Mancomunitat de Catalunya

EXTENSIO D'ENSENYAMENT TECNIC

E·E·T

TEXT N.º 38 a)

CORRENT ALTERN

PART I

Carrer d'Urgell 187 Barcelona

QUADERN 38

CORRENT ALTERN *(a)*

Pàgina	Ratlla	On diu	Ha de dir
36	2	= 10,31	= 11,79

CORRENTS ALTERNS

PRIMERA PART

CORRENTS CONTINU, PULSATIU I ALTERN

1. Siguin E_1 i E_2 els potencials respectius de dos punts *a* i *b* d'un conductor (fig. 1). La intensitat del corrent deguda a la diferència $E_1 - E_2$ serà, segons la fórmula d'Ohm, $I = \frac{E_1 - E_2}{R}$ i com que la resistència R del tros de conductor *a b* és una quantitat essencialment positiva, la intensitat del corrent tindrà sempre el signe de $E_1 - E_2$, és a dir que serà positiva o negativa segons sigui positiva o negativa la diferència de potencials.

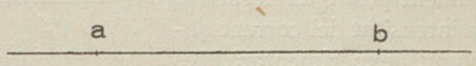

FIG. 1

Si E_1 és major que E_2, la diferència $E_1 - E_2$ serà positiva, així com la intensitat, i el corrent anirà en el sentit *a b*, que podem considerar com a positiu. Si E_1 és menor que E_2, $E_1 - E_2$ serà negatiu i igualment ho serà la intensitat, i el corrent, que va sempre d'un punt a altre de potencial més baix, marxarà en el sentit *b a* que, com oposat al primer, podem pendre com a negatiu. Veiem, doncs, que a una intensitat positiva correspon un sentit de corrent determinat i a una intensitat negativa correspon un corrent de sentit oposat.

Si la diferència $E_1 - E_2$, sigui positiva o negativa, conserva una valor fixa, el corrent a què donarà lloc tindrà un sentit determinat i sa intensitat serà constant, i podrà ésser representada per una recta *a b* (fig. 2), paral·lela a l'eix d'abscisses, traçada a la distància I, damunt l'eix si és positiva o dessota ell si és negativa (línia $a' b'$). Damunt l'eix $o x$ són comptats els temps i damunt l'eix $o y$ les intensitats, de manera que el corrent representat per la recta *a b* té una intensitat constant igual a $+ I$, ço que significa que va en sentit positiu i la representada per la recta $a' b'$ té una intensitat constant igual a $- I$, o sigui que marxa en sentit negatiu o oposat a la primera.

Tot corrent que, com els representats per les rectes $a\,b$ i $a'\,b'$ té sempre una mateixa intensitat i va dirigida en un sentit determinat, és designat amb el nom de *corrent continu.*

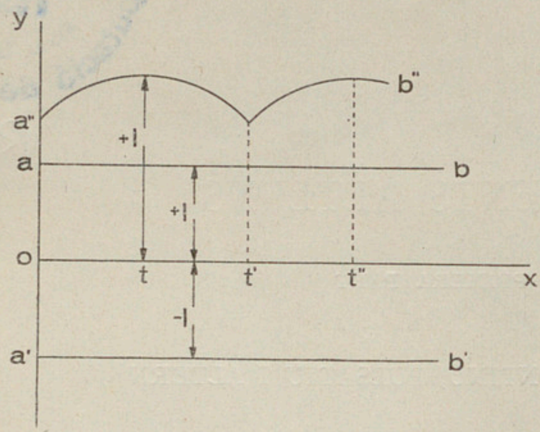

FIG. 2

Si la diferència de potencials $E_1 - E_2$ conserva sempre valors positives o negatives però variables a intervals de temps iguals, el corrent obtingut és *pulsatiu.* La corba $a''\,b''$ representa un corrent pulsatiu en el qual la intensitat varia d'un mínimum $o\,a''$ a un màximum $+I$. Al cap d'un temps $o\,t$, la intensitat creix de $o\,a''$ a $+I$, més enllà disminueix fins a tornar a la valor primitiva després d'un temps $o\,t'$ per a créixer de nou en la mateixa forma i assolir el màximum al cap d'un temps $o\,t''$, verificant-se $o\,t = t\,t' = t'\,t''$.

Si la diferència de potencials $E_1 - E_2$ és alternativament positiva i negativa, la intensitat del corrent obtingut experimentarà les mateixes variacions i, per conseqüent, anirà alternativament en un i altre sentit. La fig. 3 representa un corrent la intensitat del qual conserva la valor $o\,a$ durant el temps $o\,t$; després canvia sobtadament de signe, o sigui marxa en sentit oposat durant un temps $t\,t' = o\,t$ amb igual intensitat, torna a canviar de signe, i així successivament, repetint-se els mateixos canvis a intervals de temps iguals.

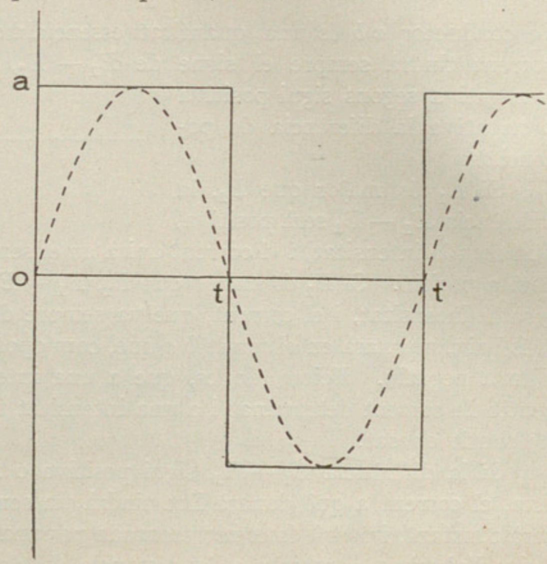

FIG. 3

Un corrent que canvia de sentit a intervals iguals de temps i la intensitat del qual assoleix positivament i negativament les mateixes valors, rep el nom de *corrent altern.*

Del que havem exposat es dedueix fàcilment que els corrents continus, pulsatius i alterns són produïts per forces electromotrius constants, pulsatives i alternes, respectivament, que, com aquells, poden ésser representades gràficament. Segons tindrem ocasió d'observar, les forces electromotrius i els corrents que produeixen no canvien de signe d'una manera tan brusca com la indicada per la línia trencada de la fig. 3, sinó que presenten més o menys la forma representada per la corba de punts, formant una sèrie d'ondes alternativament positives i negatives, coneguda amb el nom de *sinusoide*.

FORCES ELECTROMOTRIUS SINUSOIDALS

2. Sigui *a* (fig. 4) un conductor normal al pla del dibuix, que gira amb moviment circular i velocitat constant en un camp magnètic uniforme. Suposem que el conductor parteix de la posició *a* en què el radi *o a* és normal a les línies de força i es mou en el sentit indicat per la fletxa. La força electromotriu que es desenrotllarà en el conductor en una posició qualsevulga durant son moviment serà la que es produiria si seguís la tangent a la circumferència en el punt considerat. Quan el conductor ha descrit l'angle α, es trobarà en una posició *b* en la qual la direcció del moviment forma un angle β amb la perpendicular a les línies de força, i, segons sabem, s'hi desenrotllarà una força electromotriu $e = B\,l\,v \cos\beta$, designant per B, l i v, respectivament, la inducció del camp, la longitud del conductor i sa velocitat. Com que el producte $B\,l\,v$ és la força electromotriu màxima que es desenrotlla en el conductor quan aquest es mou normalment a les línies de força del camp, anomenant-lo E, tindrem $e = E \cos\beta$.

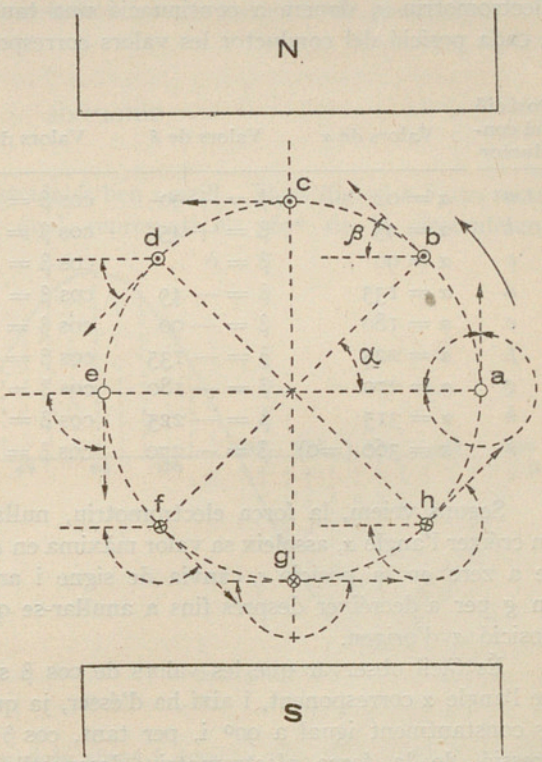

FIG. 4

Estudiem les variacions de cos β, i, per tant, les del producte E cos β, a mesura que el conductor va descrivint una circumferència. Per a això ha estat representat el conductor en vuit posicions distants entre si de 45°, de manera que per a les dites posicions successives els angles descrits seran, a partir de *a*, 45, 90, 135, etc., fins a 360° quan ocupa novament la posició d'origen *a*. A fi que hom vegi amb perfecta claredat la variació de la força electromotriu *e*, donem a continuació una taula en què són indicades per a cada posició del conductor les valors corresponents de α, β, $\cos\beta$ i *e*.

Posició del conductor	Valors de α	Valors de β	Valors de $\cos\beta$	Valors de e
a	$\alpha = 0$	$\beta = +90$	$\cos\beta = 0$	$e = 0$
b	$\alpha = 45$	$\beta = +45$	$\cos\beta = +0{,}707$	$e = +0{,}707\,E$
c	$\alpha = 90$	$\beta = 0$	$\cos\beta = +1$	$e = +E$
d	$\alpha = 135$	$\beta = -45$	$\cos\beta = +0{,}707$	$e = +0{,}707\,E$
e	$\alpha = 180$	$\beta = -90$	$\cos\beta = 0$	$e = 0$
f	$\alpha = 225$	$\beta = -135$	$\cos\beta = -0{,}707$	$e = -0{,}707\,E$
g	$\alpha = 270$	$\beta = -180$	$\cos\beta = -1$	$e = -E$
h	$\alpha = 315$	$\beta = -225$	$\cos\beta = -0{,}707$	$e = -0{,}707\,E$
a	$\alpha = 360\ (=0)$	$\beta = -270$	$\cos\beta = 0$	$e = 0$

Segons veiem, la força electromotriu, nul·la en la posició *a*, augmenta en créixer l'angle α, assoleix sa valor màxima en *c*, decreix després fins reduir-se a zero en la posició *e*, canvia de signe i arriba a son màximum negatiu en *g* per a decréixer després fins a anul·lar-se quan el conductor torna a la posició *a* d'origen.

És fàcil observar que les valors de $\cos\beta$ són precisament les del sinus de l'angle α corresponent, i així ha d'ésser, ja que la suma algèbrica de α i β és constantment igual a 90° i, per tant, $\cos\beta = \sin\alpha$. Així, doncs, l'expressió de la força electromotriu desenrotllada en el conductor en un instant qualsevol es transforma en

$$e = E \sin\alpha \qquad (1)$$

de manera que la força electromotriu és proporcional al sinus de l'angle descrit pel conductor, i coneguda la posició d'aquest, o sigui la valor de α, podrem calcular la força electromotriu del conductor en l'instant considerat.

Tota força electromotriu que varia proporcionalment al sinus d'un angle rep el nom de *força electromotriu sinusoidal*, derivació de *sinusoide*, que és la corba que representa la relació entre un angle i el seu sinus.

3. Generalment, les forces electromotrius produïdes pels *alternadors* o màquines de corrent altern, no segueixen exactament la llei del sinus, és a dir la corba que les representa no és una sinusoide perfecta, sinó que,

degut a circumstàncies especials, se n'aparta més o menys. Però, com que en els alternadors ben estudiats la divergència és petita, hom suposa que la corba de la força electromotriu és una sinusoide i tots els càlculs sobre corrents alterns es fonamenten comunament en aquesta suposició, que proporciona un mitjà per a resoldre amb molta senzillesa problemes que d'altre manera exigirien càlculs laboriosíssims i sense caràcter de generalitat.

SINUSOIDE

4. El traçat d'una sinusoide és ben senzill. Sigui (fig. 5) *a b* una recta la longitud arbitrària de la qual representi els 360º de la circumferència, dividida en un cert nombre de parts iguals, vint-i-quatre per exemple, cada una de les quals equivaldrà a 15º. Si pels punts de divisió tracem perpendiculars a la recta *a b* i sobre cada una d'elles prenem a partir de son peu, una longitud igual a la valor del sinus de l'angle corresponent, amb la precaució de marcar damunt la recta *a b* les valors positives dels sinus i dessota ella les negatives, obtindrem una sèrie de punts que units per un tret continu formaran una sinusoide.

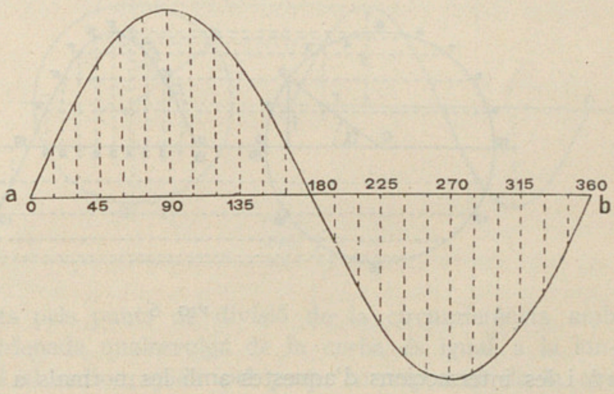

FIG. 5

Segons sabem per la *trigonometria*, el sinus d'un angle no és en realitat una longitud, sinó una relació de longituds, i sa veritable expressió és sin $\alpha = \frac{l}{r}$, on l és la longitud de la perpendicular traçada des de l'extrem de l'arc al radi que passa per l'origen i r és la longitud del radi. La valor de l varia entre un mínimum, que és zero quan $\alpha = 0$, i un màximum igual a r quan $\alpha = 90º$, d'on es dedueix que sin α variarà des de $\frac{o}{r} = o$ a $\frac{r}{r} = 1$ i per a les valors de α compreses entre 0º i 90º, sin α serà una quantitat més petita que 1.

