR, ÉS MAJOR EL QUE TÉ MENOR DENOMINADOR.

5. Fins ara havem vist trencats que tenen el numerador menor que el denominador. Però també podem expressar en forma de trencats quantitats com la que indica el gravat:

Aquí tenim la unitat dividida en quatre parts, i demés una quarta part. Tot plegat fan cinc quartes parts que escriurem $\frac{5}{4}$.



De la mateixa manera es dóna el cas de trencats com aquests:

$$\frac{6}{4}, \frac{9}{5}, \frac{20}{8}, \text{ etc.}$$

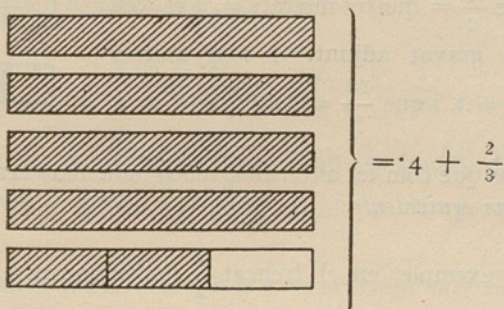
ELS TRENCATS SÓN ANOMENATS TAMBÉ FRACCIÓNS. Per *fracció* entenem una part més petita que la unitat. Els trencats d'una valor menor que la unitat, tenen el numerador menor que el denominador i són anomenats trencats *propis*.

Exemple: $\frac{5}{9}, \frac{3}{5}$

Els trencats de valor superior a la unitat tenen el numerador major que el denominador i són anomenats trencats *impropis*.

Exemple: $\frac{5}{4}, \frac{9}{5}$

6. Sovint cal expressar quantitats que són compostes de part entera i part fraccionària, com la indicada en el dibuix adjunt:



En aquest cas, entre el nombre que representa la part entera i el trencat que representa la part fraccionària, interposem el signe + o - segons calgui sumar o restar la fracció.

Exemples: $4 + \frac{2}{3}$, que és llegit, quatre i dos terços, $5 - \frac{1}{3}$, que és llegit, cinc menys un terç.

Aquests nombres compostos d'enters i trencats són anomenats *nombres mixtos*.

7. Podem interpretar els trencats com fins ara, és a dir com una unitat dividida en parts de les quals en prenem una o algunes, o bé d'una altra manera.

Quan diem $\frac{1}{4}$ volem dir 1 dividit per 4; $\frac{3}{4}$ voldrà també dir 3 dividit per 4; $\frac{5}{8}$ voldrà dir 5 dividit per 8. Així, doncs:

$$\frac{1}{4} = 1 : 4$$

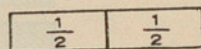
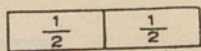
$$\frac{3}{4} = 3 : 4$$

$$\frac{5}{8} = 5 : 8$$

Podem formular això dient que UNA FRACCIÓ O TRENCAT ÉS UNA DIVISIÓ INDICADA.

8. El resultat de dividir el numerador pel denominador ens dona la *valor* del trencat.

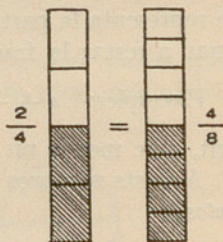
La valor de $\frac{4}{2} =$ quatre meitats $= 2$ es veu clarament en el gravat adjunt. I així mateix veuríem que $\frac{8}{4} = 2$, i que $\frac{10}{5} = 2$, etc.



Les fraccions que com les anteriors, tenen una mateixa valor, són anomenades *fraccions equivalents*.

9. Si, per exemple, en el trencat $\frac{2}{4}$ multipliquem el numerador i el denominador per 2, obtindrem un trencat equivalent, és a dir, de la mateixa valor:

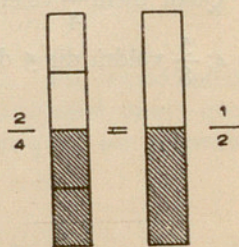
$$\frac{2}{4} = \frac{2 \times 2}{4 \times 2} = \frac{4}{8}$$



L'equivalència de $\frac{2}{4}$ i $\frac{4}{8}$ queda ben expressada en el gravat adjunt.

Si dividim els termes del trencat $\frac{2}{4}$ per 2 també obtindrem un trencat equivalent.

$$\frac{2}{4} = \frac{2 : 2}{4 : 2} = \frac{1}{2}$$



L'equivalència de $\frac{2}{4}$ i de $\frac{1}{2}$ queda clarament expressada en el gravat.

