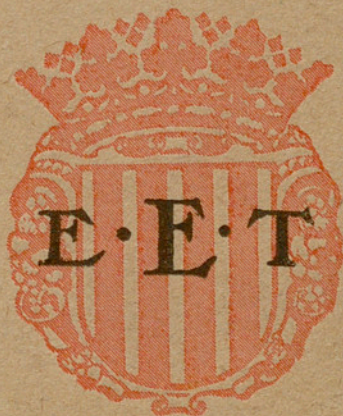


Mancomunitat de Catalunya

EXTENSIO
D'ENSENYAMENT
T E C N I C



TEXT N.º 20

MECÀNICA ELEMENTAL

PART II

Carrer d'Urgell 187 Barcelona

MECÀNICA ELEMENTAL

2.^a PART

MOMENTS. — FORCES PARAL·LELES

1. **Moment d'una força respecte un punt.** El producte de la intensitat de la força F (fig. 1) per la distància OC del punt O a la direcció de la força considerada, pren el nom de **moment** de la força F respecte el punt O .

Mesurant les forces en quilograms i les distàncies en metres, els moments vénen expressats en quilogràmetres.

Unint els extrems de la força amb el punt O resulta el triangle AOB l'àrea del qual serà

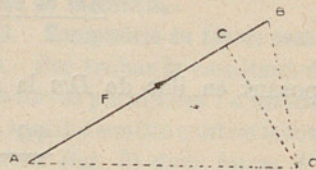


FIG. 1

$$\frac{AB \times OC}{2}$$

i com que AB és proporcional a la intensitat F de la força, resulta que $\frac{AB \times OC}{2}$ serà proporcional al moment

$F \times OC$ de la força; per tant, a una certa escala, el moment de la força F serà representat per l'àrea del triangle AOB .

La distància OC és anomenada **braç de palanca** del moment.

2. Considerem (fig. 2) les dues forces concurrents $AB = P$, $AC = Q$, la resultant llur $AD = R$ i un punt O situat en el pla de les forces considerades.

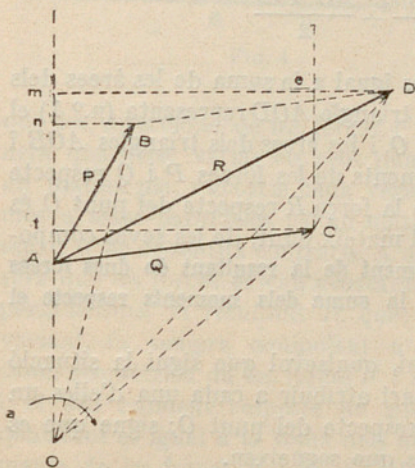


FIG. 2

Unint el punt O amb els extrems de les tres forces obtindrem els triangles AOB , AOD i AOC , que, prenent AO com a base comuna, tenen les altures respectives Bn , Dm i Cl . Traçant pel punt C una paral·lela a la base AO formarem el triangle DeC que és igual al BnA , ja que tenen els seus costats paral·lels i, demés, el costat DC igual al AB ; per tant $De = Bn$.

La figura mCe és un rectangle; per tant,

$$mC = em.$$

Ara bé; en la figura veiem que

$$Dm = De + em,$$

i com que, segons acabem de veure: $De = Bn$ i $em = Cl$, resulta

$$Dm = Bn + Cl \quad (1)$$

Les àrees dels triangles AOB , AOD i AOC valen respectivament:

$$\frac{AO \times Bn}{2}, \quad \frac{AO \times Dm}{2}, \quad \frac{AO \times Cl}{2}$$

i posant en lloc de Dm la seva valor (1) tindrem:

$$\frac{AO \times Dm}{2} = \frac{AO (Bn + Cl)}{2}$$

o sigui

$$\frac{AO \times Dm}{2} = \frac{AO \times Bn}{2} + \frac{AO \times Cl}{2}$$

de manera que l'àrea del triangle AOD és igual a la suma de les àrees dels triangles AOB i COA . Ara bé, l'àrea del triangle AOD representa (n.º 1) el moment de la força R respecte del punt O , i les àrees dels triangles AOB i AOC representen respectivament els moments de les forces P i Q respecte del mateix punt; per tant, el moment de la força R respecte del punt O és igual a la suma dels moments, respecte el mateix punt, de les seves components P i Q . Veiem, doncs, que: **El moment de la resultant de dues forces concurrents respecte un punt és igual a la suma dels moments respecte el mateix punt de les forces corresponents.**

Perquè aquesta proposició es verifiqui, qualsevol que sigui la situació del punt O respecte les forces, és necessari atribuir a cada una d'elles un signe que depengui de la seva situació respecte del punt O ; signe que es determina en virtut de les consideracions que segueixen.

Marquem (fig. 3) un sentit de rotació al voltant del punt O , per exemple

l'indicat per la fletxa ab ; si el sentit de la força és el mateix que el de ab , el moment serà positiu i si és contrari serà negatiu. Així en la fig. 3 la força F té un moment positiu i la força F' té un moment negatiu. En la fig. 2 si el sentit positiu és l'indicat per la fletxa a , els moments de les tres forces són positius. Si el punt O estés col·locat com en la fig. 4 els moments de R i P foren positius i el de Q negatiu.

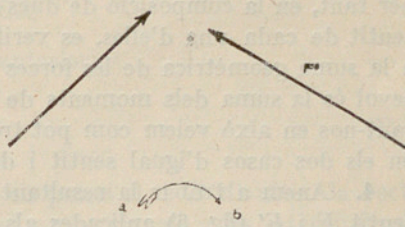


FIG. 3

Col·locant el punt O en diverses posicions respecte les forces i atribuint als seus moments el signe corresponent, sempre es trobarà, aplicant a cada cas la demostració anterior, que el moment de la resultant respecte el punt O , és igual a la suma dels moments de ses components respecte el mateix punt.

El punt O porta el nom de centre de moments.

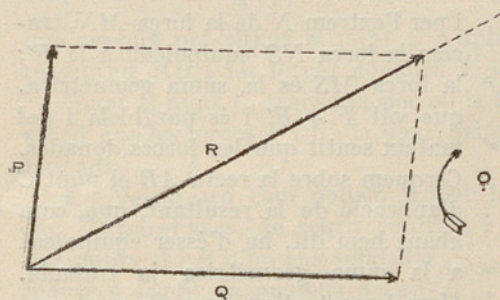


FIG. 4

3. Composició de forces paral·leles. Per trobar la resultant de dues forces paral·leles i d'un mateix sentit o sentits contraris considerem (fig. 5) dues forces F i F' aplicades als punts A i B d'un cos sòlid, i de direccions concurrents. El triangle de forces OCD ens dóna la resultant R de les forces considerades. Imaginem

que les direccions de les forces F i F' canvien paulatinament, de tal manera que sense variar els seus punts d'aplicació i conservant-se sempre en un mateix pla, s'acostin cada vegada més a ésser paral·leles i d'un mateix sentit o bé de sentits contraris. A mesura que les forces es van acostant al paral·lelisme, la resultant R , que va variant, és sempre equipolent a la suma geomètrica de les forces F i F' , i el seu moment respecte un punt qualsevol és igual a la suma dels moments de les forces F i F' . En el límit, o sia quan les forces siguin pa-

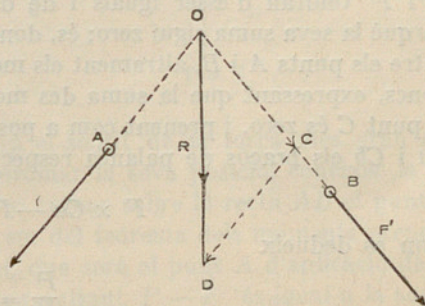


FIG. 5

ral·leles i del mateix sentit o bé de sentits contraris continuaran verificant-se les proposicions anteriors relatives a la suma geomètrica i als moments; per tant, en la composició de dues forces paral·leles, qualsevol que sigui el sentit de cada una d'elles, es verifica que la seva resultant és equipolent a la suma geomètrica de les forces i el seu moment respecte un punt qualsevol és la suma dels moments de les forces respecte el mateix punt. Basant-nos en això veiem com pot trobar-se la resultant de forces paral·leles en els dos casos d'igual sentit i de sentits contraris.

4. Anem a trobar la resultant de dues forces paral·leles i d'un mateix sentit F i F' (fig. 6) aplicades als punts A i B del cos sòlid.