Per trobar les valors que cal donar a les ordenades de la sinusoide pendrem una longitud arbitrària que serà la longitud de l'ordenada corresponent a 90° i les longituds de les altres ordenades seran els productes de la longitud adoptada multiplicada pel sinus de l'angle corresponent. Suposem que l'ordenada de 90° té 40 mm., la longitud de l'ordenada de 15° serà $40 \times \sin 15° = 40 \times 0{,}2588 = 10{,}4$ mm., la de 30°, $40 \times \sin 30° = 40 \times 0{,}5 = 20$ mil·límetres, etc. L'ordenada de 180° serà zero puix $\sin 180° = 0$ així com les de 0° i 360°. A partir de 180° la valor del sinus és negativa per ésser-ho *l* i les ordenades hauran d'ésser traçades dessota *a b*.

Donada la simetria de la corba, compendrem que podem abreujar la construcció; en efecte : a partir de 90° les valors del sinus es repeteixen i tenim $\sin 105° = \sin 75°$, $\sin 120° = \sin 60°$, etc., de manera que obtingudes les valors de les ordenades des de 0° a 90°, trobarem les de les ordenades des de 90° a 180° bo i traçant pels extrems d'aquelles, paral·leles a la recta

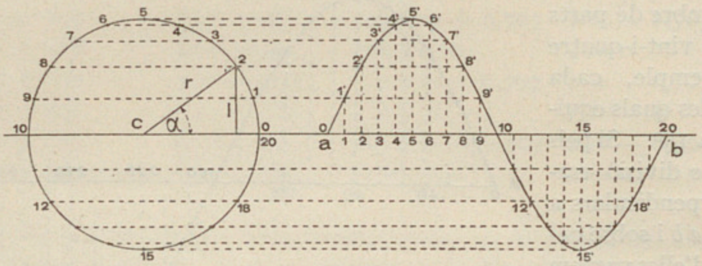

FIG. 6

a b i les interseccions d'aquestes amb les normals a *a b* donaran a conèixer les altures de les ordenades i seran punts de la corba. Igualment passa amb la part negativa, i per traçar-la bastarà pendre en sentit invers les valors de les ordenades de la part positiva.

Anomenem *onda positiva* d'una sinusoide, la part de la dita corba que es troba sobra l'eix horitzontal *a b*, i *onda negativa* la que es troba dessota el dit eix. Cada onda consta de dues parts simètriques respecte de l'ordenada màxima, i l'onda negativa és igual a la positiva invertida i traslladada 180° cap a la dreta.

5. Si no disposem d'una taula on cercar les valors del sinus corresponents als diversos angles, podem traçar la sinusoide empleant el següent procediment, que és purament geomètric. Dividim una circumferència de radi qualsevulga (fig. 6) en un nombre arbitrari de parts iguals, prolonguem la recta que uneix dos punts de divisió diametralment oposats, i damunt d'aquesta prolongació *a b* marquem a distàncies arbitràries, però iguals entre si, tants punts com divisions tingui la circumferència i assenyalem les divisions de la circumferència i de la recta amb números o lletres en l'ordre que indica la figura. Fet això, tracem pel punt 1 de la circumferència una paral·lela

a la recta, i pel punt 1 d'aquesta una normal, i el punt d'intersecció d'ambdues 1', serà un punt de la corba. Repetint aquesta construcció per als altres punts de divisió obtindrem els punts 2', 3', 4', etc., que, units per un tret continu, donaran la sinusoide.

Per a la construcció de la sinusoide convé que un dels punts de divisió de la circumferència es trobi a 90° de l'origen a fi d'obtenir directament l'ordenada màxima de la corba, i una lleugera inspecció de la figura mostra que en aquest cas pot simplificar-se notablement la construcció. En efecte, ja que les paral·leles traçades a la recta *a b* pels punts 1 i 9 coincideixen, bastarà traçar-ne una, i a l'efecte prescindirem de la mitja circumferència de l'esquerra, i pels punts de divisió de l'altra traçarem les paral·leles, cada una de les quals proporcionarà dos punts de la corba; així el punt 1 donarà 1' i 9'; el punt 2, els 2' i 8', i així els altres.

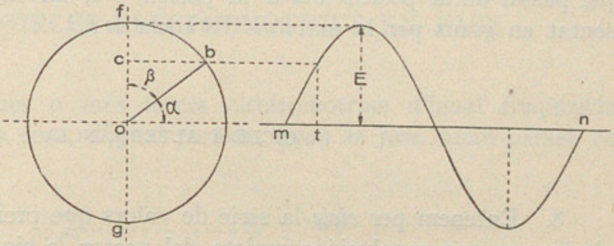

FIG. 7

6. L'exactitud del procediment explicat en el número anterior pot ésser demostrada observant que les divisions de la recta *a b* representen precisament els angles formats pels punts de divisió de la circumferència amb l'origen *o* i que una ordenada qualsevulga de la corba és igual a la longitud *c o* de la normal al radi traçada pel punt corresponent de la circumferència. Així, per exemple, la normal 2 — 2' és igual a *l*, i com que $l = r \sin \alpha$, es dedueix que les ordenades de la corba són proporcionals al sinus de l'angle; per tant, la corba és una sinusoide.

És evident que com major sigui el radi de la circumferència, major serà el nombre de parts en què pràcticament la podrem dividir, i essent més nombrosos els punts de la corba, major serà l'exactitud amb què podrem traçar-la.

7. Segons hem vist en el núm. 2, la força electromotriu desenrotllada en un conductor animat d'un moviment circular en les condicions indicades és $e = E \sin \alpha$, on E és la força electromotriu màxima i α l'angle descrit pel conductor des de sa posició d'origen. Si suposem que el radi de la circumferència segons la qual es mou el dit conductor és precisament igual a la valor màxima E, la projecció (fig. 7) sobre el diàmetre vertical $f\,g$, del radi que passa pel conductor en el moment considerat serà $o\,c = o\,b \cos \beta$, però $o\,b = E$ i $\cos \beta = \sin \alpha$, per tant, $o\,c = E \sin \alpha$, d'on es dedueix $o\,c = e$, de manera que la projecció del *radi vector* $o\,b$ sobre el diàmetre vertical és igual a la valor momentània de la força electromotriu desenrotllada en el

conductor. Construint la sinusoide relativa a les variacions de α veurem que les ordenades de la dita corba no són altres que les projeccions successives del vector *o b*; per tant, les dites ordenades seran iguals a les valors instantànies de la força electromotriu produïda en el conductor. L'ordenada màxima de la sinusoide, que té per valor *E*, és l'*amplitud* de les ondes.

Com que el moviment del conductor, o sigui del vector *o b*, és uniforme, els angles descrits són proporcionals als temps esmerçats a descriure'ls, i, per tant, les divisions de l'eix *m n* de la sinusoide poden, demés dels angles, representar els temps transcorreguts des del principi del moviment, de manera que la longitud *m n* representarà el temps necessari per a descriure el vector una volta completa, i la distància *m t* serà el temps empleat pel vector per passar de la posició *o a* a la posició *o b*, havent descrit l'angle α representat en graus per la mateixa distància *m t*.

CICLE I ALTERNÀNCIA

8. Entenem per *cicle* la sèrie de valors que pren la força electromotriu alterna en una revolució completa del vector, o sigui el conjunt de valors que pren l'ordenada de la sinusoide que la representa, des que comença a créixer positivament fins que torna a créixer positivament, havent passat per totes les valors de l'onda positiva i l'onda negativa, de manera que en la fig. 7 un cicle serà la sèrie de valors de la força electromotriu durant el temps *m n*.

Si una força electromotriu canvia de sentit *n* vegades en un segon, direm que té *n alternàncies* per segon. Una alternància correspon, per tant, a mig cicle, i és evident que el nombre d'alternàncies per segon serà igual al doble del nombre de cicles efectuats en el mateix espai de temps.

PERÍODE I FREQÜÈNCIA

9. Donem el nom de *període* d'una força electromotriu alterna al temps que esmerça a executar un cicle de valors, de manera que estarà representat per la distància *m n* (fig. 7). Aquest temps és, generalment, una fracció molt petita de segon, ja que les forces electromotrius usades en la pràctica passen per un gran nombre de cicles durant aquesta unitat de temps, i és designat per *T*.

Freqüència és el nombre de cicles efectuats en 1 segon i és representada pel signe $\sim$. Entre la *freqüència* i el *període* existeix una relació senzilla; si per a efectuar $\sim$ cicles es necessita 1 segon, el temps empleat en 1 cicle serà

$$T = \frac{1}{\sim},$$

de manera que la freqüència és la recíproca del període; així, si una força electromotriu és d'una freqüència igual a 50, amb la qual cosa signifiquem que es verifiquen 50 cicles per segon, el període de la dita força electromotriu serà $\frac{1}{50}$ de segon, és a dir que esmerçarà $\frac{1}{50}$ de segon en cada cicle.

SUMA DE FORCES ELECTROMOTRIUS EN FASE

10. Diem que dues o més forces electromotrius d'igual freqüència o, ço que és la mateixa cosa, d'igual període, *estan en fase*, quan passen en

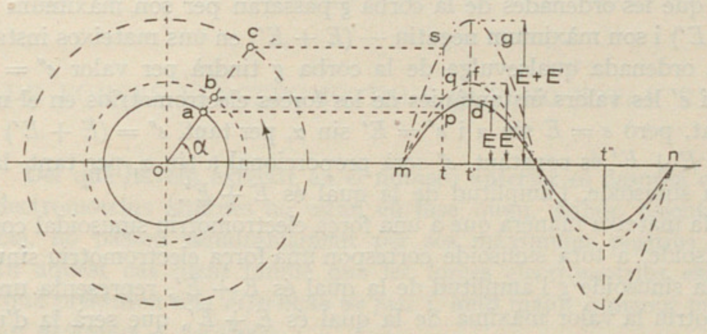

FIG. 8

uns mateixos instants per ses valors màximes positives o negatives, ço que és expressat també, dient que les forces electromotrius estan *en concordança de fase* o *en sincronisme*.

En la fig. 8, a i b són dos conductors paral·lels d'igual longitud units rígidament l'un amb l'altre, que, situats en línia recta amb el centre o, giren amb velocitat constant en les condicions que hem indicat en els casos anàlegs, considerats anteriorment. Si el vector $o\,a$ és igual a la força electromotriu màxima E del conductor a, $o\,b$ serà la força electromotriu màxima E' del conductor b; en efecte, les forces electromotrius E i E' són proporcionals a les *velocitats tangencials*, o *lineals* (que són les que figuren en la fórmula general $E = B\,l\,v$), i com que aquestes a la vegada ho són als radis de les circumferències descrites, tindrem

$$\frac{E}{E'} = \frac{o\,a}{o\,b},$$

però, segons hem dit, $o\,a = E$, per tant, $o\,b = E'$.

Si suposem que entre els conductors a i b existeix una comunicació tal que els posi en sèrie de manera que la força electromotriu de l'un s'afegeixi a la de l'altre, en un moment donat t, la suma de les forces electromotrius instantànies e i e' dels conductors a i b serà la suma $t\,s$ de les ordenades $t\,p$ i $t\,q$ de les sinusoides d i f que les representen, i repetint aquesta operació per a cada parell de valors de les ordenades de les sinusoides d i f corresponent a un angle o moment donat, obtindrem una sèrie de punts que formaran la corba g que representarà la suma $e + e'$ de les forces electromotrius instantànies dels conductors a i b. És evident que, donada la situació relativa dels conductors a i b, ses forces electromotrius e i e' estaran en fase, de manera que les ordenades de les sinusoides d i f passaran per sos màximums respectius $+ E$ i $+ E'$ quan $\alpha = 90°$, i $- E$ i $- E'$ quan $\alpha = 270°$, i és clar que les ordenades de la corba g passaran per son màximum positiu $+ (E + E')$ i son màximum negatiu $- (E + E')$ en uns mateixos instants.

Una ordenada qualsevulga de la corba g tindrà per valor $e'' = e + e'$, essent e i e' les valors instantànies de les forces electromotrius en el moment considerat, però $e = E \sin \alpha$ i $e' = E' \sin \alpha$, per tant, $e'' = (E + E') \sin \alpha$, i com que $E + E'$ és constant, e'' serà proporcional a $\sin \alpha$, per tant, la corba g és una sinusoide, l'amplitud de la qual és $E + E'$.

De la mateixa manera que a una força electromotriu sinusoidal correspon una sinusoide, a tota sinusoide correspon una força electromotriu sinusoidal; ara bé, la sinusoide g l'amplitud de la qual és $E + E'$, representa una força electromotriu la valor màxima de la qual és $E + E'$, que serà la d'un conductor c, igual als anteriors, que es trobarà de o a una distància tal que $o\,c = E + E'$, i com que $E = o\,a$ i $E' = o\,b$ tindrem $o\,c = o\,a + o\,b$, i, efectivament, g és la sinusoide corresponent al vector $o\,c$, suma dels vectors $o\,a$ i $o\,b$.

Tot ço que deixem dit és aplicat a un nombre qualsevol de forces electromotrius, per tant, *la valor instantània de la suma de diverses forces electromotrius que estan en fase, és igual a la suma de les valors instantànies d'aquestes forces electromotrius; la força electromotriu resultant està en fase amb elles i la sinusoide que la representa és la suma de les sinusoides de les dites forces electromotrius.*

Problema. — Quina serà la f. e. m. resultant de dues forces electromotrius en fase, les valors màximes respectives de les quals són 10 i 15 volts amb una freqüència de 50 cicles per segon, al cap de $\frac{1}{80}$ de segon de començar el moviment : primer, partint de $\alpha = o$; segon, partint de $\alpha = 195°$ (fig. 8)?

Resolució. — A la freqüència de 50 cicles per segon correspon un període $T = \frac{1}{\sim} = 0{,}02$ segons. Si en 0,02 segons és recorregut 1 cicle o 360°, en $\frac{1}{80}$ de segon seran recorreguts

$$\frac{\frac{1}{80} \times 360}{0{,}02} = 225^\circ.$$

1.r Si els conductors parteixen de 0° al cap de $\frac{1}{80}$ de segon es trobaran a 225° de l'origen, i la força electromotriu resultant serà $e'' = (E + E')$ sin $\alpha = (10 + 15)$ sin 225°; però sin $225^\circ = -0{,}707$, per tant, $e'' = (10 + 15)$ $(-0{,}707) = -17{,}68$ volts.