10. En certs problemes apareixen TRENCATS EN ELS QUALS ELS TERMES ES COMPONEN D'OPERACIONS INDICADES.

Exemple:
$$\frac{2 \times 4 \times 10}{4 \times 5 \times 20}$$

En aquests casos *podem simplificar els trencats bo i suprimint del numerador i denominador els factors comuns*. En el trencat de l'exemple podríem suprimir el factor 4 d'ambdós termes i demés dividir el 10 del numerador i el 20 del denominador per 10.

$$\frac{2 \times 4 \times 10}{4 \times 5 \times 20} = \frac{2}{5 \times 2} = \frac{2}{10}$$

i després dividir per 2 ambdós termes d'aquesta fracció, i obtindrem finalment $\frac{1}{5}$ com a valor del trencat proposat.

11. *Un trencat queda reduït a la seva expressió més simple, quan el numerador i denominador són primers entre ells.*

El trencat $\frac{15}{20}$ pot ésser reduït a un altre d'igual valor dividint ambdós termes per 5, factor comú, convertint-se en $\frac{3}{4}$, que és la seva més simple expressió perquè el 3 i el 4 són primers entre ells.

12. *Molt sovint convé reduir un trencat impropï a nombre mixt, la qual cosa obtenim dividint el numerador pel denominador*. Si la divisió no és exacta, la part entera del nombre mixt resultant és el quocient, i la fracció té per denominador el del trencat impropï i per numerador el residu de la divisió.

Exemple: $\frac{17}{7} = 2 + \frac{3}{7}$ $\begin{array}{r} 17 \overline{) 7} \\ 3 \end{array}$

13. Sabem que una unitat té $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}$, etc.

Dues unitats tindran, $\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}$, etc.

Tres unitats tindran, $\frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{15}{5}$, etc.

De manera que podem formular la regla següent:

PER REDUIR UN ENTER A TRENCAT DE DENOMINADOR DONAT, MULTIPLICAREM L'ENTER PEL DENOMINADOR QUE ENS HA ESTAT FIXAT, I EL PRODUCTE ÉS EL NUMERADOR DEL TRENCAT DEMANAT.

El nombre enter 8 reduït a quintes és: $\frac{8 \times 5}{5} = \frac{40}{5}$

14. Si és qüestió de reduir un nombre mixt a trencat, com per exemple $5 + \frac{1}{3}$, com que 1 enter té $\frac{3}{3}$, 5 enters tindran $\frac{15}{3}$. Per tant $\frac{15}{3}$ més $\frac{1}{3}$ serà $\frac{15}{3} + \frac{1}{3} = \frac{15+1}{3} = \frac{16}{3}$.

PER REDUIR UN NOMBRE MIXT A TRENCAI, MULTIPLICAREM L'ENTER PEL DENOMINADOR DEL TRENCAI I AFEGIREM EL PRODUCTE AL SEU NUMERADOR. EL RESULTAT ÉS EL NUMERADOR DEL NOU TRENCAI QUE TINDRÀ EL MATEIX DENOMINADOR.

Dels nombres mixtos amb signe menys, ja en parlarem en tractar de la resta dels trencats.

15.

EXERCICIS

a) Cercar cinc trencats equivalents a cada un dels següents:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{5}{9}, \frac{9}{11}, \frac{20}{40}, \frac{75}{85}$$

b) Simplificar els trencats següents reduint-los a la seva expressió més simple:

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{2 \times 10 \times 15}; \frac{6 \times 8 \times 9}{9 \times 4 \times 18}; \frac{3 \times 7 \times 25}{9 \times 21 \times 11}$$

$$\text{Solució } \frac{1}{5} \quad \text{Solució } \frac{2}{3} \quad \text{Solució } \frac{25}{99}$$

c) Reduir els trencats següents a l'expressió més simple:

$$\frac{20}{25}; \frac{32}{46}; \frac{15}{30}; \frac{50}{75}; \frac{46}{60}$$

d) Reduir a mixtos els trencats següents:

$$\frac{25}{14}; \frac{38}{9}; \frac{19}{3}; \frac{42}{12}; \frac{32}{4}$$

e) Reduir els enters 9 i 15 a setens.

f) Reduir a quintes els enters 8 i 11.

g) Reduir a trencats els nombres mixtos següents:

$$4 + \frac{5}{4}, 6 + \frac{7}{9}, 15 + \frac{4}{5}, 17 + \frac{9}{11}$$

SUMA DE TRENCATS

16. Diguérem ja, en tractar de la suma de nombres enters, que aquests han d'ésser homogenis. Amb els trencats passa cosa semblant. En tractar de sumar dos trencats, per exemple, $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}$, implícitament admetem per unitat una meitat, i així en sumar, diem : tres meitats més cinc meitats, igual a vuit meitats, i ho representem així:

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2}$$

Com que les parts que indiquen els denominadors dels sumands són les mateixes, és evident que quan la suma es compon d'un nombre qualsevol de trencats cal només sumar les quantitats que en prenem, o sigui els numeradors.