Hem demostrat en el n.º 3 que la resultant era equipolent a la suma

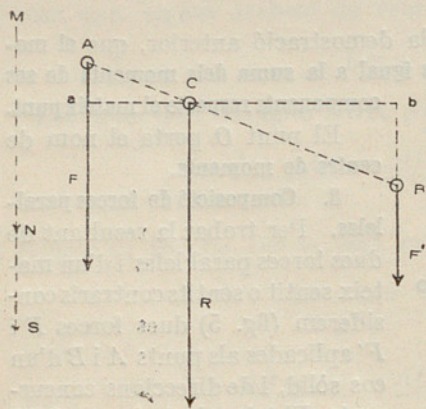


FIG. 6

geomètrica de les forces donades F i F' . Per trobar la dita suma geomètrica tracem per un punt tal com M la força MN equipolent a la força F i per l'extrem N de la força MN , tracem la força NS equipolent a la F' ; la força MS és la suma geomètrica, que val $F + F'$ i és paral·lela i del mateix sentit que les forces donades. Cerquem sobre la recta AB el punt C d'aplicació de la resultant, que, com abans hem dit, ha d'ésser equipolent a la suma geomètrica ja trobada. Hem demostrat que respecte qualsevol centre de moments, el moment de la resultant és igual a la suma dels

moments de les forces F i F' . Suposem que el punt C sigui aquest centre; el moment de la resultant serà zero; per tant, els moments de les dues forces F i F' tindran d'ésser iguals i de diferent signe, condició indispensable perquè la seva suma sigui zero; és, doncs, precis que el punt C estigui situat entre els punts A i B , altrament els moments serien d'igual signe. Tindrem, doncs, expressant que la suma des moments de les forces F i F' respecte el punt C és zero, i prenent com a positiu el moment de la força F i essent Ca i Cb els braços de palanca respectius:

$$F \times Ca - F' \times Cb = 0$$

d'on es dedueix

$$\frac{F}{F'} = \frac{Cb}{Ca}$$

Els triangles semblants CaA i CbB donen:

$$\frac{Cb}{Ca} = \frac{CB}{CA}$$

i comparant aquesta proporció amb l'anterior:

$$\frac{F}{F'} = \frac{CB}{CA} \quad (1)$$

De manera que el punt C situat entre els punts A i B divideix la recta AB en dues parts CA i CB inversament proporcionals a les intensitats de les forces F i F' .

De la proporció (1) deduïm:

$$\frac{F}{F + F'} = \frac{CB}{CB + CA} = \frac{CB}{AB} \quad (2)$$

que serveix per situar el punt C d'aplicació de la resultant, coneixent la magnitud AB i les forces donades F i F' .

Fixat el punt C , traçarem per ell la força $F + F'$ paral·lela i del mateix sentit que les forces F i F' , la qual, pel que havem dit abans, és la resultant buscada.

5. Veiem ara com podem trobar la resultant de dues forces F i F' (fig. 7) paral·leles, de sentit contrari i de diferent intensitat, aplicades a dos punts A i B d'un cos sòlid. La marxa a seguir és anàloga a l'anterior.

La suma geomètrica de les forces F i F' és la força MS , obtinguda traçant pel punt M la força MN equipolent a la força més gran F , i pel punt N la força NS equipolent a la força més petita F' . La resultant buscada serà equipolent a la força MS i, per tant, serà

paral·lela a les forces donades, tindrà el sentit de la força més gran F i valdrà $F - F'$. Ens resta, per determinar la seva posició, conèixer la situació de son punt C d'aplicació. Per trobar sobre la recta AB el punt C d'aplicació de la resultant, ens valdrem del teorema dels moments prenent per centre el punt que ens convingui, que serà el punt A d'aplicació de la força F . Sabem que el moment de la resultant $F - F'$ és igual a la suma

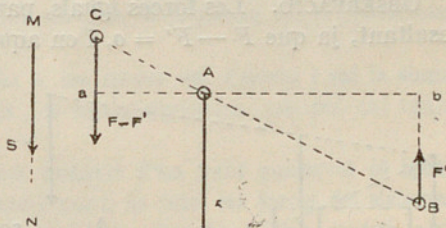


FIG. 7

dels moments de les forces F i F' . El moment de la força F és zero (ja que el centre de moments està en la direcció de la força); per tant, el moment respecte el punt A de la resultant $F - F'$ serà igual al moment de la força F' respecte el mateix punt, ço que exigeix, donat el sentit que ha de tenir la resultant, que el punt C es trobi respecte del punt A en el costat oposat al del punt B , a fi que els dos moments considerats puguin tenir el mateix signe. Essent Aa i Ab els respectius braços de palanca de la resultant i de la força F' , tindrem, segons havem dit abans:

$$(F - F') Aa = F' \times Ab$$

d'on

$$\frac{F - F'}{F'} = \frac{Ab}{Aa}$$

Ara bé, els triangles semblants AaC i AbB donen

$$\frac{Ab}{Aa} = \frac{AB}{AC}$$

proporció que, comparada amb l'anterior, dóna

$$\frac{F - F'}{F'} = \frac{AB}{AC} \quad \text{de la que;} \quad AC = \frac{F' \times AB}{F - F'}$$

Fixada la posició del punt C per la igualtat anterior, el problema queda resolt.

OBSERVACIÓ. Les forces iguals, paral·leles i de sentit contrari no tenen resultant, ja que $F - F' = 0$, i en aquest cas es diu que les forces formen un **parell**. Més endavant ens ocuparem dels **parells de forces**.

6. Considerem ara diverses forces paral·leles, de diferents sentits, situades en un mateix pla. Suposem, per exemple, que es tracta de les forces P , Q , S i T (fig. 8). Per trobar la seva resultant operarem de la manera següent: Cercarem la resultant R de les forces P i Q , segons el que havem dit en el n.º 4. Després, compondrem la resultant R amb la força S , obtenint (n.º 5) la força resultant R' . Per últim compondrem la resultant R' amb la força T , obtenint la

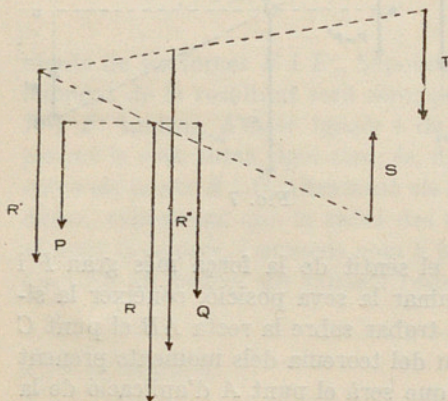


FIG. 8

força R'' que serà la resultant de totes les forces del sistema. Ara bé, R'' és equipolent a la suma geomètrica de les forces T i R' , i com que R' és equipolent a la suma geomètrica de les forces R i S , resulta que R'' serà equipolent a la suma geomètrica de les forces T , S i R . Però la força R és equipolent a la suma geomètrica de les forces P i Q ; per tant, R'' serà equipolent a la suma geomètrica de les forces P , Q , S i T del sistema. En aquest cas, per ésser paral·leles les forces, la suma geomètrica equival a la suma algèbrica. Veiem, doncs, que la resultant del sistema de forces paral·leles considerat és paral·lela a les forces i val la suma algèbrica de ses intensitats (essent suma algèbrica, perquè cal tenir en compte els sentits).

Determinem els moments. El moment de la força R'' respecte d'un punt qualsevol és igual (n.º 3) a la suma dels moments de les forces R' i T ; el moment de la força R' respecte del mateix punt és igual a la suma dels moments de les forces R i S , el moment de la força R és igual a la suma dels moments de les forces P i Q ; per tant, el moment de la resultant R'' respecte d'un punt qualsevol serà igual a la suma dels moments de les forces P , Q , S i T respecte del mateix punt.

El que havem dit del sistema de forces P , Q , S i T diríem d'un sistema de qualsevol nombre i sentit de forces paral·leles.

Podria ésser que al compondre successivament les forces arribéssim com a resultat final a un parell de forces, cas que, no tenint cap utilitat pràctica, deixarem d'estudiar.

En resum, considerant un sistema de forces paral·leles i de diferents sentits amb resultant, la qual pot ésser zero, es verificaran les proposicions següents:

La resultant del sistema és paral·lela a les forces del sistema i val la suma algèbrica de les intensitats de totes elles (és suma algèbrica, perquè cal tenir en compte els sentits de les forces).

El moment de la resultant del sistema respecte d'un punt qualsevol és igual a la suma dels moments, respecte el mateix punt, de totes les forces del sistema.

7. Equilibri d'un sistema de forces paral·leles situades en un mateix pla.
La condició necessària i suficient perquè un sistema de forces paral·leles situades en un mateix pla estigui en equilibri és que la resultant del sistema sigui nul·la, ja que allavors el sistema de forces no podrà modificar l'estat de repòs o moviment del cos sòlid a què les forces estan aplicades. Essent nul·la la resultant i, per tant, nul el moment de la resultant respecte de qualsevol punt, els teoremes finals del n.º 6 donen origen a les condicions d'equilibri que enunciarem de la manera següent:

Perquè un sistema de forces paral·leles situades en un mateix pla estigui en equilibri cal que la suma algèbrica de les intensitats de les forces valgui zero i

que la suma dels moments de les forces respecte de qualsevol punt valgui també zero.

Exemple 1. Sigui BC (fig. 9) una biga que pot girar al voltant del descans O , a la qual van aplicades les forces F i F' paral·leles, les intensitats de les quals són respectivament 80 kg. i 30 kg. i que tenen els sentits indicats. Volem trobar la força paral·lela que tenint la direcció CD equilibri les forces F i F' . Representem per P la força buscada. En el descans es desenrotllarà una reacció (que és la força que fa el descans contra el sòlid) que anomenarem R i que serà paral·lela a les forces. Les forces F , F' , P i R formaran evidentment un sistema en equilibri.