2.n Si els conductors parteixen de 195°, l'angle descrit serà el mateix de 225°, però es trobaran a 225° + 195° de l'origen, o sigui a 420°, i tindrem $e'' = (10 + 15)$ sin 420°, però sin $420^\circ =$ sin $(420^\circ - 360^\circ) =$ sin $60^\circ = +0{,}5$, per tant, $e'' = (10 + 15)\ (+0{,}5) = 12{,}5$ volt. La primera valor es troba en l'onda negativa de la sinusoide i la segona en la positiva.

SUMA DE FORCES ELECTROMOTRIUS QUE NO ESTAN EN FASE

11. Del que havem exposat en el número anterior es desprèn que dues forces electromotrius alternes no estan en fase quan, àdhuc essent d'igual freqüència, no passen simultàniament per sos màximums positius o negatius. En aquest cas diem també que les forces electromotrius estan *fora de fase,* que presenten una *diferència de fase* i, amb major o menor propietat, que estan *defasades* o *decalades.*

Per compendre en què consisteix la diferència de fase de dos corrents alterns fixem-nos en la fig. 9, en la qual, seguint el sistema de representació usat fins aquí, *a* i *b* són dos conductors d'igual longitud subjectes a girar a l'entorn de *o*, conservant invariable sa distància angular. Ja que es tracta de dos conductors iguals que es mouen amb una mateixa velocitat en un mateix camp magnètic, ses forces electromotrius màximes seran iguals; per tant, les sinusoides a' i b' que les representen tindran una mateixa amplitud igual a la força electromotriu màxima E dels conductors. En començar el moviment, el conductor *a* es troba en l'origen i sa força electromotriu serà $e = o$, però el conductor *b* es troba ja formant un angle φ amb l'origen, per tant, sa força electromotriu serà $e' = E$ sin φ. Quan *b* arribi a 90° de l'origen, sa força electromotriu assoleix el màximum positiu E, però a *a* li falta encara descriure l'angle φ per a assolir el dit màximum, car les forces electromotrius dels conductors a i b presenten una diferència de fase, la qual és precisament l'angle φ que formen els dits conductors. Com que per donar una volta completa esmercen ambdós conductors un mateix temps, les longituds $a' a''$ i $b' b''$ seran iguals; per tant, les sinusoides a' i b' seran indèntiques, però la b' avança la a' de l'angle φ, o del temps necessari per a recórrer-lo, representats ambdós per la distància $a' b'$ presa sobre l'eix horitzontal.

Unint, com en el cas anterior, els conductors a i b de manera que llurs forces electromotrius s'afegeixin, la suma de les forces electromotrius instantànies de a i de b serà la suma de les ordenades de les sinusoides a' i b', corresponents als moments considerats, així en el moment en què a es troba a l'origen, sa força electromotriu és nul·la i la sinusoide a' talla l'eix horit-

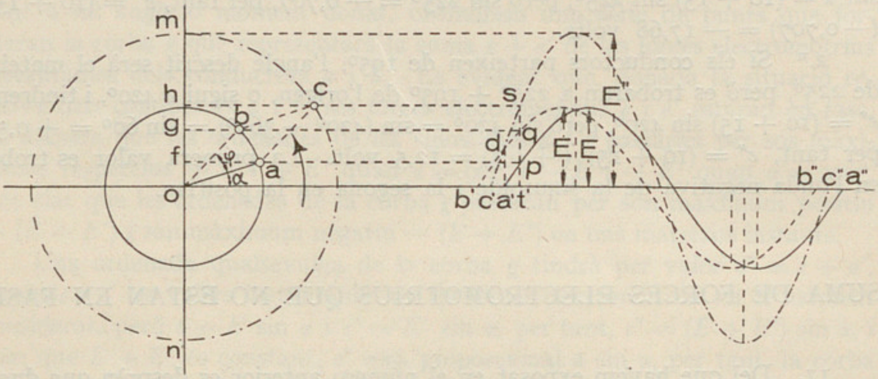

FIG. 9

zontal per a començar a pendre valors positives, però en aquest instant la força electromotriu del conductor b, que *ja ha passat* per l'origen, té una valor $a'd$; per tant, la suma e'' de les forces electromotrius e i e' serà $a'd$. Quan el conductor a forma l'angle α amb l'origen, sa força electromotriu és $t\,p$, i en aquest instant la del conductor b és $t\,q$; per tant, la suma e'' d'ambdues forces electromotrius serà $t\,p + t\,q = t\,s$. Procedint d'idèntica manera amb altres parells de valors de les ordenades de a' i de b' corresponents a altres angles α obtindrem els punts de la corba c', que representarà la suma de les forces electromotrius dels conductors a i b.

12. Si tracem (fig 9), la diagonal $o\,c$ del paral·lelogram construït amb les rectes $o\,a$ i $o\,b$, la longitud de la qual serà $o\,c = 2\ o\,b \cos\frac{\varphi}{2}$, i suposem que en l'extrem c existeix un conductor igual als a i b, sa força electromotriu màxima serà (segons la proporció $\frac{E}{o\,b} = \frac{E''}{o\,c}$), $E'' = \frac{E \times oc}{o\,b}$, però $E = ob$ i

$oc = 2\ o\ b \cos\frac{\varphi}{2} = 2\ E \cos\frac{\varphi}{2}$, per tant, $E'' = 2\ E \cos\frac{\varphi}{2}$. Com que en l'instant considerat en la figura el conductor *c* forma un angle $\alpha + \frac{\varphi}{2}$ amb l'origen, sa força electromotriu serà en el dit instant $E'' \sin(\alpha + \frac{\varphi}{2})$, o bé $2\ E \cos\frac{\varphi}{2} \sin(\alpha + \frac{\varphi}{2})$. Ara bé : la projecció de *o c* sobre la recta *m n* perpendicular a l'eix horitzontal té per valor $o\ h = o\ c \sin(\alpha + \frac{\varphi}{2}) = 2\ E \cos\frac{\varphi}{2} \sin(\alpha + \frac{\varphi}{2})$, però la suma de les projeccions *o f* i *o g* de *o a* i de *o b* sobre la mateixa recta *m n*, que és igual a la projecció de *o c*, és precisament e'', per tant, $e'' = 2\ E \cos\frac{\varphi}{2} \sin(\alpha + \frac{\varphi}{2})$. Com que $2\ E \cos\frac{\varphi}{2}$ és constant, e'' és proporcional al sinus de $\alpha + \frac{\varphi}{2}$, per tant, la corba c', representació de les valors de e'', *és una sinusoide*, l'amplitud de la qual és $2\ E \cos\frac{\varphi}{2}$. És evident que el temps empleat pel conductor *c* en descriure una circumferència és igual al que necessiten els conductors *a* i *b*, per tant, $c'c'' = a'a'' = b'b''$. Quan el vector *o c* coincideix amb l'eix horitzontal, els conductors *b* i *a* formen amb el dit eix un angle $\frac{\varphi}{2}$, trobant-se *b* al damunt i *a* al dessota, de manera que en aquesta posició les ordenades de les sinusoides a' i b' tenen valors iguals i de signe contrari i llur suma algèbrica serà zero, per tant, la sinusoide c' tallarà l'eix en un punt per al qual $c'b' = c'a'$.

13. De l'expressió $e'' = 2\ E \cos\frac{\varphi}{2} \sin(\alpha + \frac{\varphi}{2})$ es dedueix que si $\varphi = o$, $\frac{\varphi}{2} = o$, $\cos\frac{\varphi}{2} = 1$ i $\sin(\alpha + \frac{\varphi}{2}) = \sin\alpha$, per tant, $e'' = 2\ E \sin\alpha$. En aquest cas, la distància $a'b'$ és nul·la, les sinusoides a' i b' es confonen en una sola, i la c', suma d'ambdues, té per ordenades el doble de les d'una d'elles, i així té d'ésser ja que les valors instantànies de les forces electromotrius dels conductors *a* i *b* seran iguals i del mateix signe, per formar ambdós uns mateixos angles α amb l'origen.

Si $\varphi = 180^o$, $\frac{\varphi}{2} = 90^o$, $\cos\frac{\varphi}{2} = o$, i, per tant, $e'' = o$, de manera que qualsevulla que sigui la posició que ocupen els conductors *a* i *b* mantenint-se a 180^o l'un de l'altre, la força electromotriu resultant, considerada com a suma algèbrica de les forces electromotrius de *a* i de *b*, serà zero. En aquestes condicions les sinusoides a' i b' seran iguals, però distanciades de mig període, de manera que dessota una onda positiva de a' correspondrà exactament una onda negativa de b' i dessota una positiva de b' una de negativa de a' i la suma algèbrica de ses ordenades serà constantment nul·la. En aquest cas, es diu que les dues f. e. m. estan *en oposició*. Segons la construcció indicada, el conductor c es trobaria en el centre o, i sa força electromotriu, que és la resultant de les forces electromotrius de a i de b seria sempre igual a zero.

14. Si les forces electromotrius dels conductors a i b són desiguals (fig. 10), estaran representades pels vectors $o\,a$ i $o\,b$, de longituds E i E', els quals formaran l'angle φ que és la diferència de fase. La construcció del diagrama es portarà a fi de la manera indicada en els números precedents, les forces electromotrius e i e' estaran representades per les sinusoides a' i b' les amplituds de les quals seran, respectivament, E i E' i la valor instantània de $e + e'$ es trobarà sumant les ordenades d'ambdues sinusoides, corresponents a uns mateixos angles o temps. En un instant qualsevol t aquesta suma serà $t\,p + t\,q = t\,s$ igual a la suma de les pro-

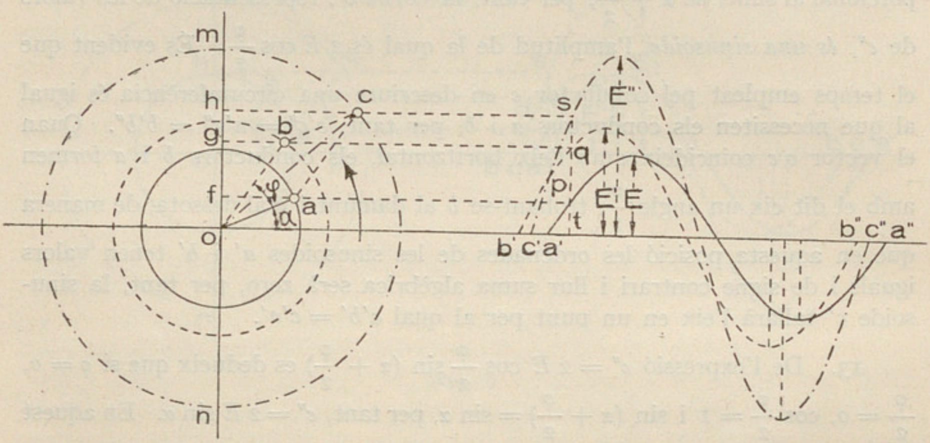

FIG. 10

jeccions $o\,f$ i $o\,g$ dels vectors $o\,a$ i $o\,b$ sobre $m\,n$, però aquesta suma és la projecció de la diagonal $o\,c = E''$ del paral·lelogram construït amb $o\,a$ i $o\,b$, i com que aquesta projecció és proporcional al sinus de l'angle format pel vector $o\,c$ amb l'eix horitzontal, la corba c', que és la suma de les sinusoides a' i b', és també una sinusoide, l'amplitud de la qual és E'' i que tindrà el mateix període que les a' i b', de manera que $c'c'' = a'a'' = b'b''$. La força electromotriu resultant estarà, segons es veu en la figura, avançada respecte a la de a i retardada respecte a la de b, i aquests angles d'avenç i de retard estaran donats per la posició de la diagonal $o\,c$ respecte als vectors $o\,a$ i $o\,b$.

Podríem trobar la valor de $o\,c = E''$ en funció de cos φ i de les forces electromotrius màximes E i E', com vam fer en el cas anterior, però l'expressió de E″ resultaria més complicada i és preferible deduir-la de la diagonal del paral·lelogram construït amb E i E' (1).

Per trobar la suma de tres o més forces electromotrius alternes de fases distintes, sumarem dues qualsevulla d'elles després la resultant d'aquestes amb una altra, i així seguint fins a obtenir la resultant total.

Del que havem exposat es dedueix que *la suma de les valors instantànies de diverses forces electromotrius que no estan en fase, està representada per la sinusoide corresponent a la projecció, sobre una recta normal a la posició d'origen, de la resultant de les valors màximes de les dites forces electromotrius.*

VALORS INSTANTÀNIES, MÀXIMA MITJANA I EFICAÇ D'UNA FORÇA ELECTROMOTRIU SINUSOIDAL

15. En una força electromotriu hi ha quatre quantitats que importa conèixer, a saber, la *valor instantània e*, o sigui la valor que en un moment donat té l'ordenada de la sinusoide que la representa; la *valor màxima E*, que és l'amplitud de la sinusoide, igual a l'ordenada màxima que, com sabem correspon al temps $o\,t' = 90^o = \frac{T}{4}$; la *valor mitjana*, que és la mitjana de les ordenades durant *mig període*, puix és evident que la mitjana de les ordenades durant un període complet és igual a zero, i, per últim, la *valor eficaç*. Les valors instantànies i màxima poden pendre's directament de la sinusoide, i la segona és particularment important, puix quan es tracta d'aparells d'alta tensió, l'isolament dels quals deu ésser estudiat amb detenció, dóna a conèixer la tensió màxima a què està sotmès.

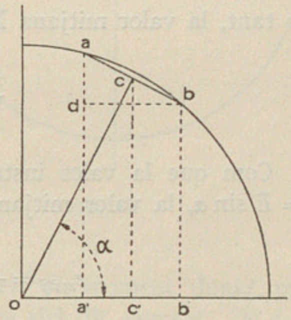

FIG. 11

16. *Força electromotriu mitjana.* — Segons havem dit, la valor mitjana de la força electromotriu, o sigui la força electromotriu mitjana, és la mitjana de les ordenades d'una sinusoide durant mig cicle, o ço que és igual, durant $\frac{1}{4}$ de període començant per $t = o$, puix en el segon quart de període les valors de les ordenades es reprodueixen decreixent. Per trobar aquesta valor mitjana dividim $\frac{1}{4}$ de circumferència (fig. 11) en n parts iguals molt petites $a\,b$, tracem la perpendicular $c\,c'$ al radi horitzontal des del punt c mitjà de

(1) La valor de E'', segons la trigonometria, és $\sqrt{E^2 + E'^2 + 2\,EE' \cos \varphi}$.