Exemple:
$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{8}{5} = \frac{13}{5}$$

Veiem, doncs, que PER SUMAR TRENCATS QUE TENEN UN MATEIX DENOMINADOR, CAL NOMÉS SUMAR ELS NUMERADORS; LLUR SUMA SERÀ EL NUMERADOR DEL TRENCAT RESULTANT I EL DENOMINADOR SERÀ EL MATEIX DELS SUMANDS.

17. Quan els trencats que havem de sumar tenen denominadors diferents no els podem sumar directament.

$\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$ no podem sumar-los directament perquè son heterogenis, és a dir, tenen diferent denominador; però sabem que $\frac{1}{2}$ és igual a $\frac{2}{4}$. Escrivint $\frac{2}{4}$ en lloc de $\frac{1}{2}$ tindrem:

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

PER SUMAR TRENCATS QUE TENEN DENOMINADORS DIFERENTS, CAL REDUIR-LOS PRIMER A UN DENOMINADOR COMÚ.

18. Es tracta, per exemple, de fer la suma

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$$

Com que la valor d'un trencat no s'altera multiplicant ambdós termes per una mateixa quantitat, multiplicarem els del trencat $\frac{1}{4}$ per 3 (denominador del segon) i quedarà convertit en $\frac{3}{12}$. Els termes de $\frac{2}{3}$ els multiplicarem per 4 (denominador del primer) i el trencat quedarà convertit en $\frac{8}{12}$, i amb això la suma anterior es transforma en la següent, tenint els sumands un denominador igual anomenat *denominador comú*.

$$\frac{1 \times 3}{4 \times 3} + \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}$$

Ço que havem exposat en l'exemple, podem formular-ho així:

REDUIREM DOS TRENCATS A UN DENOMINADOR COMÚ MULTIPLICANT ELS TERMES DE CADA UN D'ELLS PEL DENOMINADOR DE L'ALTRE.

19. Si la suma consta de més de dos trencats, semblantment al que férem en el cas anterior, multiplicarem el numerador i denominador de cada un d'ells, pel producte dels denominadors dels altres trencats

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{4}{10} = \frac{2 \times 4 \times 10}{5 \times 4 \times 10} + \frac{3 \times 5 \times 10}{4 \times 5 \times 10} + \frac{4 \times 5 \times 4}{10 \times 5 \times 4}$$

amb la qual cosa, com veiem, els denominadors tenen una mateixa valor, i, per tant, podem ja fer la suma com havem indicat abans.

Podríem també verificar la suma, reduint els dos primers trencats a un denominador comú i sumar el resultat amb l'altre trencat de la mateixa manera, però, és més ràpid fer com hem dit, multiplicar els denominadors, $5 \times 4 \times 10 = 200$, amb la qual cosa tenim el denominador comú. El numerador del primer trencat serà igual a $2 \times 4 \times 10 = 80$; el del segon a $3 \times 5 \times 10 = 150$; el del tercer serà igual a $4 \times 5 \times 4 = 80$. Amb això els trencats anteriors quedaran convertits en altres de la mateixa valor, puix els dos termes de cada trencat han estat multiplicats per una mateixa quantitat. Realitzant les operacions indicades en els trencats anteriors tindrem:

$$\frac{80}{200} + \frac{150}{200} + \frac{80}{200} = \frac{80 + 150 + 80}{200} = \frac{310}{200} = 1 + \frac{110}{200} = 1 + \frac{11}{20}$$

Podem formular així la regla:

PER REDUIR TRES O MÉS TRENCATS A UN DENOMINADOR COMÚ, MULTIPLICAREM EL NUMERADOR I DENOMINADOR DE CADA UN D'ELLS PEL PRODUCTE DELS DENOMINADORS DELS ALTRES.

Observarem fàcilment que el producte de denominadors és el denominador comú.