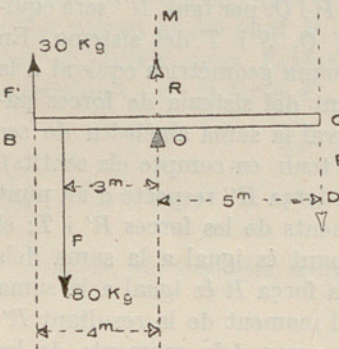


Fig. 9

La suma dels moments d'aquestes forces respecte d'un punt qualsevol ha d'ésser zero (n.º 7). Si prenem com a centre de moments el punt O , el moment de la força R serà zero i tindrem, prenent com a positiu el moment de la força F' i tenint en compte els braços de palanca marcats en la figura:

$$30 \times 4 - 80 \times 3 + P \times 5 = 0$$

d'on resulta

$$P \times 5 = 80 \times 3 - 30 \times 4 = 120$$

El moment de P és positiu, per tant la força P tindrà el sentit CD marcat en la figura.

La intensitat de la força P és:

$$P = \frac{120}{5} = 24 \text{ kg.}$$

Tenim, doncs, resolt el problema, ja que coneixem la intensitat de la força cercada i el seu punt d'aplicació.

Per calcular la reacció R del descans considerem (n.º 7) que la suma algebraica de totes les forces ha d'ésser zero i tindrem

$$F' - F - P + R = 0$$

d'on

$$R = P + F - F'$$

i substituint

$$R = 24 + 80 - 30 = 74 \text{ kg.}$$

és a dir que el signe de R és igual al de F' ; per tant, el sentit de la reacció serà igual al de la força F' .

Exemple 2. Una biga, descansant per sos extrems, sosté les càrregues (pesos) indicades en la fig. 10. Les distàncies a què estan col·locades són també indicades en la figura. Volem saber quines són les forces o reaccions verticals que fan els descansos A i B de la biga. Representem per R i R' les reaccions en els descansos A i B . Les càrregues donades junt amb les reaccions R i R' formaran un sistema en equilibri. Per determinar R i R' podrem aplicar el que havem enunciat en el n.º 7.

Prenem com a centre de moments el punt A i com a positiu el moment d'una de les càrregues, per exemple la de 120 kg.; la suma dels moments de totes les forces ha d'ésser zero i tenint en compte que el moment de la reacció R és zero (perquè així fos hem col·locat precisament el centre de moments en el punt A) tindrem:

$$120 \times 2 + 200 \times 4,5 + 50 \times 7,5 + R' \times 10 = 0$$

ja que els braços de palanca de les forces de 120 kg., 200 kg., 50 kg. i R' són respectivament 2m, 4,5m, 7,5m i 10m.

De la igualtat anterior deduïm:

$$R' \times 10 = -240 - 900 - 375 = -1515$$

El moment de la força R' és negatiu, per tant, el sentit de la força R' serà el marcat en la figura, ja que la força R' és de signe contrari al de la força 120 kg. que hem considerat com a positiu.

El valor de R' és:

$$R' = -\frac{1515}{10} = -151,5 \text{ kg.}$$

El signe (—) prové del signe del moment que sabem ha servit per fixar el sentit de la força R' . La intensitat de R' és, doncs, de 151,5 kg.

Coneguda la força R' , per trobar la força R ens fixarem que la suma algebraica de totes les forces ha d'ésser zero; per consegüent, prenent com a positiu el sentit de les càrregues tindrem:

$$R + 120 + 200 + 50 - 151,5 = 0$$

d'on $R = -218,5$

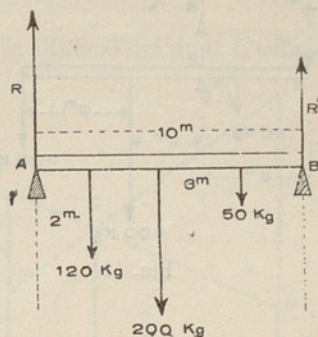


FIG. 10

El signe (—) indica que el sentit de la força R és contrari al de les càrregues, o sigui igual al de R' .

Les dues reaccions buscades R i R' van, doncs, de baix cap a dalt i tenen per intensitats respectives 218,5 kg. i 151,5 kg.

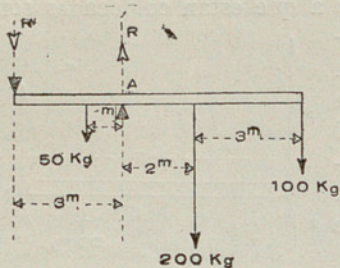


FIG. 11

Exemple 3. Donades la disposició de càrregues i descansos indicats en la fig. 11, trobar les reaccions verticals R i R' dels descansos.

Seguint una marxa anàloga a la del problema anterior i prenent per centre de moment el punt A (a fi que el moment de R sigui zero), i com a positiu el moment de la força de 100 kg., tindrem

$$100 \times 5 + 200 \times 2 - 50 \times 1 + R' \times 3 = 0$$

d'on $R' \times 3 = 50 - 400 - 500 = -850$

El moment de R' és negatiu, per tant, el sentit de la força R' serà de dalt a baix a fi que el seu moment pugui ésser de signe contrari al de la càrrega de 100 kg. que hem convingut de pendre com a positiu.

Prescindint del signe (—) que prové del moment i ens ha servit per determinar el sentit de la força R' , la intensitat de la dita força és:

$$R' = \frac{850}{3} = 283,3 \text{ kg.}$$

Per trobar R ens fixarem que la suma algebàrica de les forces ha d'ésser zero, i prenent com a positiu el sentit de les càrregues (o sigui el sentit de dalt a baix) tindrem:

$$283,3 + 50 + R + 200 + 100 = 0$$

d'on $R = -633,3$

el signe (—) vol dir que el sentit de la reacció R és de baix cap a dalt, ja que hem convingut de pendre com a positiu el sentit de dalt a baix.

8. La resultant de dues forces paral·leles i del mateix sentit, podem trobar-la gràficament d'una manera molt senzilla, que convé conèixer.

Siguin les forces F i F' de la fig. 12 i la resultant llur $F + F'$. Segons havem vist en el n.º 4 es verificarà la proporció següent:

$$\frac{F}{F'} = \frac{CB}{CA} \quad (1)$$

de la qual es dedueix un mètode gràfic per trobar la situació del punt C sobre la recta AB . En efecte; en la direcció de la força F i en son mateix sentit prenguem la magnitud Aa igual a la intensitat de la força F' , i sobre la direcció de la força F' i en sentit contrari prenguem la magnitud Bb igual a la intensitat de la força F . Unint després el punt a amb el punt b , la recta ab talla a la recta AB en el punt C que és el d'aplicació de la resultant. En efecte els triangles semblants CaA i CbB donen:

$$\frac{Bb}{Aa} = \frac{CB}{CA}$$

i per ésser $Bb = F$ i $Aa = F'$,

$$\frac{F}{F'} = \frac{CB}{CA}$$

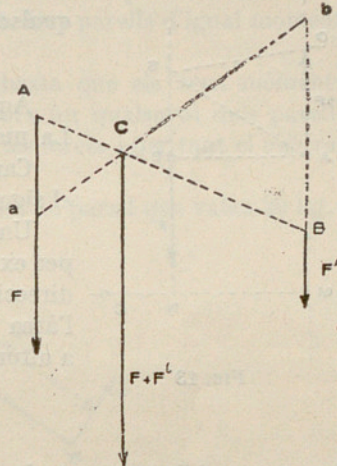


FIG. 12

que és precisament la mateixa relació (1); per tant, el punt C trobat de la manera gràfica anterior és el d'aplicació de la resultant.

Aquest procediment aplicat successivament a les forces d'un sistema de forces paral·leles i del mateix sentit ens donaria la resultant del sistema. Per trobar-la, compondriem primer dues de les forces, després la resultant d'aquestes amb una altra de les forces del sistema i així successivament fins arribar a trobar la resultant del sistema.

9. Parell de forces. Ja havem dit abans (n.º 5) que anomenem **parell** dues forces iguals paral·leles i de sentit contrari i sabem també que les forces d'un parell no poden ésser compostes i careixen de resultant.

Un parell aplicat a un cos sòlid no pot estar en equilibri, ja que fent fix el punt d'aplicació d'una de les forces del parell, perquè hi pogués haver equilibri caldria que la direcció de l'altra força del parell passés pel punt que hem suposat fix, ço que no pot ésser ja que les forces del parell són paral·leles.

10. Moment d'un parell. Prenent (fig. 13) la suma dels moments de les forces F i F del parell respecte d'un punt qualsevol C del pla del parell,

considerant com positiu el sentit de la rotació de les agulles d'un rellotge i tenint en compte lo exposat en el n.º 2, tindrem que aquesta suma de moments serà:

$$F \times CM - F \times CN = F (CM - CN) = F \times MN$$

i per ésser $MN = AB$ (la recta AB és perpendicular a les forces), la suma dels moments de les forces del parell respecte a un punt qualsevol serà constantment igual a:

$$F \times AB$$

Aquest producte és anomenat **moment del parell**. La magnitud AB és el **braç de palanca del parell**.

Canviant el sentit de les forces del parell canvia el signe del moment del parell.