$a\,b$, el radi $o\,c$ i les rectes $b\,d$ i $a\,d$ perpendiculars respectivament a $c\,c'$ i al radi hortizontal. Els triangles $o\,c\,c'$ i $a\,b\,d$ són semblants i tindrem

$$\frac{c\,c'}{o\,c} = \frac{d\,b}{a\,b} = \frac{a'b'}{a\,b} = \sin\alpha.$$

Per a cada element $a\,b$ obtindrem la valor de sin α expressat, per tant, sumant totes aquestes valors tindrem, designant per r el radi,

$$\Sigma \sin\alpha = \frac{\Sigma\, a'b'}{a\,b} = \frac{r}{a\,b} = \frac{r}{\dfrac{\frac{1}{4}\,2\,\pi\,r}{n}}.$$

d'on

$$\Sigma \sin\alpha = \frac{2\,n}{\pi}$$

per tant, la valor mitjana Σ sin α serà, dividint per n.

$$\frac{\Sigma \sin\alpha}{n} = \frac{2}{\pi} = 0{,}637$$

Com que la valor instantània d'una força electromotriu sinusoidal és $e = E \sin\alpha$, la valor mitjana serà $E \times$ valor mitjana de sin α, o sigui

$$e_{mitj} = \frac{2}{\pi} E \quad \text{o bé} \quad e_{mitj} = 0{,}637\, E$$

Així, doncs : *per trobar la valor mitjana d'una força electromotriu sinusoidal, multiplicarem la valor màxima de la dita força electromotriu per*

$$\frac{2}{\pi} = 0{,}637.$$

17. Tot el que havem dit de les forces electromotrius s'aplica als corrents produïts per elles. La intensitat i que en un moment donat passa per un circuit de resistència R sobre el qual actua una força electromotriu e, serà $i = \frac{e}{R}$. Quan e adquireix sa valor màxima E, la intensitat arriba a son màximum I i tindrem $I = \frac{E}{R}$. Si la força electromotriu és sinusoidal, sa valor instantània és, com sabem, $e = E \sin\alpha$, per tant, la intensitat del corrent en aquell moment serà $i = \frac{E \sin\alpha}{R}$ i com que $\frac{E}{R} = I$ tindrem $i = I \sin\alpha$, però I és constant, per tant, i varia proporcionalment al sinus de α i pot, per

tant, ésser representada per una sinusoide, l'amplitud de la qual serà la intensitat màxima I. De l'expressió $i = I \sin \alpha$ es dedueix, com en el cas d'una força electromotiu, que $i_{mitj} = I \times$ valor mitjana de $\sin \alpha$, per tant, tindrem $i_{mitj} = \frac{2}{\pi} I = 0{,}637\ I$.

La suma d'intensitats que estiguin o no en fase, com seran les produïdes en els conductors a i b estudiats en els números precedents, és obtinguda de la mateixa manera que quan es tracta de forces electromotrius, això és, sumant les sinusoides que les representen.

18. *Força electromotriu eficaç.* — La valor *eficaç* (anomenada també *efectiva)* d'una força electromotriu alterna és la d'una força electromotriu contínua que, aplicada a un circuit que *sols presenti resistència òhmica,* produeixi el mateix efecte calorífic que aquella, en un mateix espai de temps. De manera que si una força electromotriu alterna produeix sobre un circuit que tingui sols resistència òhmica, el mateix efecte tèrmic que una força electromotriu contínua de 100 volts direm que la força electromotriu alterna té una valor de 100 volts.

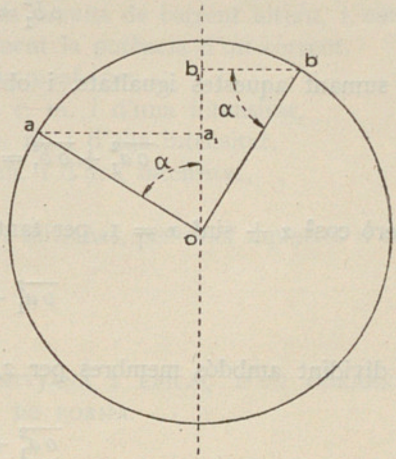

FIG. 12

L'efecte tèrmic produït per un corrent és, en un moment donat, proporcional al quadrat de la intensitat instantània del dit corrent. Si i és aquesta intensitat i R la resistència òhmica del circuit, la potència convertida en calor, serà Ri^2 però $i = \frac{e}{R}$ (designant per e la valor instantània de la força electromotriu corresponent), i, per tant, $i^2 = \frac{e^2}{R^2}$, de manera que la potència convertida en calor serà $R\,\frac{e^2}{R^2} = \frac{e^2}{R}$, i com que R és constant, o pot considerar-se com a tal, la dita potència serà proporcional al quadrat de la força electromotriu instantània. L'efecte tèrmic produït en mig cicle serà proporcional a la mitjana dels quadrats d'aquestes forces electromotrius instantànies durant mig cicle, per tant, la valor eficaç de la força electromotriu alterna serà la rel quadrada de la mitjana dels quadrats de les valors instantànies de la força electromotriu. Veiem quina relació existeix entre la valor eficaç d'una força electromotriu i sa valor màxima.

Siguin oa i ob (fig. 12) dos vectors les longituds dels quals representin la força electromotriu E, que formen entre si un angle constant de 90°. Les valors instantànies de les forces electromotrius que representen seran, respectivament, $o\,a_1$ i ob_1, i tindrem

$$o\,a_1 = o\,a \cos \alpha$$
$$o\,b_1 = o\,b \sin \alpha$$

d'on

$$\overline{o\,a_1}^2 = \overline{o\,a}^2 \cos^2 \alpha$$
$$\overline{o\,b_1}^2 = \overline{o\,b}^2 \sin^2 \alpha$$

i sumant aquestes igualtats, i observat que $o\,a = o\,b = E$,

$$\overline{o\,a_1}^2 + \overline{o\,b_1}^2 = E^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

però $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, per tant,

$$\overline{o\,a_1}^2 + \overline{o\,b_1}^2 = E^2$$

i dividint ambdós membres per 2,

$$\frac{\overline{o\,a_1}^2 + \overline{o\,b_1}^2}{2} = \frac{E^2}{2}$$

però, $\overline{o\,a_1}^2 + \overline{o\,b_1}^2$ és la suma dels quadrats de les forces electromotrius instantànies, i aquesta suma és constant per a totes les posicions del parell de vectors, puix és igual a E^2, per tant,

$$\frac{\overline{o\,a_1}^2 + \overline{o\,b_1}^2}{2}$$

és la valor mitjana dels quadrats de les forces electromotrius instantànies, i, per tant, el quadrat de la força electromotriu eficaç, de manera que aquesta serà

$$e_{ef} = \sqrt{\frac{E^2}{2}} = \frac{E}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,E$$

Així, doncs : *la valor eficaç d'una força electromotriu sinusoidal és igual a la valor màxima de dita força electromotriu multiplicada per* $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$.

De la mateixa manera demostraríem que la intensitat eficaç d'un corrent sinusoidal és igual a sa valor màxima multiplicada per

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707, \text{ i per tant, } i_{ef} = 0{,}707\ I.$$

19. Les valors eficaces de la força electromotriu i de la intensitat d'un corrent altern són les més empleades en els càlculs, i són les que indiquen els vòltmetres i els ampèrmetres aplicats als circuits de corrent altern, i, com veurem més endavant, en depèn directament la potència d'un corrent.

D'ací endavant designarem, respectivament, per

e, i les valors instantànies d'una f. e. m. i d'una intensitat,

E, I les valors màximes d'una f. e. m. i d'una intensitat,

$\mathcal{E}$, $\mathcal{J}$ les valors eficaces d'una f. e. m. i d'una intensitat,

no usant lletres especials per a les valors mitjanes, per ésser aquestes d'escassa aplicació en els càlculs.

RELACIÓ ENTRE LES VALORS MÀXIMA, MITJANA I EFICAÇ D'UN CORRENT ALTERN. FACTOR DE FORMA.

20. De les expressions de les valors mitjana i eficaç en funció de la valor màxima d'una força electromotriu i d'una intensitat, deduïdes en els números precedents, es desprèn que entre la valor eficaç i la valor mitjana existeix una relació ben definida : en efecte,

$$\begin{aligned} \text{valor eficaç} &= 0{,}707 \text{ de la valor màxima} \\ \text{valor mitjana} &= 0{,}637 \text{ de la valor màxima} \end{aligned}$$

per tant,

$$\frac{\text{valor eficaç}}{\text{valor mitjana}} = \frac{0{,}707}{0{,}637} = 1{,}11$$

Cal, però, no oblidar que si bé la valor mitjana és la mitjana de les valors instantànies i la valor eficaç és la rel quadrada de la mitjana dels quadrats de les valors instantànies *qualsevol que sigui la forma de la corba que representa les dites valors instantànies,* les relacions abans indicades sols són exactes quan aquestes corbes són sinusoides, i per a una altra forma de corba seran distintes.

Com ja hem indicat, la força electromotriu produïda pels alternadors té una forma que, en general, és distinta d'una sinusoide, presentant en la part superior un tros més o menys pla, o punxegut. En la fig. 13 (a) es representa una força electromotriu de forma rectangular tal com l'obtindríem commutant a intervals iguals de temps un corrent continu. És evident que en aquest cas la valor mitjana de les forces electromotrius instantànies és igual, en mig període, a la força electromotriu màxima,

$$\text{valor mitjana} = E$$

i que la rel quadrada de la mitjana dels quadrats de les valors instantànies és també igual a la força electromotriu màxima, per tant,

$$\text{valor eficaç} = E$$

d'on resulta

$$\frac{\text{valor eficaç}}{\text{valor mitjana}} = \frac{E}{E} = 1$$

Quan la forma de la corba és triangular (b), la valor de la força elec-

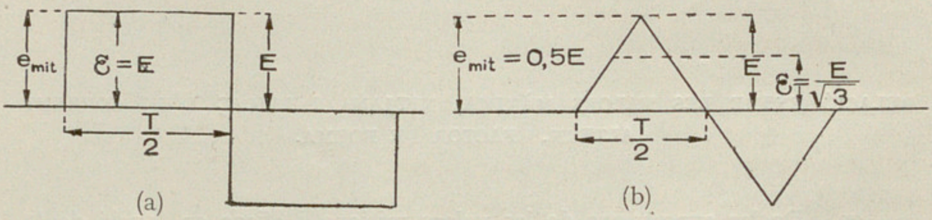

FIG. 13

tromotriu mitjana és 0,5 E, i el càlcul demostra que la força electromotriu eficaç és

$$\text{valor eficaç} = \frac{E}{\sqrt{3}} = 0{,}58\,E$$

per tant, per a aquesta forma de corba tindrem

$$\frac{\text{valor eficaç}}{\text{valor mitjana}} = \frac{\dfrac{E}{\sqrt{3}}}{0{,}5\,E} = 1{,}16$$

Veiem, doncs, que les valors mitjana i eficaç varien segons la forma de la corba i que la relació $\dfrac{\text{valor eficaç}}{\text{valor mitjana}}$, coneguda amb el nom de *factor de forma*, depèn de la forma de la corba de la força electromotriu.

Resumint tot allò que havem dit sobre les valors mitjana i eficaç i el factor de forma, donem la taula següent, que indica per a distintes formes de corbes, les valors de les quantitats mencionades:

Forma de la corba	Valor eficaç	Valor mitjana	Factor de forma
sinusoidal	0,707 E	0,637 E	$\frac{0,707}{0,637} = 1,11$
rectangular......	1,00 E	1,00 E	$\frac{1}{1} = 1,00$
triangular	0,58 E	0,50 E	$\frac{0,58}{0,50} = 1,16$

ÚS DELS DIAGRAMES VECTORIALS

21. En els números anteriors hem vist que la suma de diverses forces electromotrius o intensitats és obtinguda sumant les sinusoides que les representen, però, deixant a part una cosa tan enfadosa com és haver de traçar per a cada corrent sa corba especial, quan aquesta no és una sinusoide és molt difícil conèixer sa forma exacta i llavors el problema es complica extraordinàriament. Per trobar la resultant de dues o més forces electromotrius o intensitats, sense preocuparse de la forma de la corba, són usats els *diagrames vectorials*, dels quals hem fet ús implícitament.

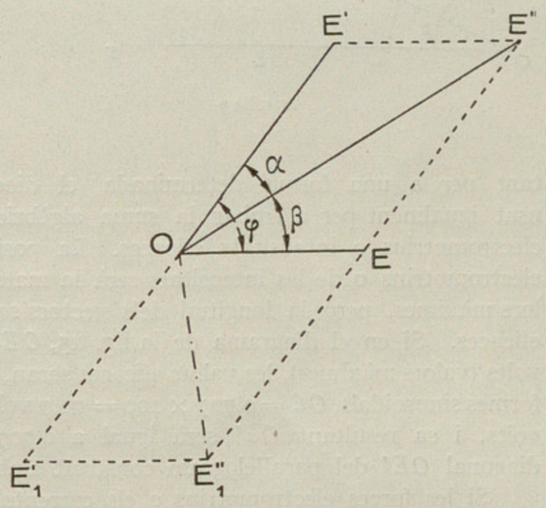

FIG. 14

En trobar la suma de diverses forces electromotrius valent-nos de les sinusoides representatives de les dites forces, hem vist que la corba resultant és una sinusoide que té per amplitud la força electromotriu màxima, representada per la diagonal del paral·lelogram construït amb les forces electromotrius donades, considerades en sa valor màxima.

En la fig. 14, OE i OE' representen, a una escala convenient, les valors màximes E i E' de dues forces electromotrius que tenen una diferència de fase indicada per l'angle φ, i la diagonal OE'' del paral·lelogram construït sobre OE i OE' representarà, a la mateixa escala, la suma algèbrica de les forces electromotrius OE i OE', la qual formarà els angles α i β amb les dites forces electromotrius. En tot diagrama vectorial cal distingir : la *longitud* dels vectors, que representa la magnitud de les forces electromotrius; sa *posició* relativa, o sigui l'angle que formen entre si, que és l'angle φ de la diferència de fase i son *sentit*, o sigui el sentit en què actuen les forces electromotrius. Generalment és indicat el sentit dels vectors per mitjà d'una sageta en l'extrem de la recta que el representa, però aquesta indicació és supèrflua tota vegada que el sentit està perfectament marcat per la posició mateixa dels vectors; així, la força electromotriu OE' es dirigeix de O a E', la OE, de O a E i la resultant OE'' de O a E''. Si la força electromotriu OE' actués en sentit oposat a l'indicat, estaria representada pel vector OE'_1, però llavors l'angle de fase no seria φ, sinó $180^o - \varphi$ i la resultant de OE i OE'_1 seria la diagonal OE''_1 del paral·lelogram construït amb OE i OE'_1. Veiem, doncs, que si l'angle φ està determinat, també ho estaran la posició dels vectors i son sentit.