20. Quan els denominadors dels trencats que hem de sumar tenen algun factor comú, és preferible, a fi de fer més petit el denominador comú, pendre com a tal el m. c. m. dels denominadors. Així en l'exemple anterior determinarem el m. c. m. de 5, 4 i 10, que és 20, i bastarà multiplicar el numerador de cada trencat pel quocient del m. c. m. pel denominador respectiu i tindrem

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{4}{10} = \frac{2 \times 4}{20} + \frac{3 \times 5}{20} + \frac{4 \times 2}{20} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{31}{20}$$

Podem, doncs, formular la regla següent:

PER REDUIR DIVERSOS TRENCATS A UN DENOMINADOR COMÚ, PENDREM COM A TAL EL M. C. M. DELS DENOMINADORS I MULTIPLICAREM EL NUMERADOR DE CADA TRENCAT PEL QUOCIENT DE DIVIDIR EL DIT M. C. M. PEL DENOMINADOR RESPECTIU.

21. Per sumar nombres mixtos, podem convertir cada mixt a trencat i després efectuar la suma dels trencats resultants, però és més curt procedir de la manera indicada per la regla següent:

PER SUMAR NOMBRES MIXTOS, SUMAREM LES PARTS ENTERES I DESPRÉS ELS TRENCATS.

La manera correcta de representar un nombre mixt, per exemple dos i un terç és $2 + \frac{1}{3}$, però en la pràctica és costum suprimir el signe +, i el nombre mixt serà escrit així $2 \frac{1}{3}$.

Per exemple,

$$\begin{aligned} 3 \frac{1}{2} + 4 \frac{2}{3} + 3 \frac{3}{6} + 4 \frac{4}{6} &= 3 + 4 + 3 + 4 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} \\ &= 14 + \frac{1 \times 3 \times 6 \times 6}{2 \times 3 \times 6 \times 6} + \frac{2 \times 2 \times 6 \times 6}{2 \times 3 \times 6 \times 6} + \frac{3 \times 2 \times 3 \times 6}{2 \times 3 \times 6 \times 6} + \frac{4 \times 2 \times 3 \times 6}{2 \times 3 \times 6 \times 6} \\ &= 14 + \frac{108}{216} + \frac{144}{216} + \frac{108}{216} + \frac{144}{216} = 14 + \frac{504}{216} \end{aligned}$$

Aquest trencat, reduït, es converteix així:

$$\frac{504}{216} = \frac{252}{108} = \frac{126}{54} = \frac{63}{27} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

Si el trencat de la suma és impropri, podem separar la part entera i sumar-la amb l'enter del nombre mixt.

En el cas de l'exemple, com que $\frac{7}{3}$ és igual a $2 + \frac{1}{3}$; la suma total serà

$$14 + 2 + \frac{1}{3} = 16 + \frac{1}{3}$$

EXERCICIS

Fer les sumes següents:

a) $\frac{2}{5} + \frac{3}{6} + \frac{4}{9}$

b) $\frac{4}{11} + \frac{7}{8} + \frac{5}{8}$

c) $\frac{7}{12} + \frac{3}{14} + \frac{6}{11} + \frac{2}{7}$

d) $\frac{4}{7} + \frac{11}{15} + \frac{3}{5} + \frac{2}{2}$

e) $3 \frac{1}{3} + 15 \frac{3}{7} + 7 \frac{5}{8}$

RESTA DE TRENCATS

22. Per les mateixes raons donades en el n.º 16, referents a la suma dels trencats, és evident que

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5}$$

PER RESTAR TRENCATS QUE TENEN UN MATEIX DENOMINADOR, RESTAREM ELS NUMERADORS I A LA DIFERÈNCIA LI POSAREM EL DENOMINADOR COMÚ.

23. Però pel mateix que havem dit en tractar de la suma (n.º 16), no és possible efectuar directament la resta dels trencats si no tenen un denominador comú.

PER RESTAR TRENCATS QUE TENEN EL DENOMINADOR DIFERENT, CAL REDUIR-LOS ABANS A UN DENOMINADOR COMÚ I OPERAR DESPRÉS COM AMB ELS TRENCATS D'IGUAL DENOMINADOR.

$$\frac{4}{3} - \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3 \times 5} - \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{20}{15} - \frac{9}{15} = \frac{20-9}{15} = \frac{11}{15}$$

24. Si volem restar d'un enter un trencat, o sigui reduir un nombre mixt amb signe menys a trencat, com $8 - \frac{2}{5}$, podem considerar el nombre mixt com la resta de dos trencats, $\frac{8}{1} - \frac{2}{5}$, puix ja sabem que un número no s'altera en ésser dividit per la unitat; aleshores tindrem:

$$\frac{8}{1} - \frac{2}{5} = \frac{8 \times 5}{1 \times 5} - \frac{2 \times 1}{5 \times 1} = \frac{40}{5} - \frac{2}{5} = \frac{40-2}{5} = \frac{38}{5}$$