Unint els extrems d'una de les forces del parell, per exemple la AD , amb un punt qualsevol S de la direcció de l'altra força es forma el triangle ADS , l'àrea del qual, prenent AD com a base i AB com a altura, té per expressió

$$\frac{1}{2} AD \times AB$$

i com que AD representa la intensitat F de la força, l'àrea del triangle és proporcional al moment $F \times AB$ del parell i per tant pot servir per representar-lo.

11. Considerem el parell F, F de la fig. 14. Sabem que introduint les forces AC i $A'C'$ iguals i oposades, en res alterem l'estat del cos al qual

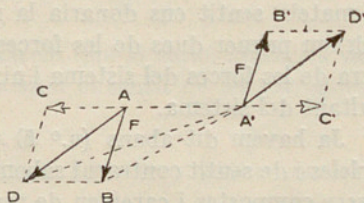


FIG. 14

s'apliquen. Les forces AC i AB donen la resultant AD i les $A'C'$ i $A'B'$ la resultant $A'D'$; per tant les forces AD i $A'D'$ equivalen al parell F, F . Fàcil és veure que els triangles ADC i $A'B'D'$ són iguals i tenen els seus costats paral·lels, per consegüent les forces AD i $A'D'$ formen un altre parell equi-

valent al primer. Ara bé, el moment del parell F, F ve representat (n.º 10) per l'àrea del triangle $AA'B$ i el moment del parell $AD, A'D'$ per l'àrea del triangle $A'AD$. Si suposem que la base comuna d'aquests dos triangles és AA' , com que els vèrtexs B i D estan col·locats sobre una paral·lela a la base comuna, les altures són iguals, per tant tindran igual àrea, és a dir que els moments dels dos parells equivalents considerats seran iguals en valor i signe (donat el sentit rotatiu de les forces que els componen). En resum: ço que caracteritza un parell és el seu moment. Dos parells d'igual moment (en valor i signe) són equivalents.

12. Per equilibrar dos parells de forces basta que els seus moments siguin iguals i de signe contrari, ja que llavors un qualsevol dels parells equival a l'altre parell canviant-hi el sentit de les forces i per tant el neutralitza o anul·la, produint l'equilibri.

Exemple: Sigui (fig. 15) F, F les dues forces d'un parell que valen 20 kg. i

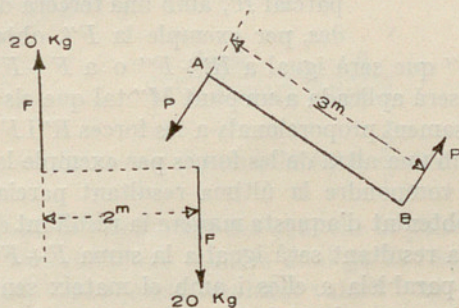


FIG. 15

suposem que el braç de palanca és de 2 m. Volem trobar un parell P, P que equilibri el parell donat i el braç de palanca del qual sigui de 3 m.

Com que els moments dels parells han d'ésser iguals i de signe contrari, serà en valor absoluta:

$$20 \times 2 = P \times 3$$

d'on deduïm:

$$P = \frac{20 \times 2}{3} = 13,3 \text{ kg.}$$

El sentit de les forces del parell P, P , és l'indicat en la figura, ja que els moments dels dos parells considerats han d'ésser de signe contrari.

OBSERVACIÓ. Com que el moment d'un parell és constant qualsevol que sigui el centre de moments, la manera més senzilla de trobar-lo, és situar el

centre de moments en un punt qualsevol d'una de les forces del parell i llavors el moment de l'altra força del parell és en valor i signe el valor del moment del parell. Respecte al signe recordar el que hem dit en el n.º 1.

13. Forces paral·leles i d'un mateix sentit, no situades en un mateix pla. Considerem (fig. 16) diverses forces paral·leles i d'un mateix sentit, tals que

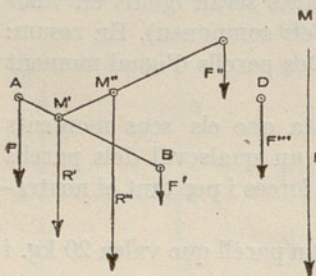


Fig. 16

les $F, F', F''...$ aplicades a diversos punts $A, B, C,...$ d'un sòlid invariable i anem a trobar la resultant de les forces considerades.

Composant les dues forces F i F' , obtindrem (n.º 4) la seva resultant R' , que serà igual a $F + F'$ i el seu punt d'aplicació M' dividirà la recta AB en dues parts inversament proporcionals a les forces F i F' , com hem vist en el n.º 4; després compondrem aquesta resultant parcial R' , amb una tercera de les forces donades, per exemple la F'' , obtenint una segona

resultant parcial R'' que serà igual a $R' + F''$ o a $F + F' + F''$, ja que R' és igual a $F + F'$, i serà aplicada a un punt M'' tal que els segments $M''M'$ i $M''C$ siguin inversament proporcionals a les forces R' i F'' (n.º 4); després, compondrem R'' amb una altra de les forces per exemple la F''' i així seguiríem fins arribar a compondre la última resultant parcial amb la última força del sistema, obtenint d'aquesta manera la resultant de totes les forces del sistema. Aquesta resultant serà igual a la suma $F + F' + F'' + ...$ de les forces del sistema, paral·lela a elles i amb el mateix sentit i el seu punt d'aplicació M serà donat per la sèrie d'operacions que determinen els punts d'aplicació de les diverses resultants parcials $R', R'',...$

14. Centre de forces paral·leles. Continuant ço que hem dit en el número anterior, fixem-nos que les posicions dels punts d'aplicació $M', M''...$ de les successives resultants parcials $R', R''...$ i per tant el punt d'aplicació M de la resultant final, no depenen **per res** de la direcció de les forces, sinó solament dels punts d'aplicació $A, B, C, D...$ de les forces $F, F', F'', F''',...$ i de la seva intensitat relativa. La conseqüència del que acabem de dir és, que si canviem la direcció de les forces, conservant-les paral·leles i d'un mateix sentit, sense variar les seves intensitats, el punt d'aplicació de la nova resultant serà el mateix. Aquest punt M , pel qual passa sempre la direcció de la resultant d'un sistema de forces paral·leles i d'un mateix sentit aplicades a diversos punts d'un cos sòlid, qualsevol que sigui la direcció de les forces que componen el sistema respecte a ses primitives direccions, és anomenat **centre de forces paral·leles**. Fixem-nos també que SI CANVIÉSSIM LES FORCES DEL SISTEMA PER ALTRES QUE ELS FOSSIN PROPORCIONALS, EL CENTRE

DE FORCES PARAL·LELES SERIA EL MATEIX, ja que en sa determinació inter-venen solament les relacions per quocient entre les intensitats de les forces.

Aclarirem tot el que havem dit amb uns exemples.

15. Exemple 1: Trobar el centre de forces paral·leles corresponent a les quatre forces paral·leles i d'un mateix sentit aplicades en els punts A, B, C i D (figura 17) les intensitats respectives de les quals són 3 kg., 4 kg., 2 kg. i 5 kg. Suposem que els punts A, B, C i D no estan situats en un mateix pla.

La resultant de les forces 3 kg. i 4 kg. valdrà 7 kg. i estarà aplicada al punt M' de la recta AB, determinat per la proporció:

$$\frac{M'B}{M'A} = \frac{3}{4}$$

de la qual deduïm:

$$\frac{M'B}{M'A + M'B} = \frac{3}{3 + 4}$$

d'on

$$M'B = \frac{3}{7} (M'A + M'B) = \frac{3}{7} AB$$

Unint ara el punt M' (la posició del qual ens és perfectament coneguda) amb el punt C i buscant d'una manera anàloga la resultant de les forces 7 kg. i 2 kg., veurem que aquesta resultant valdrà 9 kg. i el seu punt d'aplicació M'', situat en la recta M'C, serà determinat de la manera següent:

$$\frac{M''C}{M''M'} = \frac{7}{2} \quad , \quad \frac{M''C}{M''C + M''M'} = \frac{7}{7+2} \quad , \quad M''C = \frac{7}{9} M'C$$

Buscant, per últim, d'una manera anàloga, la posició M del punt d'aplicació de la resultant de les forces de 9 kg. i 5 kg. tindrem:

$$\frac{MD}{MM''} = \frac{9}{5} \quad \frac{MD}{MD + MM''} = \frac{9}{9+5} \quad MD = \frac{9}{14} M''D$$

Coneixem doncs la posició del punt M, centre de forces paral·leles buscat.

Amb aquest exemple es veu clarament que en els càlculs que han servit per determinar el punt M no hi han intervingut per res les direccions de les forces. Si les forces donades giressin al voltant dels seus punts d'aplicació i es col·loquessin paral·lelament a la recta ab, de la manera indicada en la figura, el punt M seria també el centre de forces paral·leles corresponent al

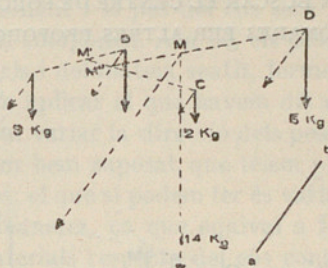


FIG. 17

nou sistema. La resultant corresponent valdria, com abans, 14 kg., essent paral·lela a la recta ab i tenint son punt d'aplicació en el punt M . Fixem-nos també que si multipliquem o dividim les intensitats de les forces per un mateix número, les posicions dels punts M' , M'' i M no varien; per tant EN BUSCAR EL CENTRE DE FORCES PARAL·LELES PODEM SUBSTITUIR LES FORCES DONADES PER ALTRES PROPORCIONALS, essent això molt important, com més endavant veurem.