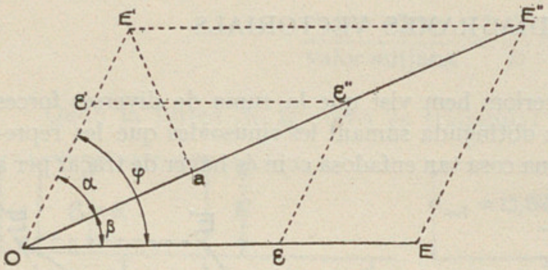

FIG. 15

22. Existint entre les valors eficaces i les màximes una relació que, encara que varia amb la forma de la corba, és constant per a una forma determinada, el diagrama vectorial podrà ésser usat igualment per a trobar la suma algèbrica, o la resultant, de forces electromotrius o intensitats eficaces. La posició i el sentit de les forces electromotrius o de les intensitats serà la mateixa que per al cas de les valors màximes, però la longitud dels vectors serà la corresponent a les valors eficaces. Si en el diagrama de la fig. 15, OE representa 100 volts i OE' 50 volts (valors màximes), les valors eficaces seran, respectivament, si es tracta de formes sinusoidals, $O\mathcal{E} = 0{,}707 \times 100 = 70{,}7$ volts i $O\mathcal{E}' = 0{,}707 \times 50 = 35{,}35$ volts, i sa resultant $O\mathcal{E}''$ serà igual a $0{,}707 \times OE''$ i coincidirà amb la diagonal OE'' del paral·lelogram construït amb OE i OE'.

Si les forces electromotrius o els corrents es trobessin en fase, φ seria igual a zero, i llavors la diagonal es convertiria en la suma aritmètica dels vectors; en efecte, projectant el punt E' sobre OE'', tindrem $Oa = OE' \cos \alpha$ i $aE'' = E'E'' \cos \beta$, d'on $Oa + aE'' = OE'' = OE' \cos \alpha + OE \cos \beta$, però quan $\varphi = 0$, α i β es redueixen també a zero, per tant, $\cos \alpha = 1$ i $\cos \beta = 1$ i, per consegüent, $OE'' = OE' + OE$.

Quan l'angle φ augmenta fins a 180^o hi ha tres casos que mereixen ésser estudiats. 1.r Si E és major que E', $\alpha = 180^o$, i, per tant, $\cos \alpha = -1$; β serà llavors igual a zero, i $\cos \beta = 1$, per tant, $OE'' = OE' \times (-1) + OE \times (+1)$

$= OE - OE'$. 2.n Si $E = E'$, $\alpha = \beta = 90^{o}$ i $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, per tant, $OE'' = 0$. 3.r Si E és menor que E', $\alpha = 0$ i $\beta = 180^{o}$, i, per consegüent, $\cos\alpha = 1$ i $\cos\beta = -1$, i la resultant serà $OE'' = OE' \times (+1) + OE \times (-1) = EO' - OE$.

De manera que : *quan dues forces electromotrius van en un mateix sentit, la resultant és igual a la suma, i quan van en sentit oposat és igual a la diferència de les dites forces electromotrius, i en aquest cas estarà dirigida en el sentit de la major. Quan les forces electromotrius són oposades i iguals, la resultant és nul·la.* Hom obté els mateixos resultats quan, en lloc de forces electromotrius, es tracta d'intensitats de corrent.

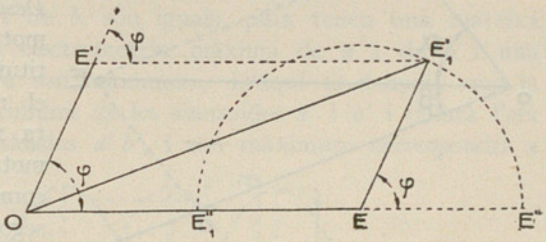

FIG. 16

23. *Triangle de forces electromotrius.* — Per obtenir la resultant de dues forces electromotrius no és necessari traçar el paral·lelogram, sinó que pot abreujar-se la construcció com veiem en la fig. 16. La diagonal OE del paral·lelogram $OE'E'_1E$ construït amb les forces electromotrius donades és el costat OE'_1 del triangle OEE'_1 construït amb el vector OE i la recta EE'_1 igual i paral·lela al vector OE'; per tant, per obtenir la resultant de dues forces electromotrius E i E' bastarà traçar-ne una E′ a partir de l'extrem de l'altra de manera que formi amb la prolongació d'aquesta l'angle φ i la recta que uneix l'origen amb l'extrem de E' serà la resultant cercada.

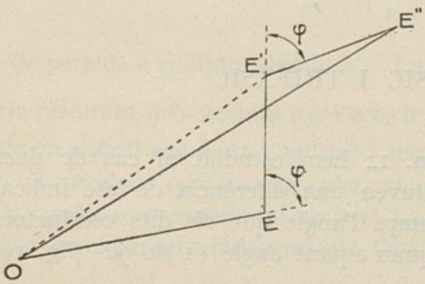

FIG. 17

Aquesta construcció permet compendre amb major claredat les conseqüències que hem deduït en el número anterior referents a les valors particulars de l'angle φ. En efecte, si $\varphi = 0$, el vector EE'_1 pren la posició EE'' i és evident que OE'_1 serà $OE'' = OE + EE''$. Si $\varphi = 180^{o}$ el vector EE'_1 pren la posició EE''_1 i és clar que la resultant serà $OE''_1 = OE - EE''_1$. Si EE'_1 fos major que OE, el punt E_1 cauria a l'esquerra de O i la resultant seria també la diferència de les forces electromotrius i estaria dirigida en sentit oposat a OE, o sigui en el sentit de la major.

La simplificació que obtenim amb l'ús del triangle de forces electromotrius es manifesta clarament en la fig. 17, on EE' és una força electromotriu que forma amb la OE un angle φ i $E'E''$ una altra que forma amb EE' l'angle φ'. La resultant de OE i EE' és OE' i la resultant d'aquesta i $E'E''$ és OE'', de manera que la resultant de diverses forces electromotrius és la recta que uneix el *principi* de la primera amb el *final* de l'última, o sigui en aquest cas, la recta que tanca el polígon $OEE'E''$.

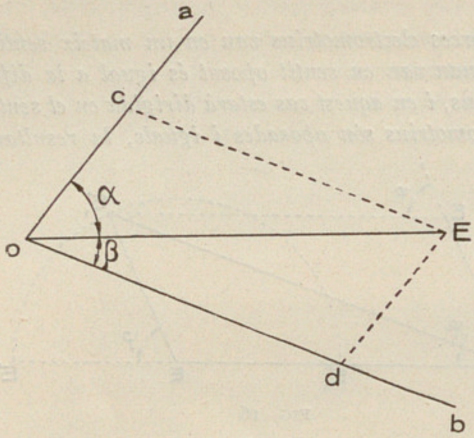

FIG. 18

24. *Descomposició de forces electromotrius i d'intensitats.* — *Descompondre* una força electromotriu o una intensitat és substituir-les per altres que produeixin el mateix efecte. En la figura 18, oE és la força electromotriu que es tracta de descompondre en dues de dirigides segons oa i ob que formen amb ella els angles α i β. Per això traçarem pel punt E la paral·lela Ec a ob i la Ed a oa i les longituds od i oc representaran les forces electromotrius cercades, ja que la resultant d'ambdues és la diagonal oE del paral·lelogram construït amb elles.

CORRENTS BIFÀSIC I TRIFÀSIC

25. *Corrent bifàsic.* — En el núm. 11 hem estudiat el cas de dues forces electromotrius iguals que presentaven una diferència de fase indicada per l'angle φ que era al mateix temps l'angle que els dits conductors formaven amb el centre de rotació o; quan aquest angle és de 90° (fig. 19)

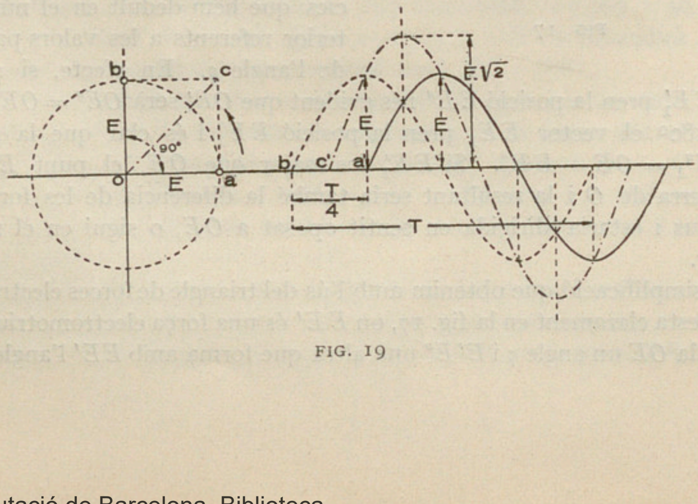

FIG. 19

les forces electromotrius de *a* i de *b* estan en *quadratura* i el conjunt de dues forces electromotrius, la diferència de fase de les quals és de 90°, o sigui $\frac{1}{4}$ de període, constitueix el *sistema bifàsic.* Quan la força electromotriu del conductor *b* és màxima, la de *a* és nul·la, i com que el moviment té lloc en el sentit de la sageta, la força electromotriu de *b* avança la de *a*, de $\frac{1}{4}$ de període. Les sinusoides *a′* i *b′* que representen les forces electromotrius respectives de *a* i de *b*, són iguals, puix tenen una mateixa amplitud *E* igual a la força electromotriu màxima de *a* i de *b* i una talla l'eix quan l'altra arriba a son màximum. D'aquí es dedueix que la resultant *c′* passarà pels màximums de les sinusoides *a′* i *b′* i tallarà l'eix en els punts mitjans de les distàncies *a′ b′*, i son màximum correspondrà a

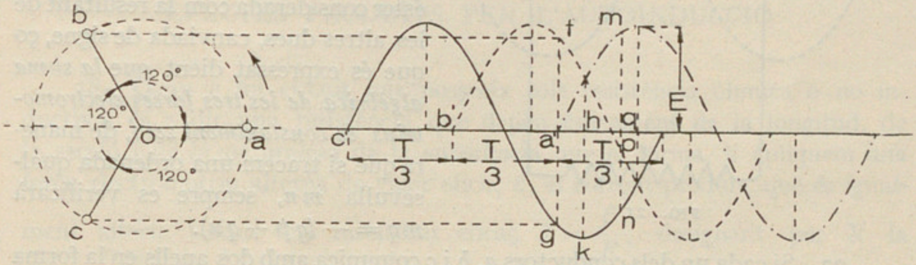

FIG. 20

$\frac{3}{8}$ de període a comptar des de *b′*. La valor del màximum de la sinusoide *c′* és la resultant dels vectors *o a* i *o b*, o sigui la diagonal *o c* del paral·lelogram (que en aquest cas és un quadrat) i tenim $\overline{oc}^2 = 2E^2$, d'on $oc = E\sqrt{2}$.

És evident que perquè existeixi una resultant cal que el principi d'un dels conductors comuniqui amb el final de l'altre, puix si no fos així existirien dos corrents independents l'un de l'altre.

26. *Corrent trifàsic.* — Si considerem tres conductors *a*, *b* i *c* (fig. 20) en els quals es desenrotlla una mateixa força electromotriu màxima *E*, que es troben a 120° l'un de l'altre, o sigui a $\frac{1}{3}$ de circumferència, obtenim les tres forces electromotrius representades per les sinusoides respectives *a′*, *b′* i *c′*, que formen ço que és anomenat un *sistema trifàsic.* Les tres forces electromotrius estan decalades de $\frac{1}{3}$ de període; la de *b* avança la de *a* de $\frac{3}{1}$ de període, i la de *c* avança de la mateixa quantitat la de *b*, de manera qpe quan la força electromotriu de *a* és nul·la, la de *b* tindrà la valor $a'f = 0{,}866\,E$ ja que $a'f = E \sin\alpha$ i en aquest cas $\alpha = 120°$, i, per tant,

$\sin \alpha = + 0{,}866$. En aquest mateix instant la força electromotriu de c serà $a'\,g$ igual i de signe contrari a $a'\,f$, puix $a'\,g = E \sin \alpha$ i en aquest moment $\alpha = 240^{\circ}$ i $\sin 240^{\circ} = -0{,}866$, per tant, $a'\,g = -0{,}866\,E$. Quan la força electromotriu de a arriba a son màximum positiu, corresponent a la part superior del diàmetre vertical, les forces electromotrius de b i de c són iguals entre si i negatives, essent sa valor $e = E \sin \alpha$; pel b, α valdrà 210° i pel conductor $b\,c$, 330° i $\sin 210^{\circ} = \sin 330^{\circ} = -0{,}5$, per tant, $e = -0{,}5\,E$.

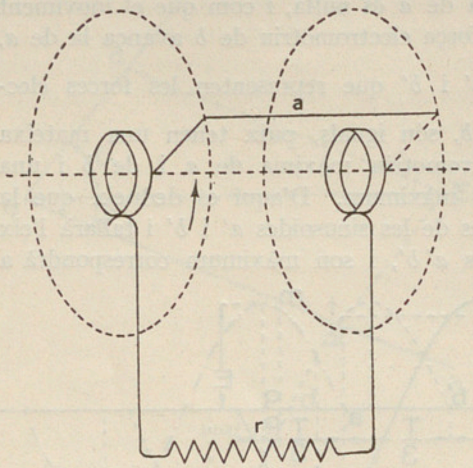

FIG. 21

En aquest sistema, una qualsevulla de les forces electromotrius pot ésser considerada com la resultant de les altres dues, canviada de signe, ço que és expressat dient que *la suma algèbrica de les tres forces electromotrius és constantment zero*, de manera que si tracem una ordenada qualsevulla $m\,n$, sempre es verificarà $m\,q = -(q\,p + q\,n)$.

27. Si cada un dels conductors a, b i c comunica amb dos anells en la forma indicada en la fig. 21, podran obtenir-se tres circuits distints r i es produiran tres corrents independents, cada un dels quals podrà ésser representat per una sinusoide anàloga a les de la fig. 20 decalades de $\frac{1}{3}$ de període de l'una respecte a l'altre, i si el sistema és equilibrat, és a dir, si les resistències dels tres circuits són iguals, les sinusoides, que són totes del mateix període, tindran també una mateixa amplitud, i, per tant, es verificaran entre els tres corrents les mateixes relacions que entre les forces electromotrius.