Podíem haver assolit aquest mateix resultat seguint un camí en tot semblant a l'indicat en el n.º 14, en tractar de reduir nombres mixtos a trencats. Sols que aquí caldrà verificar una resta en lloc d'una suma:

Així : PER REDUIR UN NOMBRE MIXT AMB SIGNE MENYS A TRENCAT, MULTIPLICAREM L'ENTER PEL DENOMINADOR DEL TRENCAT I D'AQUEST RESULTAT RESTAREM EL NUMERADOR DEL TRENCAT. EL TRENCAT RESULTANT, TINDRÀ PER NUMERADOR AQUESTA DIFERÈNCIA I PER DENOMINADOR EL MATEIX D'ABANS.

$$5 - \frac{13}{7} = \frac{5 \times 7 - 13}{7} = \frac{35 - 13}{7} = \frac{22}{7}$$

25. Per restar nombres mixtos podem reduir-los a trencats i verificar la resta com hem dit abans.

Comunament i per abreujar restarem els nombres enters i després els trencats. Així:

per verificar la resta $18\frac{3}{4} - 7\frac{2}{5}$ tindrem:

$$18 - 7 + \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = 11 + \frac{3}{4} - \frac{2}{5}$$

Reduint els trencats a un denominador comú tindrem:

$$11 + \frac{15}{28} - \frac{8}{20} = 11 + \frac{7}{20}$$

PER RESTAR NOMBRES MIXTOS RESTAREM ELS ENTERS I DESPRÉS ELS TRENCATS.

26. Si en una resta de nombres mixtos el trencat del subtrahend és major que el del minuend, com per exemple en la resta $11\frac{2}{5} - 8\frac{3}{4}$, traurem una unitat de la part entera del minuend i l'afegirem al trencat, amb la qual cosa la valor total del nombre mixt no s'altera.

Així, com que

$$11\frac{2}{5} = 10 + \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = 10\frac{7}{5}$$

la resta tindrà la forma

$$10\frac{7}{5} - 8\frac{3}{4}$$

i el resultat serà

$$10 - 8 + \frac{7}{5} - \frac{3}{4} = 2\frac{13}{20}$$

QUAN EN UNA RESTA DE NOMBRES MIXTOS LA FRACCIÓ DEL MINUEND ÉS MENOR QUE LA DEL SUBTRAHEND, MODIFICAREM EL MIXT MINUEND, TRAIENT UNA UNITAT DEL NOMBRE ENTER, QUE AFEGIREM AL TRENCAT, I FAREM LA RESTA COM EN EL CAS GENERAL.

EXERCICIS

27. Fer les restes:

$$a) \quad \frac{12}{25} - \frac{9}{20}$$

$$e) \quad 18 - \frac{21}{25}$$

$$b) \quad \frac{12}{24} - \frac{7}{30}$$

$$f) \quad 10 \frac{3}{5} - 4 \frac{2}{9}$$

$$c) \quad \frac{7}{9} - \frac{5}{17}$$

$$g) \quad 11 \frac{5}{7} - 3 \frac{6}{11}$$

$$d) \quad 9 - \frac{5}{7}$$

$$h) \quad 9 \frac{3}{4} - 4 \frac{3}{4}$$

MULTIPLICACIÓ DE TRENCATS

28. 2 vegades mitja taronja és igual a una taronja

$$2 \text{ vegades } \frac{1}{2} \text{ és igual a } 2 \times \frac{1}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

De la mateixa manera és fàcil comprendre que

$$2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$4 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$3 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3}$$

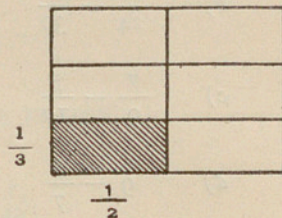
Tot observant les operacions anteriors apareix que

PER MULTIPLICAR UN TRENCAT PER UN ENTER CAL NOMÉS MULTIPLICAR EL NUMERADOR PER L'ENTER I POSAR EL MATEIX DENOMINADOR.

Podríem procedir també d'una altra manera, o sigui dividint el denominador del trencat pel nombre que multiplica. Un exemple ens ho aclarirà:

$$\frac{1}{8} \times 2 \left\{ \begin{array}{l} = \frac{1 \times 2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ = \frac{1}{8 : 2} = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

29. Tot observant la figura compendrem que multiplicant $\frac{1}{3}$ d'un costat del rectangle per $\frac{1}{2}$ de l'altre costat obtenim un rectangle igual a $\frac{1}{6}$ del rectangle total.