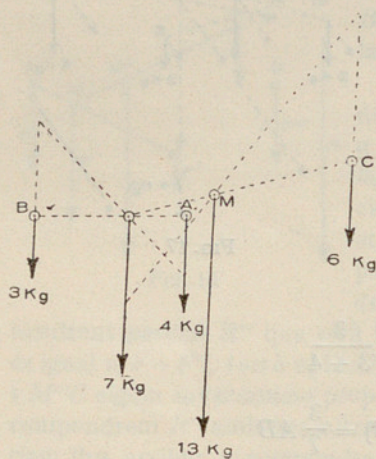


FIG. 18

Per trobar les diverses resultants parcials ens hauríem pogut valer del mètode gràfic explicat en el n.º 8.

Exemple 2. Trobar el centre de forces paral·leles corresponent a tres forces paral·leles aplicades en els punts A , B i C d'un cos sòlid (fig. 18), les intensitats respectives de les quals són 4 kg., 3 kg. i 6 kg.

Com que el CENTRE DE FORCES PARAL·LELES és independent de la orientació de les forces podrem suposar-les situades en el pla determinat pels tres punts A , B , C que serà el pla del dibuix.

Seguint el mètode gràfic (n.º 8), arribariem fàcilment a determinar el punt M com veiem en la figura. Podríem també haver seguit el mètode analític com hem fet en l'exemple anterior.

CENTRE DE GRAVETAT

16. **Definició de centre de gravetat.** Els cossos estan sotmesos per part de la terra a una atracció que afecta totes ses parts per petites que siguin. Aquesta atracció és anomenada **gravetat**.

Si suspenem (fig. 19) un cos M per mitjà d'una corda o fil al cap d'un cert temps el sistema corda i cos quedarà en equilibri i la corda pendrà la direcció vertical (plomada). La força que fa la corda (tensió) és igual i contrària a l'acció de la gravetat sobre el cos, ço que evidencia que aquesta acció equival a una força que té la direcció de la vertical i el sentit de dalt a baix. Aquesta força constitueix el **pes** del cos i la mesurem en quilos. Per petites

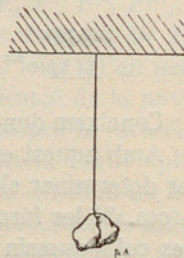


FIG. 19

que siguin les dimensions del cos té lloc ço que havem exposat: el seu pes serà vertical i el sentit de dalt a baix, per tant, el pes d'un punt material tindrà la direcció vertical i el sentit de dalt a baix.

Assimilant un cos sòlid a un sistema invariable de punts materials, cada un d'aquests punts tindrà el seu pes corresponent i el pes del cos serà la resultant dels pesos dels punts materials que el componen. Ara bé, els pesos dels dits punts materials, per ésser tots verticals i del mateix sentit, formen un sistema de forces paral·leles al qual podem aplicar el que havem dit en el n.º 14. Certament que en aquest cas no podem variar la direcció dels pesos dels punts materials que componen el cos, com hem suposat que tîem per arribar a la noció del centre de forces paral·leles; el que sí podem fer és variar la posició del cos fent-lo girar de diferents maneres, ço que equival a fer variar les direccions dels pesos dels punts materials respecte del cos considerat. En aquest cas, el centre de forces paral·leles corresponent als pesos dels punts materials que componen el sòlid és anomenat **centre de gravetat**. Sigui qualsevol la posició del cos, el seu pes, que és precisament la resultant del sistema de forces paral·leles corresponents als pesos dels seus punts materials, serà vertical i passarà pel **centre de gravetat** del cos, podent-se considerar aquest punt com son punt d'aplicació.

Un cos suspès d'un fil es col·locarà de manera que la direcció vertical del fil passi pel centre de gravetat del cos. Si un cos que pot bascular, com indica la fig. 20, està en equilibri, tindrà son centre de gravetat G en el pla vertical que passa per l'aresta AB .

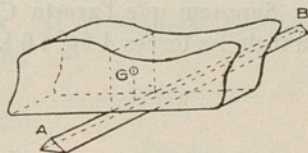


FIG. 20

17. Si en lloc d'un cos consideréssim un conjunt de cossos, lligats entre ells invariablement, trobaríem el centre de gravetat del seu conjunt buscant el centre de forces paral·leles corresponents als pesos de cada un dels cossos que formen el conjunt considerat.

Exemple 1: Trobar el centre de gravetat del conjunt format per dos cossos d'igual pes P que tenen els centres de gravetat respectius en A i B (fig. 21).

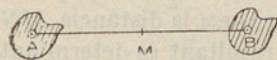


FIG. 21

Segons havem vist, la resultant de les dues forces (en aquest cas pesos) és igual a la suma d'ambdós pesos i el seu punt d'aplicació M ha de

dividir la recta AB en dues parts inversament proporcionals a aquests pesos:

per tant tindrem
$$\frac{AM}{MB} = \frac{P}{P}$$

d'on
$$AM = MB$$

i per tant M és el punt mitjà de AB . Aquest punt M és el centre de gravetat del conjunt dels dos cossos considerats.

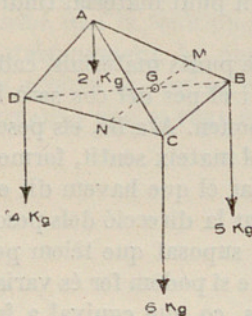


FIG. 22

Exemple 2: Els centres de gravetat de quatre cossos els pesos dels quals són 2 kg., 5 kg., 6 kg. i 4 kg. són els quatre vèrtexs del tetràedre $ABCD$ (fig. 22). Trobar el centre de gravetat del seu conjunt.

Segons havem dit abans cal trobar el centre de les forces paral·leles 2 kg., 5 kg., 6 kg. i 4 kg., i seguirem la marxa de l'exemple del n.º 15. Suposem que la recta AB valgui 5 m. El punt d'aplicació M de la resultant de les forces 2 kg. i 5 kg. és determinat per la relació:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{2}{5}$$

d'on deduïm:

$$\frac{MB}{MA + MB} = \frac{2}{2 + 5} = \frac{2}{7}$$

$$\text{o sigui } MB = \frac{2}{7}(MA + MB) = \frac{2}{7}AB = \frac{2}{7} \times 5 = \frac{10}{7} = 1,43 \text{ m}$$

Suposem que l'aresta CD valgui 4 m. El punt d'aplicació N de la resultant de les forces 4 kg. i 6 kg. és determinat per la relació:

$$\frac{NC}{ND} = \frac{4}{6}$$

d'on resulta

$$\frac{NC}{NC + ND} = \frac{4}{4 + 6}$$

i per tant

$$NC = \frac{4}{10}CD = \frac{4}{10} \times 4 = 1,6 \text{ m}$$

Ara anem a buscar el punt d'aplicació de les forces aplicades en els punts M i N que valen respectivament 7 kg. i 10 kg. MESURAREM la distància MN i suposem que valgui 6 m. El punt G d'aplicació de la resultant és determinat per la relació:

$$\frac{GM}{GN} = \frac{10}{7}$$

d'on

$$\frac{GM}{MN} = \frac{10}{17}$$

i, per tant:

$$GM = \frac{10}{17}MN = \frac{10}{17}6 = 3,53 \text{ m}$$

Coneixem doncs la posició del punt G que es el centre de gravetat buscada. De manera anàloga operariem en altres casos.

Hauríem pogut procedir gràficament en les composicions parcials aplicant el mètode del n.º 8.

CENTRES DE GRAVETAT DELS COSSOS GEOMÈTRICS

18. La noció del centre de gravetat es fa extensiva als sòlids geomètrics, materialitzant-los, o sigui convertint-los en sòlids materials homogenis, que són aquells els punts materials dels quals són iguals i estan uniformement distribuïdes en el volum ocupat pel sòlid considerat.

Anàlogament es fa extensiva la noció del centre de gravetat a les superfícies i línies geomètriques materialitzant-les, o sigui imaginant que els punts geomètrics que les formen es converteixen en punts materials iguals i uniformement distribuïts. Un filferro dóna idea de la materialització de una línia i un full de paper o de llauana d'una superfície.

Anem a fer aplicació del que havem dit a alguns exemples.

CENTRE DE GRAVETAT DE LÍNIES

19. Centre de gravetat d'un segment de recta. Si el segment rectilini és el AB (fig. 23) son centre de gravetat es troba evidentment en son punt mitjà M .