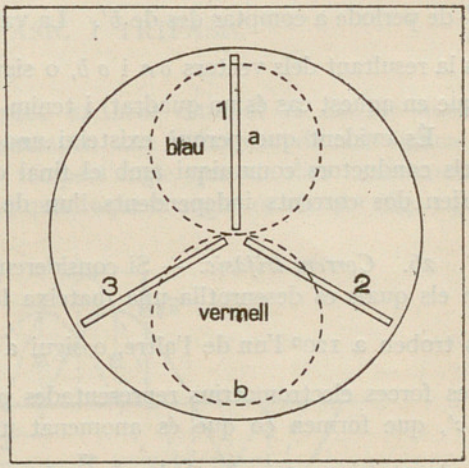

FIG. 22

Les variacions successives de les intensitats o de les forces electromotrius es veuen amb perfecta claredat per mitjà del següent experiment. En una fulla de paper tracem (fig. 22) dos cercles tangents a i b que pintarem de diferent color, l'un de blau i l'altre de vermell, per exemple.

Damunt d'aquesta fulla col·locarem un disc de cartró, al qual havem practicat tres escletxes estretes 1, 2 i 3, de longitud una mica major que el diàmetre de les circumferències, disposades radialment de manera que formin entre si angles de 120°. Si subjectem la fulla de paper i fem girar el disc de cartró amb moviment uniforme a l'entorn del punt de tangència, clavant-lo amb una agulla, veurem, a través de les escletxes, segments de distint color, la longitud dels quals varia contínuament. La longitud dels segments indica les valors de la força electromotriu, i el color el seu sentit; si el blau representa el sentit positiu, el vermell serà el negatiu. En la posició que marca la figura, la intensitat de la fase 1 té sa valor màxima positiva, i la de les fases 2 i 3 són iguals a la meitat de la màxima, ambdues negatives.

EFECTES PRODUÏTS PER L'AUTOINDUCCIÓ

28. Quan a un circuit que posseeix sols resistència òhmica o no inductiva, és a dir una resistència que depèn únicament de la longitud, de la secció i de la naturalesa de la substància que el forma, li apliquem una força electromotriu alterna de valor eficaç $\mathcal{E}$, el corrent produït, que és igualment altern, tindrà una intensitat eficaç $\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{R}$, designant per R la resistència del circuit, i aquesta intensitat serà igual a la que obtindríem si la força electromotriu fos contínua i de la mateixa valor. En qualsevol moment la intensitat serà proporcional a la valor instantània de la força electromotriu aplicada, de manera que tindrem $i = \frac{e}{R}$, anomenant i i e les valors instantànies de la intensitat i de la força electromotriu, respectivament. Quan e arriba a son màximum positiu E, la intensitat serà també màxima i positiva i tindrem $I = \frac{E}{R}$. En anul·lar-se e, la intensitat es reduirà a zero, de manera que la intensitat i la força electromotriu estaran en concordança de fase.

Si en lloc d'una resistència òhmica es tracta d'una resistència inductiva, o que presenta autoinducció, el corrent no seguirà instantàniament les variacions de la força electromotriu, sinó que es comportarà com si tingués inèrcia i quedarà retardada respecte a aquella. Quan la força electromotriu arriba a son màximum, té de transcórrer un cert temps perquè la intensitat arribi al seu, i quan aquella s'anul·la, la intensitat conserva encara una certa valor, de manera que la intensitat no estarà en fase amb la força electromotriu que l'origina. Demés, es produeix altre fenomen, la intensitat del corrent no és igual al quocient de la força electromotriu per la resistència hòmica del circuit, sinó menor, de manera que la resistència del circuit *sembla* major d'allò que realment és. Aquesta resistència que cal suposar perquè es verifiqui la llei de Ohm, és coneguda amb el nom de *resistència aparent,* del circuit; així, si una força electromotriu eficaç de 100 volts aplicada a un circuit inductiu, la resistència òhmica del qual és de 5 ohms, produeix un corrent de 2 ampers, tindrem $R = \frac{100}{2} = 50$ ohms; de manera que la resistència aparent és de 50 ohms, mentre que la resistència real del circuit és sols de 5 ohms.

29. Un circuit posseeix autoinducció quan el corrent que el travessa hi produeix una força electromotriu de sentit oposat a la principal, o sigui a la força electromotriu aplicada, que s'oposa a l'establiment del corrent. Quan un corrent circula per un conductor crea línies de força concèntriques a aquest; si el corrent és continu, el nombre de línies de força resta constant i no indueix en el conductor cap força electromotriu, però si varia alternati-

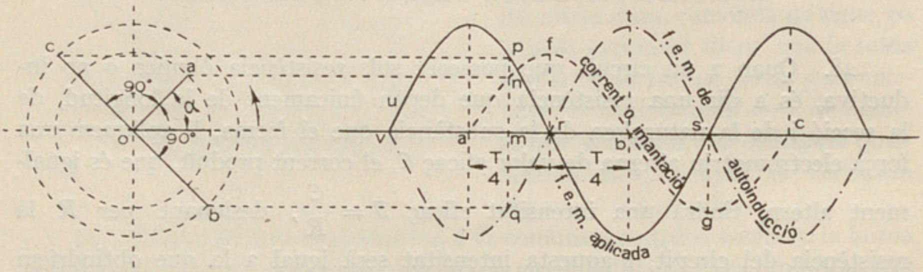

FIG. 23

vament neix en el conductor una força electromotriu de sentit oposat a l'aplicada. En un conductor recte l'efecte produït és molt petit, però si és enrotllat en forma de bobina, el fenomen és més marcat i ho és encara més si conté ferro en son interior. Hem vist en altre lloc que quan es produeix un canvi en el nombre de línies de força que passen per l'interior d'una bobina, es desenrotllen en aquesta forces electromotrius el sentit de les quals depèn del de la variació de les dites línies; si el nombre de línies creix, la força electromotriu desenrotllada, o sigui la força electromotriu d'autoinducció, té un sentit determinat i si disminueix té un sentit oposat. Ara bé : tot corrent altern que circula per una bobina produeix aquests canvis de flux magnètic; quan el corrent augmenta, el flux creix, i quan disminueix, el flux disminueix també. La variació del flux segueix la mateixa llei que la de la intensitat, per tant, podrà, com aquesta, ésser representada per una sinusoide que tallarà l'eix en els mateixos punts que la de la intensitat i assolirà els màximums positius en els mateixos instants que aquella, d'on es dedueix que el magnetisme i el corrent que el produeix estan en fase.

30. En la fig. 23, *a* és la sinusoide que representa les variacions de la intensitat, i ja que la imantació està en fase amb aquesta, la mateixa si-

nusoide pot representar, a una escala convenient, les variacions de la imantació. La força electromotriu d'autoinducció és proporcional a la rapidesa amb què el flux varia, i aquesta rapidesa és màxima en els punts *a*, *b*, *c*, on el magnetisme comença a créixer positivament o negativament, i nul·la en els moments en què aquell té sa màxima valor, o sigui en els punts *f*, *g*, puix en aquests la imantació és invariable durant un temps infinitament petit. Així, doncs, la força electromotriu d'autoinducció serà nul·la quan el corrent i la imantació arriben a son màximum, o sigui en els temps *a r*, *a s*, iguals, respectivament, a $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$ de període, i arribarà a son màximum en els punts *a*, *b* quan el corrent s'anul·la. D'això es dedueix que la corba de la força electromotriu d'autoinducció està *retardada* de $\frac{1}{4}$ de període, o sigui de 90° respecte a la de la intensitat, puix quan la intensitat del corrent arriba a son màximum positiu *r f*, té de trancórrer un temps $\frac{T}{4}$ perquè la força electromotriu d'autoinducció assoleixi el seu màximum *b t*.

La força electromotriu que caldrà aplicar al circuit, per establir el corrent, haurà d'ésser igual i oposada a la força electromotriu d'autoinducció i, per tant, estarà representada per la sinusoide *u* que tallarà l'eix en els mateixos punts *v*, *r*, *s* que la de l'autoinducció, però *avançada*, de $\frac{1}{2}$ període, o sigui de 180° respecte a aquesta. D'això es desprèn que el corrent *avança* de 90° la força electromotriu d'autoinducció i *retarda* de 90° la força electromotriu aplicada.

A l'esquerra de la figura són representades per les longituds *o a*, *o b* i *o c*, respectivament, les valors màximes de la intensitat del corrent, de la força electromotriu d'autoinducció i de la força electromotriu aplicada, essent *o a* normal a *o b*, i, per tant, a *o c*. En l'instant en què el corrent forma l'angle α amb l'origen, les valors d'aquestes tres quantitats són *m n*, *m q* i *m p*, les dues últimes iguals entre si i de signe contrari.

FORÇA ELECTROMOTRIU D'AUTOINDUCCIÓ

31. Segons varem veure en CORRENTS INDUÏTS, la valor de la força electromotriu desenrotllada en un conductor que talla un nombre de línies de força Φ en un temps t és

$$E = \frac{\Phi}{t}$$

en unitats absolutes, o

$$E = \frac{\Phi}{t\ 10^8}\ \text{volts.}$$

i si el conductor forma una bobina de n espires la força electromotriu serà $\frac{\Phi\, n}{t\ 10^8}$ volts.

Suposem una bobina de n espires per les quals passa un corrent altern d'una freqüència $\sim$ que produeix un flux màxim Φ; cada una de les n espires tallarà les Φ línies de força en un temps igual a $\frac{1}{4}$ de període, o sigui $\frac{1}{4 \sim}$ de segon, per tant, es produirà en la dita bobina una força electromotriu d'autoinducció, la valor de la qual, en volts, serà

$$E = \frac{4 \sim \Phi\, n}{10^8}$$

Com que Φ és el nombre màxim de línies de força tallades en el temps $t = \frac{1}{4 \sim}$, E serà la valor mitjana de la força electromotriu desenrotllada, i existint entre la valor mitjana i l'eficaç la relació

$$\frac{\mathcal{E}}{E} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

tindrem $E = \frac{2\,\mathcal{E}\sqrt{2}}{\pi}$. Igualant aquestes dues valors de E tindrem

$$\frac{2\,\mathcal{E}\sqrt{2}}{\pi} = \frac{4 \sim \Phi\, n}{10^8}$$

d'on

$$\mathcal{E} = \frac{2\,\pi \sim \Phi\, n}{10^8\ \sqrt{2}} \qquad (1)$$

En CORRENTS INDUÏTS vam veure igualment que el coeficient d'autoinducció d'una bobina de n espires és, en unitats absolutes,

$$L = \frac{4\,\pi\, n^2}{\frac{1}{\mu}\ \frac{l}{s}}$$

fórmula en la qual μ, l i s són, respectivament, la permeabilitat, la longitud i la secció del circuit magnètic, i que el flux produït per la dita bobina, quan passa per ella un corrent de I ampers, és

$$\Phi = \frac{0{,}4\,\pi\, n I}{\frac{1}{\mu}\,\frac{l}{s}}$$

D'aquesta expressió es dedueix $\frac{10\,\Phi}{I} = \frac{4\,\pi\, n}{\frac{1}{\mu}\,\frac{l}{s}}$, i substituint aquesta valor en l'expressió del coeficient d'autoinducció, tindrem

$$L = \frac{10\,\Phi\, n}{I}$$

en unitats absolutes, i dividint per 10^9

$$L = \frac{\Phi\, n}{10^8\, I} \text{ henris.}$$

En aquesta fórmula, I és la valor màxima del corrent, puix produeix el flux màxim Φ, i com que $I = \mathcal{J}\sqrt{2}$, designant per $\mathcal{J}$ la valor eficaç de la intensitat, tindrem

$$L = \frac{\Phi\, n}{10^8\, \mathcal{J}\sqrt{2}}$$

d'on $\Phi\, n = 10^8\, L\, \mathcal{J}\sqrt{2}$ i posant aquesta valor en la fórmula (1), obtenim

$$\mathcal{E} = \frac{2\,\pi\, L\, \mathcal{J} \backsim 10^8 \sqrt{2}}{10^8 \sqrt{2}}$$

d'on, finalment,

$$\mathcal{E} = 2\,\pi \backsim L\, \mathcal{J} \tag{2}$$

fórmula que expressa en volts la valor eficaç de la força electromotriu d'autoinducció d'una bobina el coeficient d'autoinducció de la qual és L henris, quan hi circula un corrent d'intensitat eficaç $\mathcal{J}$ ampers amb una freqüència igual a $\backsim$.

32. *Resistència de l'autoinducció, o reactància.* — De la fórmula (2) del núm. 31 es dedueix

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{2\,\pi \sim L}$$

i si comparem aquesta valor de $\mathcal{J}$ amb la trobada en el núm. 28, $\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{R}$ veiem que la quantitat $2\,\pi \sim L$ representa una resistència, i, per tant, ha d'ésser expressada en ohms. Aquesta quantitat rep el nom de *reactància* o *inductància* i pot ésser considerada com la resistència que ofereix l'autoinducció. Així, per exemple, si a una bobina el coeficient d'autoinducció de la qual és de 0,03 henris, apliquem una força electromotriu alterna de 100 volts que té una freqüència igual a 50, la intensitat del corrent en la dita bobina serà $\mathcal{J} = \frac{100}{2 \times \pi \times 50 \times 0{,}03} = 10{,}6$ amp. en el supòsit que la resistència òhmica de la bobina sigui pràcticament nul·la. La resistència de l'autoinducció serà, en aquest cas, $2 \times \pi \times 50 \times 0{,}03 = 9{,}42$ ohms, ja que $\frac{100}{9{,}42} = 10{,}6$ amp.

Si la bobina considerada fos alimentada per una força electromotriu contínua de la mateixa tensió de 100 volts, el corrent produït seria teòricament infinit, puix hem suposat que la resistència òhmica de la dita bobina era zero. La presència de l'autoinducció explica perquè la intensitat és petita en la bobina primària d'un transformador quan el circuit secundari és obert; en aquest cas l'autoinducció de la bobina, que és molt gran, presenta una reactància que limita la intensitat del corrent, la qual seria molt elevada si la bobina fos alimentada per un corrent continu de la mateixa tensió que l'altern.

El cas que hem estudiat anteriorment és purament teòric, puix no pot existir circuit de cap mena que estigui desproveït de resistència òhmica, però si aquesta és molt petita, quasi tota la força electromotriu aplicada a la bobina s'esmerça a vèncer la força electromotriu d'autoinducció, i l'angle d'avenç de la força electromotriu aplicada respecte al corrent produït s'aproximarà tant més a 90° com menor sigui la resistència òhmica de la bobina. Hom compendrà amb més claredat aquest fet estudiant el cas d'un circuit que posseeix a la vegada resistència òhmica i autoinducció.