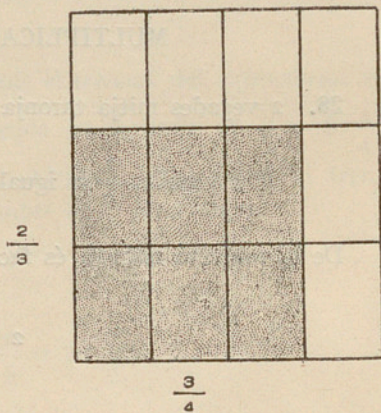


De la mateixa manera podríem demostrar que

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

i amb la segona figura que

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$



En general multipliquem els trencats seguint la regla següent:

ELS TRENCATS SERAN MULTIPLICATS FORMANT UN TRENCAT QUE TINGUI PER NUMERADOR EL PRODUCTE DELS NUMERADORS I PER DENOMINADOR EL PRODUCTE DELS DENOMINADORS.

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 3 \times 4}{3 \times 4 \times 5} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

L'operació anterior podria simplificar-se suprimint els factors comuns, així: suprimirem el 3 i el 4 per trobar-se en el numerador i el denominador i quedarà

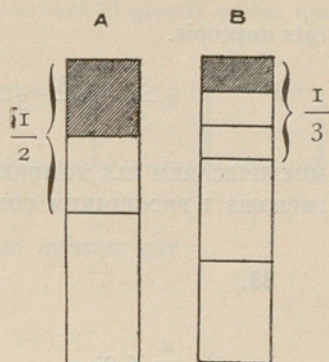
$$\frac{2 \times 3 \times 4}{3 \times 4 \times 5} = \frac{2}{5}$$

30. Observant el gravat A, veiem que

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{2} \text{ és igual a } \frac{1}{4}$$

Observant el gravat B, veiem que

$$\frac{1}{3} \text{ de } \frac{1}{3} \text{ és igual a } \frac{1}{9}$$



Amb altra figura es faria evident que

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12}$$

Això significa que PRENDRE UNA PART O PARTS D'UN TRENCAT ÉS LA MATEIXA COSA QUE MULTIPLICAR UN TRENCAT PER UN ALTRE TRENCAT.

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{1}{4} \text{ és igual a } \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{2}{3} \text{ és igual a } \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$$

31. Per multiplicar $3\frac{2}{3}$ per 4, multiplicarem per 4, primer l'enter, $3 \times 4 = 12$ i després el trencat, $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$, el qual reduït a mixt es converteix en $2\frac{2}{3}$. El resultat serà $12 + 2\frac{2}{3} = 14\frac{2}{3}$.

PER MULTIPLICAR UN NOMBRE MIXT PER UN ENTER, MULTIPLICAREM PRIMER LA PART ENTERA DEL MIXT PER L'ENTER I DESPRÉS LA PART FRACCIONÀRIA, I SUMAREM ELS DOS PRODUCTES.

32. Per multiplicar $2\frac{3}{5}$ per $3\frac{2}{3}$ reduïrem els nombres mixtos a trencats impropis.

$$2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}; 3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}; \frac{13}{5} \times \frac{11}{3} = \frac{143}{15} = 9\frac{8}{15}$$

MULTIPLICAREM ELS NOMBRES MIXTOS REDUÏNT-LOS PRÈVIAMENT A TRENCATS IMPROPIS I PROCEDIREM COM EN EL CAS DE TRENCATS.

33.

EXERCICIS

a) $\frac{2}{7} \times 9$; b) $\frac{9}{15} \times 15$; c) $21 \times \frac{6}{13}$

d) $\frac{3}{9} \times \frac{7}{11}$ e) $\frac{7}{13} \times \frac{5}{9}$; f) $\frac{12}{13} \times \frac{21}{26}$

g) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{9}{13}$; h) $\frac{7}{9} \times \frac{3}{5} \times \frac{8}{13} \times \frac{1}{11}$

i) $3\frac{4}{9} \times 5$; j) $9\frac{7}{8} \times 6$; k) $6 \times 14\frac{2}{15}$

l) $4\frac{5}{8} \times 3\frac{2}{7}$; m) $8\frac{3}{4} \times 7\frac{6}{11}$

DIVISIÓ DE TRENCATS

34. Dividint 4 taronges per 2 tindriem 2 taronges.

$$\frac{4}{5} \text{ dividit per } 2 \text{ és igual a } \frac{4:2}{5} = \frac{2}{5}$$

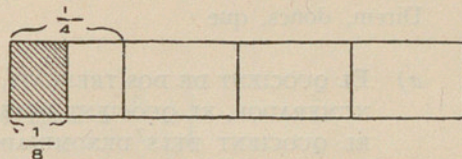
De la mateixa manera compendrem que

$$\frac{12}{11} : 3 \text{ és igual a } \frac{4}{11}; \frac{10}{13} : 5 = \frac{2}{13} \text{ etc.}$$

Com podem veure, PER DIVIDIR UN TRENCAT PER UN ENTER DIVIDIREM ÚNICAMENT EL NUMERADOR.