20. Centre de gravetat d'una línia poligonal. Sigui la línia poligonal $ABCD$ (fig. 24). Els centres de gravetat de les rectes AB , CB i CD es troben en sos punts mitjans respectius M , M' i M'' . Per trobar el centre de gravetat del conjunt ens valdrem de les consideracions següents. Si materialitzem les línies considerades, com que els seus pesos seran evidentment proporcionals a les longituds respectives de les dites línies, i en la investigació del centre de forces paral·leles es poden substituir les forces per magnituds a elles proporcionals (n.º 15) substituïrem els pesos per les longituds l , l' i l'' de les línies AB , CB i CD i operarem com si les forces aplicades en els punts M , M' i M'' valguessin l , l' i l'' . Seguirem la marxa de l'exemple del n.º 15 sense fixar les direccions

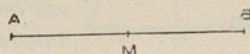


FIG. 23

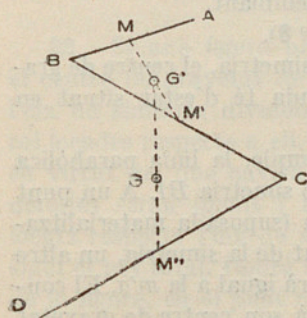


FIG. 24

de les forces l , l' i l'' , ja que sabem que el centre de forces paral·leles és independent d'elles. La resultant de les forces l i l' aplicades als punts M i M' , val $(l+l')$ i és aplicada al punt G' determinat per la relació:

$$\frac{MG'}{G'M'} = \frac{l'}{l}$$

d'on

$$\frac{MG'}{G'M' + MG'} = \frac{l'}{l+l'}$$

i, per tant

$$MG' = MM' \frac{l'}{l+l'}$$

Si la distància MM' (que sempre podem conèixer ja que coneixem la línia poligonal) val d , tindrem:

$$MG' = \frac{d \times l'}{l+l'}$$

Per trobar la resultant de les forces $(l+l')$ i l'' operarem d'una manera anàloga a l'anterior i essent G el punt d'aplicació de la resultant buscada tindrem

$$\frac{GM''}{GG'} = \frac{l+l'}{l''} \quad \frac{GM''}{GM'' + GG'} = \frac{l+l'}{l+l'+l''}$$

d'on

$$GM'' = G'M'' \frac{l+l'}{l+l'+l''}$$

Fòrmula que dóna la posició del punt G , ja que la distància $G'M''$ sempre la podem calcular coneixent la situació dels punts G' i M'' .

El punt G és el centre de gravetat buscat. Si la línia poligonal, plana o no, tingüés més costats operariem d'una manera semblant.

Hauriem també pogut procedir gràficament (n.º 8).

21. Si una línia poligonal o corba té un eix de simetria, el centre de gravetat de la línia considerada té d'estar situat en aquest eix.

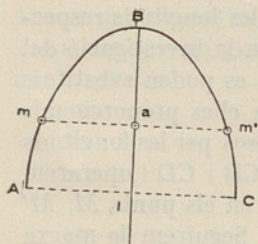


FIG. 25

En efecte, sigui per exemple, la línia parabòlica ABC (fig. 25) que té l'eix de simetria BI . A un punt material m de la dita línia (suposada materialitzada) li correspondrà, en virtut de la simetria, un altre punt m' , i la distància ma serà igual a la $m'a$. El conjunt de punts m i m' tindrà son centre de gravetat en el punt mitjà a de la recta mm' normal a BI i

està sobre l'eix de simetria (ja que els punts materials són d'igual pes). Resulta d'això que podrem distribuir tots els punts de la línia ABC en grups d'un parell de punts cada un d'ells; els centres de gravetat de cada un de dits grups es trobarà sobre l'eix de simetria, per tant el centre de gravetat dels dits centres de gravetat parcials, que és el centre de gravetat de la línia, també es trobarà sobre l'eix, com volíem demostrar.

Si hi ha dos eixos de simetria el centre de gravetat, que ha de trobar-se sobre cada un d'ells, es trobarà en la seva intersecció.

Si el cos té un centre de simetria, el centre de gravetat coincidirà amb ell, ja que podrem disposar els punts materials que componen la línia en grups de dos punts cada un simètricament col·locats respecte a dit centre, però com que cada parell de punts tindrà son centre de gravetat en el punt mitjà de la seva distància o sigui en el centre de simetria, i això tindrà lloc per tots els grups, el centre de gravetat total coincidirà amb el centre de simetria.

Així si el contorn poligonal és un rectangle o un quadrat, el seu centre de gravetat serà el centre de simetria. Si la línia corba és una circumferència o una el·lipse, el seu centre de figura o de simetria serà el centre de gravetat.

En els polígons regulars els seus eixos de simetria passen pel centre de la circumferència inscrita al polígon; el centre de la dita circumferència serà, doncs, el centre de gravetat del polígon regular que es consideri.

En un triangle isòsceles l'altura AI (fig. 26) és un eix de simetria sobre el qual es trobarà el centre de gravetat del seu perímetre.

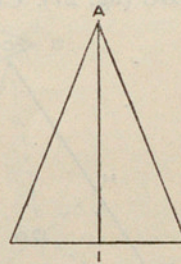


Fig. 26

CENTRES DE GRAVETAT DE SUPERFÍCIES PLANES

22. Si una figura plana té un eix de simetria, allà es trobarà situat el centre de gravetat de la superfície de la figura considerada. En efecte, l'eix de simetria divideix la figura en dues parts iguals i simètricament col·locades respecte a ell. En suposar materialitzada la superfície resultarà, en virtut del que havem dit, que els pesos de les dues parts abans considerades seran iguals i tindran sos punts d'aplicació simètricament col·locats respecte l'eix de simetria. La resultant dels dos pesos anteriors, o sigui el pes total, tindrà son punt d'aplicació, que és el centre de gravetat de la figura, en el punt mitjà dels punts d'aplicació dels dos pesos parcials considerats i per tant en l'eix de simetria, ja que aqueixos punts són simètrics respecte al dit eix.

Si hi ha dos eixos de simetria la intersecció llur determina el centre de gravetat.

Si hi ha un centre de simetria podrem agrupar els punts materials constitutius de la superfície al materialitzar-la, en grups d'un parell de punts simètricament situats respecte a dit centre; cada grup tindrà, per tant, son centre de gravetat en el centre de simetria; el centre de gravetat del conjunt dels grups o sigui de la superfície de la figura, estarà també en coincidència amb el dit centre de simetria, com volíem demostrar.

23. El cercle, el rectangle i el quadrat tenen centre de simetria o centre de figura que serà el centre de gravetat de ses superfícies. El mateix seria en la superfície d'una *el·lipse* que, com sabem, té centre.

Les superfícies dels **polígons regulars** tenen son centre de gravetat en el centre de la circumferència a ells circumscrita, ja que els seus eixos de simetria passen pel dit centre.

24. Centre de gravetat del triangle. Considerem un triangle qualsevol ABC (fig. 27). Unim el vèrtex C amb el punt mitjà D del costat AB i ob-

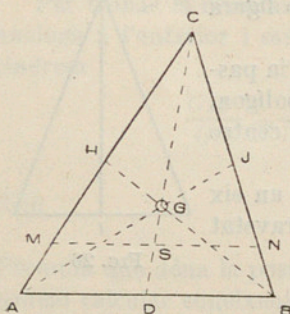


FIG. 27

tindrem la mitjana CD . En suposar materialitzada la superfície del triangle, una línia material qualsevol paral·lela a la base AB del triangle, per exemple la MN , tindrà son centre de gravetat en son punt mitjà S que està situat sobre la mitjana CD . Cada una de les línies materials paral·leles a la AB i que constitueixen la superfície del triangle tindrà, doncs, son centre de gravetat col·locat sobre la mitjana CD ; per tant, el centre de gravetat total estarà també col·locat sobre la mitjana considerada, ja que el dit centre de gravetat és el centre de gravetat dels centres de gravetat parcials anteriorment considerats els quals es troben tots sobre la dita mitjana.

Per anàlogues raons el centre de gravetat de la superfície del triangle es trobarà sobre les altres mitjanes BH i AJ , coincidint, per tant, amb son punt de concurs G . En geometria es demostra que

$$GD = \frac{1}{3} CD.$$

25. Quadrilàter i trapezi. Sigui (fig. 28) el quadrilàter $ABCD$. Traçem la diagonal AD i la superfície del quadrilàter quedarà dividida en dos triangles ABD i ACD els centres de gravetat dels quals es trobaran en els

punts M i N que corresponen a les terceres parts MH i NH de les respectives mitjanes BH i CH . En materialitzar la superfície del quadrilàter $ABCD$, els pesos dels triangles ABD i ACD que el componen seran aplicats, en virtut del què havem dit abans, als punts M i N i seran proporcionals a les àrees dels dits triangles. El centre de gravetat de la superfície del quadrilàter serà el punt d'aplicació de la resultant dels dos pesos concentrats en els punts M i N .