CIRCUITS QUE POSSEEIXEN RESISTÈNCIA I AUTOINDUCCIÓ

RESISTÈNCIA I AUTOINDUCCIÓ EN SÈRIE

33. Considerem el cas representat en la fig. 24, en què el circuit consta d'una resistència R i una autoinducció L en sèrie alimentades per una força electromotriu $\mathcal{E}$, i sigui $\mathcal{J}$ la intensitat del corrent, que serà una mateixa per

a R i L. La força electromotriu aplicada al conjunt serà la resultant de les forces electromotrius $\mathcal{E}'$ i $\mathcal{E}''$ necessàries per a vèncer la resistència R i l'autoinducció L, respectivament, de manera que si representem per $o\,a$ (figura 25) el sentit i fase del corrent, la longitud $o\,b$ representarà a una escala convenient la força electromotriu $R\,\mathcal{J}$ necessària per a vèncer la resistència R, puix sabem que quan en un circuit hi ha sols resistència òhmica, el corrent està en fase amb la força electromotriu que la produeix.

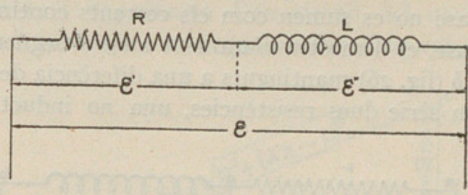

FIG. 24

La força electromotriu necessària per a vèncer l'autoinducció de L, que és $2\,\pi \sim L\,\mathcal{J}$, haurà d'ésser comptada sobre la recta $b\,c$ perpendicular a $o\,a$, ja que la força electromotriu que s'aplica per a vèncer l'autoinducció forma amb el corrent un angle de 90° i està avançada respecte a aquest. La resultant de les dues forces electromotrius $\mathcal{E}'$ i $\mathcal{E}''$ iguals, respectivament, a $R\,\mathcal{J}$ i a $2\,\pi\,L\,\mathcal{J}$ serà, doncs, el tercer costat $o\,c$ del triangle $o\,b\,c$, segons fou explicat en el núm. 23; però en aquest cas el triangle és rectangle, de manera que la resultant és la hipotenusa, i com que aquesta és igual a la rel quadrada de la suma dels quadrats dels catets, tindrem

$$o\,c = \mathcal{E} = \sqrt{(R\,\mathcal{J})^2 + (2\,\pi \sim L\,\mathcal{J})^2} = \mathcal{J}\sqrt{R^2 + (2\,\pi \sim L)^2}$$

De la construcció anterior es dedueix que essent l'angle $o\,b\,c$ sempre recte, si la força electromotriu aplicada és constant, és a dir si conserva una mateixa valor eficaç, el vèrtex b del triangle es trobarà sempre sobre la mitja circumferència traçada amb $o\,b$ per diàmetre, qualsevulla que siguin les valors de $R\,\mathcal{J}$ i de $2\,\pi \sim L\,\mathcal{J}$, mentre satisfacin la condició

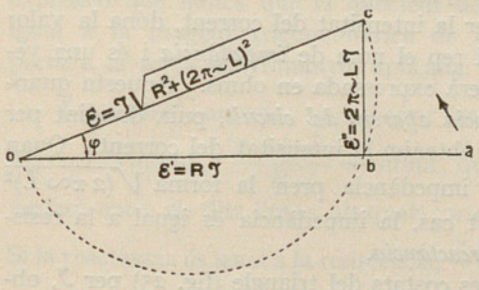

FIG. 25

$$(R\,\mathcal{J})^2 + (2\,\pi \sim L\,\mathcal{J})^2 = \mathcal{E}^2$$

Si $\sim$ o L s'anul·len, és a dir si no existeix autoinducció, com que en aquest cas $2\,\pi \sim L = 0$, la força electromotriu aplicada serà $\mathcal{E} = \mathcal{J}\sqrt{R^2} = \mathcal{J}R$, tota la força electromotriu s'usa a vèncer la resistència òhmica, i l'angle φ, que indica la diferència de fase entre la força electromotriu aplicada i el corrent, es redueix a zero, la qual cosa significa que ambdues es troben en fase.

Si $R = 0$, $\mathcal{E} = \mathcal{J}\sqrt{(2\,\pi \sim L)^2} = 2\,\pi \sim L\,\mathcal{J}$ i la força electromotriu aplicada s'inverteix tota a vèncer la força electromotriu d'autoinducció, per a establir un corrent que es trobarà decalat de 90° respecte a la força electromotriu aplicada, puix llavors l'angle φ arriba a 90°.

34. El fet que els corrents alterns que presenten una diferència de fase no es sumen com els corrents continus, o com els alterns que estan en fase, es demostra clarament amb el següent experiment. Entre dos punts *a* i *b* (fig. 26) mantinguts a una diferència de potencial constant $\mathcal{E}$, hom intercala en sèrie dues resistències, una no inductiva *a c* i una altra *c b* que tingui un coeficient d'autoinducció molt elevat, i també dues bombetes incandescents iguals, *d*, *d* de manera que el punt d'unió d'ambdues pugui posar-se en comunicació amb el punt *c*. Tancant l'interruptor i graduant la resistència no inductiva, aconseguim que ambdues bombetes tinguin igual resplendor, la qual cosa demostra que les intensitats de corrent que passen per elles són iguals, i, per tant, que les tensions $\mathcal{E}'$ i $\mathcal{E}''$ són també iguals. Si després obrim l'interruptor, observem que la resplendor de les bombetes disminueix, encara que estiguin alimentades per la mateixa tensió $\mathcal{E}$ que abans. Això prova que la tensió total $\mathcal{E}$ és menor que la suma aritmètica $\mathcal{E}' + \mathcal{E}''$.

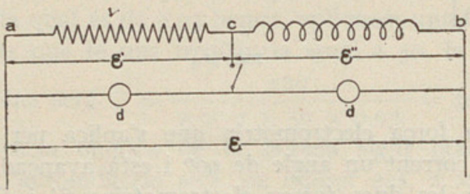

FIG. 26

35. *Impedància i triangle de la impedància.*—El radical $\sqrt{R^2 + (2\,\pi \sim L)^2}$ és la quantitat que, multiplicada per la intensitat del corrent, dóna la valor de la força electromotriu aplicada i rep el nom de *impedància* i és una veritable resistència, de manera que serà expressada en ohms. Aquesta quantitat és allò que anomenem *resistència aparent del circuit,* puix dividint per ella la força electromotriu aplicada, obtenim la intensitat del corrent. Quan la resistència òhmica és nul·la, la impedància pren la forma $\sqrt{(2\,\pi \sim L)^2} = 2\,\pi \sim L$, és a dir que, en aquest cas, la impedància és igual a la resistència d'autoinducció o sigui a la *reactància*.

Si dividim les longituds dels tres costats del triangle (fig. 25) per $\mathcal{J}$, obtindrem evidentment un triangle semblant a l'anterior, en el qual (fig. 27) els catets representaran la resistència òhmica R i la reactància $2\,\pi \sim L$, i la hipotenusa serà la resistència aparent o la impedància $\sqrt{R^2 + (2\,\pi \sim L)^2}$, de manera que, conegudes la resistència òhmica del circuit i sa reactància, obtenim la impedància, i d'aquí el nom de *triangle de la impedància* donat a aquesta figura. És evident que l'angle φ continuarà expressant la diferència de fase entre la força electromotriu aplicada i el corrent produït.

Si la resistència R i la reactància $2\pi \sim L$ varien, satisfent, però, la condició $R^2 + (2\pi \sim L)^2 =$ impedància $=$ constant, el punt b es trobarà sempre sobre la mitja circumferència traçada amb la impedància per diàmetre, i podrà ésser calculada amb facilitat la impedància d'un circuit del qual coneixem la resistència òhmica i la reactància o una qualsevulla d'aquestes dues, mentre coneguem l'altra i la impedància.

36. Del triangle $o\,b\,c$ (figura 27) es dedueix

$$c\,b = o\,c \sin \varphi$$
$$o\,b = o\,c \cos \varphi$$

i dividint la primera igualtat per la segona,

$$\frac{cb}{ob} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

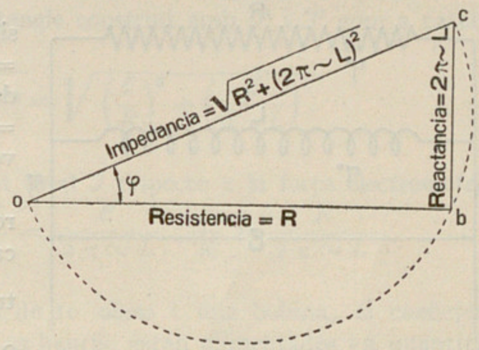

FIG. 27

però $c\,b = 2\pi \sim L$, $o\,b = R$ i $\dfrac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi$, per tant,

$$\frac{2\pi \sim L}{R} = \operatorname{tg} \varphi$$

expressió que indica que el quocient de la reactància per la resistència és igual a la tangent trigonomètrica de l'angle de retard del corrent respecte a la força electromotriu aplicada.

La relació anterior pot variar entre els límits $\dfrac{2\pi \sim L}{R} = 0$, quan $2\pi \sim L$ s'anul·la, i $\dfrac{2\pi \sim L}{R} =$ infinit, quan R és zero, de manera que $\operatorname{tg} \varphi$ variarà entre els dits límits, als quals corresponen les valors $\varphi = 0^o$ i $\varphi = 90^o$. Si la reactància és igual a la resistència, $\dfrac{2\pi \sim L}{R} = \operatorname{tg} \varphi = 1$ i llavors $\varphi = 45^o$.

Problema. — Una resistència de 10 ohms i una bobina, el coeficient d'autoinducció de la qual és de 0,02 henris, estan alimentades en sèrie per una força electromotriu de 150 volts amb una freqüència $\sim = 50$. Trobeu: primer, la intensitat del corrent produït; segon, les tensions aplicades a la resistència i a la bobina, i tercer, l'angle de retard del corrent respecte a la força electromotriu aplicada.

Resolució. — 1.r La impedància del circuit serà

$$\sqrt{R^2 + (2\,\pi \sim L)^2} = \sqrt{10^2 + (2 \times \pi \times 50 \times 0{,}02)^2} = 10{,}31$$

per tant, la intensitat del corrent, que és igual al quocient de la força electromotriu aplicada, per la impedància, serà $\frac{150}{10{,}31} = 14{,}5$ amp.

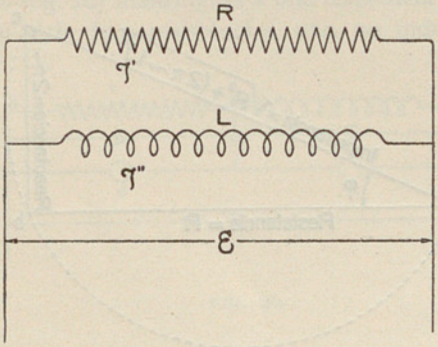

FIG. 28

2.n La tensió aplicada a la resistència tindrà per valor $\mathcal{E}' = R\,\mathcal{J} = 10 \times 14{,}5 = 145$ volts, i l'aplicada a la bobina serà $\mathcal{E}'' = 2\,\pi \sim L\,\mathcal{J} = 2 \times \pi \times 50 \times 0{,}02 \times 14{,}5 = 91{,}1$ volts.

3.r L'angle de retard del corrent respecte a la força electromotriu aplicada serà el que tingui per tangent trigonomètrica $\frac{2\,\pi \sim L}{10} = \frac{6{,}28}{10} = 0{,}628$, o sigui un angle $\varphi = 32^o$ aproximadament.

RESISTÈNCIA I AUTOINDUCCIÓ EN QUANTITAT

37. Estudiem el cas representat en la fig. 28, en què la resistència R i l'autoinducció L es troben en quantitat alimentades per una força electromotriu $\mathcal{E}$ constant. El corrent total exigit per conjunt no serà la suma dels corrents que passen per cada una de les derivacions, sinó que ha d'ésser calculat i per a això cal *compondre* les intensitats dels corrents que circulen per R i per L per a trobar la resultant. La força electromotriu aplicada als borns de la resistència R estarà en fase amb el corrent que passa per aquesta, segons sabem; per tant, si $o\,a$ (fig. 29) representa el sentit i fase de la força electromotriu aplicada, una longitud tal com $o\,b$ podrà representar, a una escala convenient, la magnitud de la intensitat del corrent en la resistència R, intensitat la valor de la qual serà $\mathcal{J}' = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

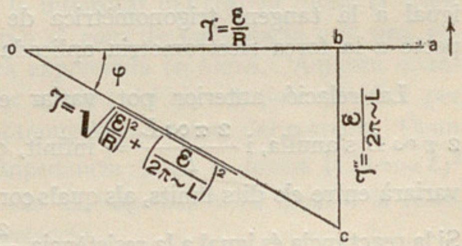

FIG. 29

El corrent que circula per L és avançat de 90° sobre la força electromotriu d'autoinducció i retardat de 90° respecte a la força electromotriu aplicada, i, per tant, haurà d'ésser comptat sobre una recta bc perpendicular a oa, de manera que

$$bc = \mathcal{J}'' = \frac{\mathcal{E}}{2\pi \sim L}$$

La resultant de les dues intensitats $\mathcal{J}'$ i $\mathcal{J}''$, o sigui la valor de $\mathcal{J}$, serà la hipotenusa oc del triangle rectangle construït amb $\mathcal{J}'$ i $\mathcal{J}''$ com a catets, i tindrem

$$\mathcal{J} = \sqrt{\mathcal{J}'^2 + \mathcal{J}''^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}}{2\pi L}\right)^2}.$$

L'angle de retard del corrent total $\mathcal{J}$ respecte a la força electromotriu aplicada és donat per $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\mathcal{J}''}{\mathcal{J}'} = \frac{\mathcal{E}}{2\pi \sim L} : \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{R}{2\pi \sim L}.$

Problema. — Una resistència de 10 ohms i una bobina, el coeficient d'autoinducció de la qual és de 0,02 henris, estan alimentades en quantitat per una força electromotriu de 150 volts amb una freqüència $\sim = 50$. Determineu primer la intensitat del corrent en cada derivació; segon, la intensitat del corrent total; tercer, l'angle de retard d'aquest respecte a la força electromotriu aplicada.