35. Quan el numerador no és divisible per l'enter, com en el cas de $\frac{1}{4} : 2$, ens valdrem d'un altre procediment. Observant el gravat veiem que

$$\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}$$



De la mateixa manera amb figures podríem mostrar que

$$\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{5} : 2 = \frac{1}{10} \text{ etc.}$$

Del que havem exposat, es desprèn que PER DIVIDIR UN TRENCAT PER UN ENTER, CAL DIVIDIR EL NUMERADOR, O BÉ MULTIPLICAR EL DENOMINADOR DEL TRENCAT, PER L'ENTER.

1.^a forma: $\frac{6}{4} : 3 = \frac{6 : 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

2.^a forma: $\frac{6}{4} : 3 = \frac{6}{3 \times 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

36. Sabem, i en la figura es veu palesament, que

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12}$$

$$\frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{12} \\ \frac{1}{12} \end{array} \right.$$

Com que en un producte de dos factors, un d'ells és igual al producte dividit per l'altra factor, tindrem $\frac{1}{4} = \frac{2}{12} : \frac{2}{3}$.

Cal fixar-nos que aquest resultat podíem assolir-lo dividint els numeradors i denominadors dels trencats del segon membre entre ells, és a dir

$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	

$$\frac{2}{12} : \frac{2}{3} = \frac{2:2}{12:3} \text{ ço que ens dóna també } \frac{1}{4}$$

Direm, doncs, que

- a) EL QUOCIENT DE DOS TRENCATS, ÉS UN ALTRE TRENCAT QUE TÉ PER NUMERADOR, EL QUOCIENT DELS NUMERADORS I PER DENOMINADOR, EL QUOCIENT DELS DENOMINADORS.

Així tindriem també

$$\frac{6}{15} : \frac{2}{3} = \frac{6:2}{15:3} = \frac{3}{5}$$

La valor de la divisió

$$\frac{6}{15} : \frac{2}{3}$$

podríem obtenir-la d'una altra manera. En efecte, sabem que dividir el numerador d'un trencat per un nombre, equival a multiplicar pel nombre el denominador; això és, que igual serà en aquest cas dividir el numerador 6 per 2, que multiplicar el denominador 15 per 2, i per altra banda, sabem també que dividir el denominador equival a multiplicar el numerador pel mateix nombre, això és, que és igual dividir el dominador 15 per 3, que multiplicar per aquest nombre el numerador 6, o sigui

$$\frac{6}{15} : \frac{2}{3} = \frac{6 \times 3}{15 \times 2} = \frac{6}{15} \times \frac{3}{2}$$

ço que permet formular la regla següent:

- b) PER DIVIDIR TRENCATS MULTIPLICAREM EL TRENCAT DIVIDEND PEL TRENCAT DIVISOR INVERTIT.

Aquesta regla és la que cal aplicar sempre que els numeradors no són divisibles entre si i no permeten aplicar la regla a).

Exemple: $\frac{7}{8} : \frac{4}{11} = \frac{7}{8} \times \frac{11}{4} = \frac{7 \times 11}{8 \times 4} = \frac{77}{32}$

37. La regla de la divisió de trencats ens permet simplificar fàcilment els trencats *complexos*, que són els que tenen per numerador i denominador nombres fraccionaris com en l'exemple següent:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20} = 1 \frac{1}{20}$$

38. $6 : \frac{3}{4}$ serà igual a $\frac{6}{1} : \frac{3}{4}$

Ara bé, $\frac{6}{1} : \frac{3}{4} = \frac{6}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{6 \times 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$

El mateix resultat donaria aquest altre procediment:

$$6 : \frac{3}{4} = 6 \times \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

PER DIVIDIR UN ENTER PER UN TRENCAT MULTIPLICAREM L'ENTER PEL TRENCAT INVERTIT.

39.