El punt G d'aplicació de la dita resultant divideix la recta MN en dues parts inversament proporcionals a aquests pesos i, per tant, a les àrees dels triangles ABD i ACD , que ja hem dit que els eren proporcionals. Com que els triangles ABD i ACD tenen la mateixa base AD , ses àrees seran

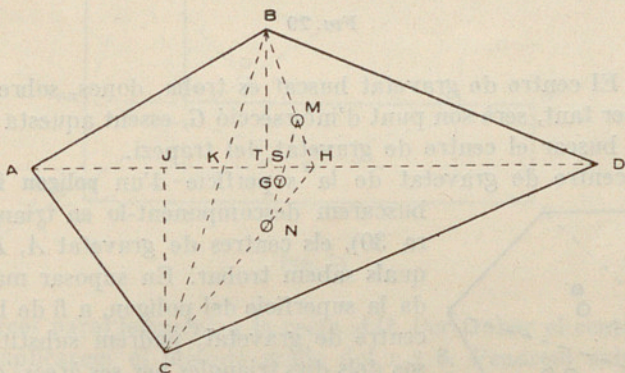


FIG. 28

proporcionals a les altures BT i CJ ; aquestes altures són proporcionals a les distàncies BK i CK (essent BC la segona diagonal del quadrilàter), en virtut de la semblança dels triangles BTK i CJK ; les distàncies BK i CK són proporcionals a les MS i SN , per ésser parts de les paral·leles BC i MN tallades per les secants HB , HK i HC .

En resum, les dues parts en què el punt G divideix la recta MN estan en raó inversa de les parts MS i SN de la dita recta; per tant, el punt G es trobarà del punt N a una distància igual a SM o bé a una distància del punt M igual a SN ; essent aquesta la manera de trobar d'una manera fàcil el centre de gravetat de la superfície d'un quadrilàter.

Considerem ara el trapezi $ABCD$ (fig. 29). Tirem la diagonal AC i tindrem dividit el trapezi en dos triangles ABC i ACD els centres de gravetat dels quals seran els punts S i T , que sabem trobar pel que havem dit en el n.º 24. En materialitzar la superfície del trapezi els pesos dels triangles

anteriors seran aplicats als punts S i T i, per tant, el punt d'aplicació de la seva resultant, que és el centre de gravetat del trapezi, estarà col·locat sobre la recta ST . Unint els punts mitjans M i N dels costats BC i AD del trapezi obtenim la mitjana MN , sobre la qual, per anàlogues raons a les donades en el cas del triangle, ha de trobar-se el centre de gravetat

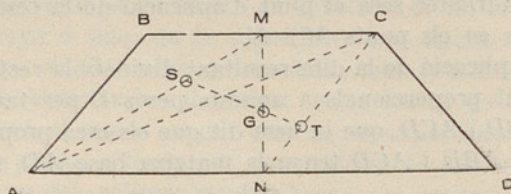


FIG. 29

del trapezi. El centre de gravetat buscat es troba, doncs, sobre les rectes MN i ST ; per tant, serà son punt d'intersecció G , essent aquesta una de les maneres de buscar el centre de gravetat del trapezi.

26. El centre de gravetat de la superfície d'un polígon irregular el

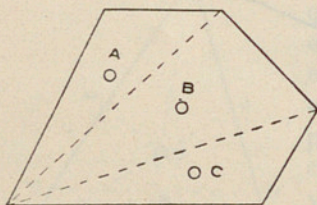


FIG. 30

buscarem descomponent-lo en triangles (figura 30), els centres de gravetat A , B i C dels quals sabem trobar. En suposar materialitzada la superfície del polígon, a fi de buscar son centre de gravetat, podrem substituir els pesos dels dits triangles per ses àrees, que els són proporcionals, i buscar el centre de forces paral·leles corresponent de la manera indicada en els exemples dels nùms. 15 i 17.

27. Sempre que la figura plana sigui descomponible en figures el centre de gravetat de les quals sigui conegut podrem trobar el centre de gravetat de la superfície de la figura considerada. Per aconseguir-ho, operarem la dita descomposició i buscarem els centres de gravetat parcials corresponents. Suposarem aplicats als dits centres de gravetat parcials forces paral·leles d'intensitats iguals o proporcional a les àrees de les figures parcials corresponents i el centre d'aquestes forces paral·leles serà el centre de gravetat buscat. Trobarem el dit centre de forces paral·leles seguint els mètodes generals abans explicats (nùms. 15 i 17).

28. Exemple 1. Trobar el centre de gravetat de la superfície de la figura plana de la fig. 31 en la qual tots els angles són rectes i $BC = DE$.

La dividirem en els dos rectangles $MNCB$ i $MDEA$, els centres de gravetat dels quals són respectivament punts P i Q . Per trobar el centre

de gravetat del conjunt aplicarem als punts P i Q dues forces paral·leles les intensitats de les quals siguin proporcionals a les àrees dels rectangles considerats. Com que els costats BC i DE són iguals, les dites àrees seran proporcionals als costats BM i MD . Per tant, podrem pendre les forces aplicades als punts P i Q iguals a les rectes BM i MD , i també pendre

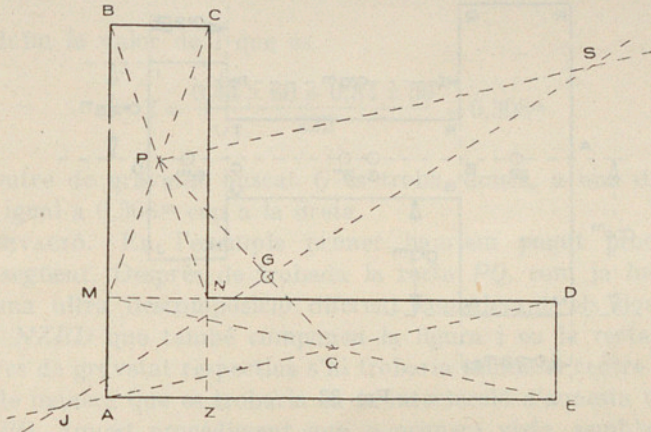


FIG. 31

les dites forces paral·lelament a la recta AD . Per trobar el centre de forces paral·leles aplicarem el mètode gràfic del n.º 8. Pendrem sobre la recta AD una longitud QJ igual a BM i sobre la paral·lela PS a la recta AD , una longitud PS igual a MD i unint els punts S i J , la recta SJ tallarà la recta PQ en el punt G que és el centre de gravetat buscada.

També hauríem pogut seguir el mètode analític (n.º 15).

Exemple 2. Trobar el centre de gravetat de la superfície representada en la fig. 32.

Per ésser $AB = AE$ i $BC = ED$ la figura té l'eix de simetria AO . Com en l'exemple anterior, el centre de gravetat s'ha de trobar en la recta PQ , i com també ha d'estar en l'eix de simetria AO , es trobarà en el punt G de la intersecció llur.

Exemple 3. Trobar el centre de gravetat de la superfície de la figura plana di-

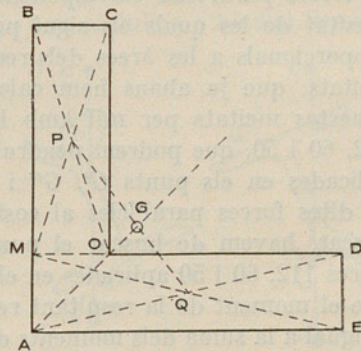


FIG. 32

buixada i acotada en la fig. 33. La figura té l'eix de simetria AD sobre el qual s'ha de trobar el centre de gravetat que busquem.

Per trobar la seva situació dividirem la superfície de la figura en els tres rectangles $MNPQ$, $RSTU$ i $LIHJ$ els centres de gravetat dels quals són respectivament els punts mitjans G' , G'' i G''' de les rectes AB , BC i CD .

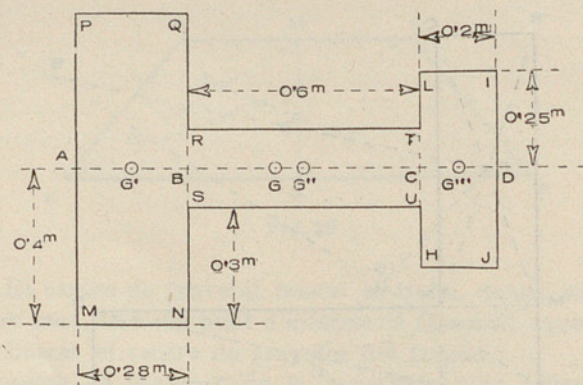


Fig. 33

Les distàncies dels punts G''' i G'' al punt G' són respectivament $0,84\text{m}$ i $0,44\text{m}$.

Les meitats de les àrees dels rectangles $MNPQ$, $RSTU$ i $LIHJ$ són respectivament $0,112\text{m}^2$, $0,06\text{m}^2$ i $0,05\text{m}^2$.

En suposar materialitzada la superfície considerada a fi de buscar son centre de gravetat, els pesos dels rectangles en què l'havem dividit seran aplicats respectivament als punts G' , G'' i G''' , i en buscar el centre de forces paral·leles corresponent, els podrem substituir per forces la intensitat de les quals els sigui proporcional. Com que els dits pesos són proporcionals a les àrees dels rectangles respectius, també ho seran a ses meitats, que ja abans hem calculat, i també al resultat de multiplicar aquestes meitats per mil amb la qual cosa resulten els números enters 112, 60 i 50, que podrem pendre com a intensitats de les forces paral·leles aplicades en els punts G' , G'' i G''' ; demés podrem pendre les direccions de dites forces paral·leles al costat MP . Per tenir el centre de gravetat buscat, havem de buscar el punt d'aplicació de la resultant de les tres forces 112, 60 i 50 aplicades en els punts G' , G'' i G''' . Per això recordarem que el moment de la resultant respecte a un centre de moments qualsevol és igual a la suma dels moments de les forces components respecte al mateix punt. A fi de simplificar pendrem per centre de moments el punt G' , amb

la qual cosa el moment de la força a ell aplicada serà zero, i tenint en compte que els braços de palanca de les forces aplicades als punts G'' i G''' valen 0,44 i 0,84, i representant per l el braç de palanca de la resultant $112 + 60 + 50 = 222$ tindrem:

$$l \times 222 = 0,44 \times 60 + 0,84 \times 50$$

d'on deduïm la valor de l que és

$$l = \frac{0,44 \times 60 + 0,84 \times 50}{222} = 0,308^m$$

El centre de gravetat buscat G es troba, doncs, a una distància del punt G' igual a $0,308^m$ cap a la dreta.