Resolució. — 1.r La intensitat del corrent en la resistència serà

$$\mathcal{J}' = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{150}{10} = 15 \text{ amp.}$$

i la que circularà per la bobina,

$$\mathcal{J}'' = \frac{\mathcal{E}}{2\pi \sim L} = \frac{150}{2 \times \pi \times 50 \times 0{,}02} = 23{,}9 \text{ amp.}$$

2.n La intensitat del corrent total serà

$$\mathcal{J} = \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}}{2\pi \sim L}\right)^2} = \sqrt{15^2 + 23{,}9^2} = 28{,}2 \text{ amp.}$$

3.r L'angle de decalatge serà el que correspon a

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{2\pi \sim L} = \frac{10}{6{,}28} = 1{,}59, \text{ o sigui un angle d'uns } 58°.$$

38. Observarem que en els problemes dels n.s 36 i 37, els angles de decalatge són complementaris, i és fàcil donar-se compte que ha d'ésser així fixant-nos que la tangent de l'angle de retard, quan la resistència i la bobina estan en sèrie, és $\frac{2\pi\sim L}{R}$ i quan estan en quantitat és $\frac{R}{2\pi\sim L}$; ara bé, conservant R, $\sim$ i L unes mateixes valors, la segona expressió és la recíproca de la primera, per tant, representant per φ_1 i φ_2 els angles respectius, tindrem

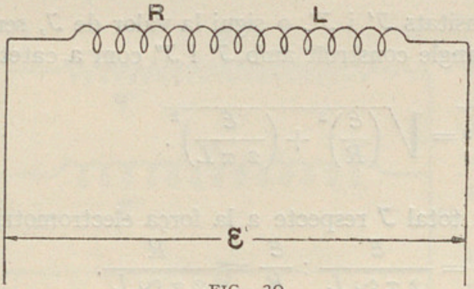

FIG. 30

$$\text{tg}\ \varphi_1 = \frac{1}{\text{tg}\ \varphi_2} = \text{cotg}\ \varphi_2,$$

per tant, els angles φ_1 i φ_2 són complementaris.

39. En els casos considerats fins aquí, havem suposat que les bobines presentaven únicament autoinducció, és a dir que estaven desproveïdes de resistència òhmica; però aquesta suposició és purament teòrica, puix tota bobina posseeix, ultra un coeficient d'autoinducció, una resistència més o menys gran, que cal tenir en compte. En aquest cas hom suposa que la resistència òhmica i l'autoinducció es troben en sèrie i la bobina representada en la fig. 30 equival al conjunt d'una resistència R i una autoinducció L en sèrie, com indica la fig. 31. Considerem el conjunt de tres bobines (fig. 32) que tenen respectivament les resistències R_1, R_2 i R_3 i els coeficients d'auto inducció L_1, L_2, L_2, i cerquem les tensions $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ i $\mathcal{E}_3$ que existeixen en sos borns respectius.

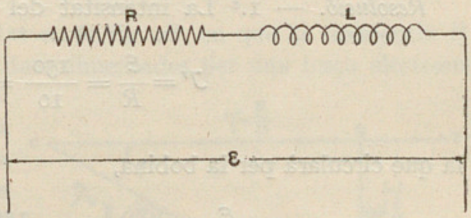

FIG. 31

Sigui $o\,a$ (fig. 33) la intensitat del corrent. La força electromotriu necessària per a vèncer la resistència R_1 serà $R_1 \mathcal{J}$, i com que està en fase amb el corrent, serà representada per la longitud $o\,b$ presa sobre $o\,a$. La força electromotriu aplicada a la bobina, el coeficient d'autoinducció de la qual és L_1 serà $2\pi\sim L_1 \mathcal{J}$ i haurà de formar angle recte amb el corrent, per tant, serà representada per la longitud $b\,c$ de la normal a $o\,a$ alçada en el punt b.

La resultant $o\,c$ d'aquestes dues forces electromotrius serà la força electromotriu $\mathcal{E}_1$ aplicada a la primera bobina. Traçant pel punt c una paral-lela cd a oa, la longitud de la qual sigui igual a $R_2 \mathcal{J}$, tindrem indicada la força electromotriu necessària per a vèncer la resistència òhmica de la segona bobina, i la longitud $de = 2\,\pi \sim L_2 \mathcal{J}$ de la normal a oa traçada pel punt d, serà la força electromotriu necessària per a vèncer l'autoinducció de la segona bobina, i la resultant ce d'aquestes dues serà la força electromotriu $\mathcal{E}_2$ aplicada a la segona bobina. De la mateixa manera $R_3 \mathcal{J}$ i $2\,\pi \sim L_3 \mathcal{J}$ representaran, respectivament, les forces electromotrius necessàries per a vèncer la resistència òhmica i l'autoinducció de la tercera bobina, i eg, resultant d'ambdues, serà la força electromotriu $\mathcal{E}_3$ que hi ha en els borns de la tercera bobina.

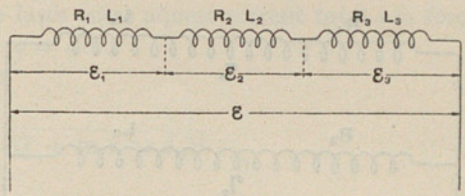

FIG. 32

La resultant og de les tres forces electromotrius $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ i $\mathcal{E}_3$ serà la força electromotriu aplicada a la sèrie de les tres bobines. Si prolonguem la recta gf fins a son encontre amb la oa s'haurà format el triangle rectangle ohg en el qual tindrem

$$og = \sqrt{\overline{oh}^2 + \overline{hg}^2}$$

però $og = \mathcal{E}$, $oh = ob + bj + jh = R_1 \mathcal{J} + R_2 \mathcal{J} + R_3 \mathcal{J} = (R_1 + R_2 + R_3)\,\mathcal{J}$ i anomenant R la suma de les diverses resistències òhmiques tindrem $oh = R\,\mathcal{J}$. De la mateixa manera $hg = hk + kf + fg$

$$= 2\,\pi \sim L_1 \mathcal{J} + 2\,\pi \sim L_2 \mathcal{J} + 2\,\pi \sim L_3 \mathcal{J}$$
$$= 2\,\pi \sim \mathcal{J}\,(L_1 + L_2 + L_3)$$

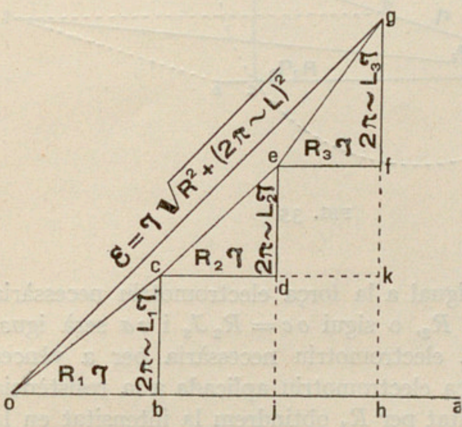

FIG. 33

i designant per L la suma dels diversos coeficients d'autoinducció tindrem $hg = 2\,\pi \sim L\,\mathcal{J}$. Substituint oh i hg per ses valors en l'expressió de og, tindrem

$$\mathcal{E} = \sqrt{(R\,\mathcal{J})^2 + (2\,\pi \sim L\,\mathcal{J})^2}$$

d'on

$$\mathcal{E} = \mathcal{J}\sqrt{R^2 + (2\,\pi \sim L)^2}$$

de manera que el sistema proposat és equivalent a una sola bobina, la resistència òhmica i el coeficient d'autoinducció de la qual són, respectivament, la suma de les resistències òhmiques i dels coeficients d'autoinducció de les dites bobines.

40. Quan les bobines es troben en derivació (fig. 34) procedirem de la manera següent per obtenir les intensitats dels corrents de cada derivació i llur relació amb la intensitat total $\mathcal{J}$.

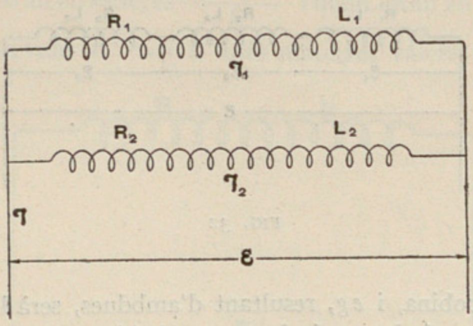

FIG. 34

Sigui $o\,a$ (fig. 35) un vector igual a la força electromotriu aplicada $\mathcal{E}$. Construïm l'angle $a\,o\,b = \varphi_1$, tal que

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2\,\pi \sim L_1}{R_1}$$

el qual indicarà l'angle de retard del corrent $\mathcal{J}_1$ respecte a la força electromotriu aplicada $\mathcal{E}$. En el triangle $o\,b\,a$, que és rectangle en b, segons fou explicat en el núm. 33, $o\,b$ és la força electromotriu $R_1 \mathcal{J}_1$ necessària per a vèncer la resistència R_1, i $b\,a$ és la precisa per a vèncer l'autoinducció L_1, igual a $2\,\pi \sim L_1\,\mathcal{J}_1$. De la mateixa manera, construint l'angle $a\,o\,c = \varphi_2$ tal que

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2\,\pi \sim L_2}{R_2}$$

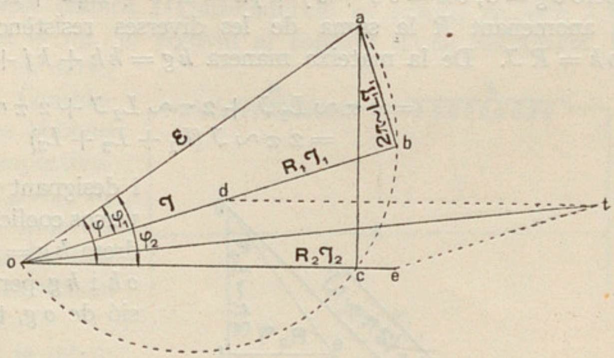

FIG. 35

que serà l'angle de retard del corrent I_2 respecte a la força electromotriu aplicada, es formarà el triangle rectangle $o\,c\,a$ el vèrtex c del qual es trobarà, com el b, en la semicircumferència que té $o\,a$ per diàmetre; $o\,c$ serà igual a la força electromotriu necessària per a vèncer la resistència òhmica R_2, o sigui $o\,c = R_2\,\mathcal{J}_2$ i $c\,a$ serà igual a $2\,\pi \sim L_2\,\mathcal{J}_2$, o sigui a la força electromotriu necessària per a vèncer l'autoinducció L_2. Com que la força electromotriu aplicada a la resistència R_1 és $R_1\,\mathcal{J}_1$, dividint aquesta quantitat per R_1 obtindrem la intensitat en la primera derivació, la qual estarà representada per una longitud tal com $o\,d$.

Anàlogament trobarem la intensitat $\mathcal{J}_2 = oe$, dividint el vector oc per R_2 (és evident que oe serà major que oc si R_2 és menor que 1). Però la intensitat total $\mathcal{J}$ en el circuit principal és la resultant de les dues intensitats $\mathcal{J}_1$ i $\mathcal{J}_2$, per tant, construint el paral·lelogram amb $\mathcal{J}_1$ i $\mathcal{J}_2$ per costats obtindrem $\mathcal{J} = ot$ i la diferència de fases entre aquest corrent total i la força electromotriu aplicada serà l'angle $\varphi = aot$.

En el triangle oba es verifica

$$oa = \mathcal{J}_1 \sqrt{R_1^2 + (2\,\pi \sim L_1)^2}$$

i en el oca

$$oa = \mathcal{J}_2 \sqrt{R_2^2 + (2\,\pi \sim L_2)^2}$$

per tant,

$$\frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2} = \frac{\sqrt{R_2^2 + (2\,\pi \sim L_2)^2}}{\sqrt{R_1^2 + (2\,\pi \sim L_1)^2}}$$

de manera que les intensitats del corrent en les dues derivacions estan en raó inversa de les impedàncies llurs.

CORRENTS ALTERNS

PRIMERA PART

PROBLEMES

1. Quina serà la valor màxima d'una força electromotriu si, amb una freqüència igual a 50, és de 80 volts al cap de $\frac{1}{400}$ de segon de la posició d'origen?

2. Quant temps esmerçarà en 1 cicle un corrent altern, si sa freqüència és 42?

3. Trobeu la impedància d'un circuit que té una resistència de 5 ohms i un coeficient d'autoinducció 0,08 henris, si la freqüència de la força electromotriu d'alimentació és 50.

4. Quina serà, en l'exemple anterior, la força electromotriu necessària per a establir un corrent de 20 ampers?

5. La força electromotriu eficaç que actua en un circuit és de 1000 volts, quina serà la màxima?

6. Trobeu la resultant de dues forces electromotrius de 150 i 100 volts, respectivament, que tenen una diferència de fase de 30°.

7. Utilitzant una escala de 2 mil·límetres per 1 ohm, traceu el triangle de la impedància sabent que la resistència és de 20 ohms i la reactància és de 30 ohms, i digueu quin serà l'angle de retard del corrent respecte a la força electromotriu aplicada.

8. Calculeu la valor eficaç d'un corrent, la intensitat mitjana del qual és de 20 ampers.

9. A una bobina que té un coeficient d'autoinducció de 0,1 henris i la resistència òhmica de la qual podem considerar nul·la, apliquem una força electromotriu eficaç de 100 volts i 50 cicles per segon. Quina serà la intensitat del corrent?

10. La impedància d'un circuit és de 60 ohms i sa reactància és de 20 ohms. Quina serà sa resistència òhmica?

11. Al circuit del problema anterior s'aplica una força electromotriu de 300 volts; trobeu la intensitat del corrent produït.

12. Què entenem per factor de forma, i quina valor té quan la corba és sinusoidal, quan és rectangular i quan és triangular?

13. Quan estan en fase dues forces electromotrius o dos corrents?

14. Quina diferència existeix entre els sistemes bifàsic i trifàsic?

15. Una bobina el coeficient d'autoinducció de la qual és de 0,2 henris i una resistència de 100 ohms es troben en quantitat alimentades per una tensió de 500 volts amb una freqüència de 50 cicles per segon. Trobeu la intensitat del corrent en cada derivació i la intensitat total.

16. Què és una força electromotriu sinusoidal?

17. Traceu, a ull, dues sinusoides *a* i *b* que representin dues forces electromotrius que presenten una diferència de fase de 180° i altres dues *c* i *d* en què la diferència de fase sigui de 90°, la segona avançada respecte de la primera.

18. Quantes alternancies té per segon un corrent, la freqüència del qual és de 30 cicles per segon?

19. Quina és la valor instantània de la força electromotriu desenrotllada en un conductor que forma un angle de 60° amb l'origen, si la valor eficaç és de 100 volts?

20. Què és la resistència aparent d'un circuit i a què es redueix quan el coeficient d'autoinducció del circuit és nul?

21. Definiu la valor eficaç d'una força electromotriu.

22. Traceu, a ull, dues sinusoides que representin dues forces electromotrius de distinta valor màxima i que estan en fase, tot indicant les amplituds llurs.