EXERCICIS

a) $\frac{5}{8} : 4$; b) $\frac{7}{9} : 6$; c) $\frac{11}{15} : 8$; d) $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$

e) $\frac{4}{9} : \frac{3}{4}$; f) $\frac{7}{12} : \frac{2}{5}$; g) $9 : \frac{3}{7}$; h) $7 : \frac{5}{9}$

Simplificar i resoldre els següents trencats complexos:

i) $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}}$; j) $\frac{\frac{9}{11}}{\frac{7}{13}}$

40. PER DIVIDIR UN NOMBRE MIXT PER UN ENTER, UN ENTER PER UN NOMBRE MIXT O UN NOMBRE MIXT PER UN ALTRE MIXT, REDUIREM ELS NOMBRES MIXTOS A TRENCATS I PROCEDIREM COM EN ELS CASOS DE DIVISIÓ DE TRENCATS.

Així, per dividir el nombre mixt $3\frac{1}{5}$ per 2, farem:

$$3\frac{1}{5} : 2 = \frac{16}{5} : 2 = \frac{16 : 2}{5} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}.$$

Per dividir l'enter 4 pel mixt $2\frac{2}{3}$, farem:

$$4 : 2\frac{2}{3} = 4 : \frac{8}{3} = 4 \times \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

Per dividir el mixt $5\frac{3}{4}$ pel mixt $3\frac{2}{7}$, procedirem així:

$$5\frac{3}{4} : 3\frac{2}{7} = \frac{23}{4} : \frac{23}{7} = \frac{23}{4} \times \frac{7}{23} = \frac{23 \times 7}{4 \times 23} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}.$$

ARITMÈTICA

SEGONA PART

PROBLEMES

1. Què és un trencat propi i què un trencat impropï? Poseu un exemple de cada un.
2. Doneu un exemple de nombre mixt.
3. Què són trencats equivalents? Poseu un exemple.
4. Dels dos trencats $\frac{3}{11}$ i $\frac{2}{7}$, quin és més gran? Quina relació hi ha entre ells?
5. Què és el trencat $\frac{21}{272}$ respecte del $\frac{126}{1632}$?
6. Què s'enten per simplificar un trencat?
7. Quan queda un trencat reduït a la seva expressió més simple?
8. Trobar un trencat equivalent a $\frac{21}{16}$, el denominador del qual sigui 400.
9. Reduir els trencats $\frac{36}{396}$, $\frac{81}{189}$ i $\frac{15}{249}$ a la seva expressió més simple.
10. Sumar els trencats $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{3}$ i $\frac{21}{5}$.
11. Trobar la valor de la suma $\frac{3}{7} + \frac{25}{375} + \frac{127}{381}$ reduint prèviament aquests trencats a la seva expressió més simple.
12. Fer l'operació $\frac{12}{3} - \frac{5}{2} - \frac{7}{5}$.
13. Trobar la valor de $\frac{5}{7} - \frac{3}{2} + \frac{152}{456} + \frac{54}{63}$ reduint prèviament aquests trencats a la seva expressió més simple.

14. Verificar les operacions indicades $7\frac{5}{2}$; $9 - \frac{5}{3}$ i $\frac{125}{6} - 7$.
15. Reduir a mixtos els trencats $\frac{376}{3}$ i $\frac{254}{9}$.
16. Verificar la resta $15 + \frac{2}{5}$ menys $9 + \frac{7}{8}$ sense reduir els mixtos a trencats.
17. Trobar la valor de $9 + \frac{7}{2} + \frac{15}{3} - \frac{7}{4} - 7$.
18. Fer la multiplicació $\frac{5}{3} \times \frac{9}{2} \times \frac{125}{15}$ i reduir el trencat resultant a la seva expressió més simple.
19. Fer l'operació $9 \times \frac{5}{3} - \frac{7}{8} + 5 + \frac{1}{7} + 2 - 1 + \frac{5}{4}$.
20. Trobar la valor de $\frac{5}{7} \times \frac{9}{3} \times \frac{7}{9} \times \frac{3}{5}$, fent el menor nombre possible d'operacions.
21. Fer les divisions $\frac{5}{2} : \frac{1}{3}$, $\frac{45}{63} : \frac{5}{9}$ i $\frac{120}{903} : \frac{2}{14}$.
22. Trobar la valor de $\frac{\frac{9}{2}}{\frac{5}{3}}$.
23. Fer la multiplicació $\frac{2}{5} \times \frac{7}{\frac{9}{3}} \times 3$.
24. Trobar la valor de $\frac{\frac{9}{5} \times \frac{7}{2}}{8}$
 $\frac{19}{3} - 2$.
25. Cercar la valor de $5 + \frac{3}{2} - 7 + \frac{2}{3} + 3 + \frac{1}{4}$ multiplicat per $2 + \frac{5}{2} + 7 - \frac{3}{4}$ i dividir per $7 - \frac{5}{3}$ el producte obtingut.

RF-5-22