OBSERVACIÓ. En l'exemple primer hauriem pogut procedir de la manera següent. Després de trobada la recta PQ , com ja hem explicat, operar una altra descomposició diferent considerant els dos rectangles $ABCZ$ i $NZED$ que també componen la figura i en la recta que uniria sos centres de gravetat respectius s'hi trobaria també el centre de gravetat buscat, de manera que es trobaria en la intersecció d'aquesta última recta amb la PQ . Aquest procediment que, a primera vista, sembla millor que el precedent, té l'inconvenient que les dues rectes considerades es tallen molt obliquament i determinen en molt males condicions son punt d'intersecció, essent per tant millor l'altre mètode.

29. Correntment en la pràctica industrial es presenta el cas de buscar centres de gravetat de superfícies planes la forma de les quals (per exemple els perfils de biguetes, rails...) és difícilment substituïble per figures que puguin ésser descompostes en altres de centres de gravetat coneguts, a fi de poder aplicar el mètode dels exemples del n.º 27. En aquest cas operarem experimentalment de la manera següent. En una cartolina o bé una llaua, ben homogènia, dibuixarem a la mida del natural o bé a una certa escala, la figura considerada i la retallarem després amb unes estisores. Suposem, per exemple, que la superfície retallada és la de la fig. 34.

Pendrem un mateix punt de suspensió C del que partiran un fil per suspendre la plantilla i una plomada. Suspendrem la plantilla per un punt A (per mitjà d'un petit foradet) i la plomada AP marcarà sobre la plantilla la recta AM que dibuixarem. Re-

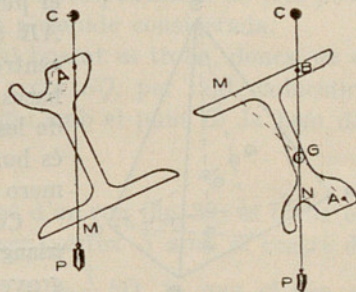


Fig. 34

petirem l'operació amb un altre punt B de la plantilla. El punt G d'intersecció de les dues rectes dibuixades AM i BN és el centre de gravetat buscant. Aquest mètode tan senzill i demés tan pràctic, dona resultats sempre suficientment aproximats i àdhuc és aconsellable en els casos en què es pugui operar analíticament, puix que, donant exactitud suficient, estalvia de vegades molt de temps, essent per tant preferible en aquests casos.

CENTRES DE GRAVETAT DE SÒLIDS

30. Consideracions anàlogues a les fetes en els nùms. **21** i **22** ens demostrarien que si el sòlid té un centre de simetria és el dit punt son centre de gravetat. Així, l'esfera, el cub..., tenen per centre de gravetat el centre de figura o simetria.

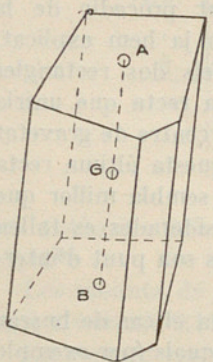


FIG. 35

31. Centres de gravetat del prisme, cilindre, piràmide i con. Considerem el prisma de la fig. 35. Siguin A i B els centres de gravetat de les dues bases iguals i paral·leles, que sabem buscar com hem explicat (nùms. **25** a **28**). Totes les seccions del prisma fetes paral·lelament a les bases són iguals a elles i, per tant, els centres de gravetat de les dites seccions estaran col·locats sobre la recta AB , el punt mitjà de la qual G serà el centre de gravetat del prisma, ja que el podem suposar format per la superposició de superfícies materials iguals a sa base.

Iguals consideracions a les fetes en el cas del prisma fan pensar que un cilindre de bases qualsevol i paral·leles té son centre de gravetat en el punt G mitjà de la recta

AB (fig. 36) que uneix els centres de gravetat de ses bases. El centre de gravetat de les bases si no és conegut és buscant pel mètode del número **28**.

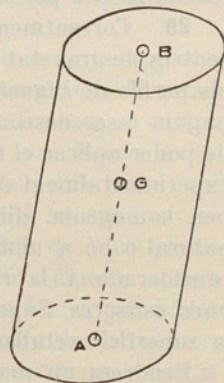


FIG. 36

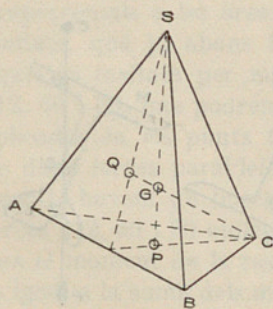


FIG. 37

Considerem la piràmide triangular $SABC$ (fig. 37); busquem el centre de gravetat P de la base triangular ABC i unim-lo amb el vèrtex S . Totes les seccions de la pirà-

mide fetes paral·lelament a la base, són triangles semblants al ABC i els seus centres de gravetat estan situats sobre la recta SP ; per tant, el centre de gravetat de la piràmide estarà en la recta SP , ja que la piràmide es pot suposar constituïda per les dites seccions materialitzades.

Considerant com a base la cara ASB , per les mateixes raons anteriors, el centre de gravetat de la piràmide ha d'estar situat en la recta CQ .

El centre de gravetat de la piràmide triangular serà, doncs, el punt G intersecció de les rectes CQ i SP , en les quals hem demostrat que devia d'estar situat. Demuestra la Geometria que el punt G està a una distància GP del punt P que val la *quarta part* de la distància SP .

Considerem ara una piràmide de base qualsevol (fig. 38). Sigui Q el centre de gravetat de la base $ABCDE$ i unim dit punt amb el vèrtex S . Totes les seccions de la piràmide fetes per planes paral·leles a la base són semblants a la dita base i, per tant, els seus centres de gravetat es situaran en la recta SQ ; per consegüent, el centre de gravetat de la piràmide estarà situat en la mateixa recta SQ , ja que poden suposar que la piràmide està constituïda per les dites seccions materialitzades.

La piràmide considerada es pot descompondre en les tres piràmides triangulars $SABE$, $SBCE$ i $SCDE$, els centres de gravetat respectius de les quals estan col·locats en un pla paral·lel a la base de la piràmide i que talla la recta SQ en un punt G tal

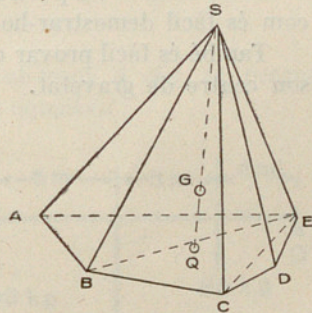


FIG. 38

$$\text{que } GQ = \frac{1}{4} SQ.$$

El centre de gravetat de la piràmide estarà col·locat en el pla anterior, ja que aquest pla conté els centres de gravetat parcials corresponents a les tres piràmides que componen la piràmide considerada.

El centre de gravetat buscat es troba, doncs, en el dit pla i també en la recta SQ ; per tant, coincidirà amb sa intersecció, o sigui amb el punt G . Ja hem dit que $GQ = \frac{1}{4} SQ$.

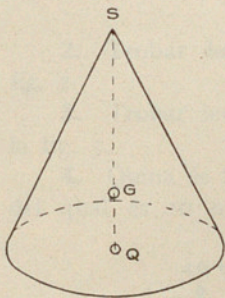


FIG. 39

El centre de gravetat d'un con (fig. 39) es troba en la recta que uneix el seu vèrtex S amb el centre de gravetat Q de sa base i de tal manera que $GQ = \frac{1}{4} SQ$, ja que el con es

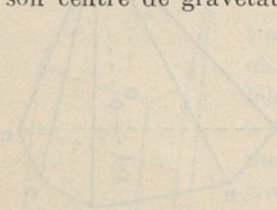
pot considerar com el límit d'una piràmide d'infinít nombre de cares laterals.

32. Quan un sòlid es pot descompondre en sòlids parcials de centres de gravetat coneguts, trobarem son centre de gravetat buscant el centre de forces paral·leles corresponents als pesos dels sòlids parcials (n.º 17).

Podem trobar experimentalment el centre de gravetat d'un sòlid qualsevol de la manera següent. Suspenem el cos considerat d'un punt fix per mitjà d'una corda (o un fil) fixada en un punt d'ell i suposem prolongada la corda segons una recta en l'interior del cos. Repetim la mateixa cosa fixant la corda en un altre punt del cos. Les dues rectes trobades donen per sa intersecció el centre de gravetat buscant.

Si un sòlid té un pla de simetria, s'hi troba situat son centre de gravetat com és fàcil demostrar-ho per raonaments anàlegs als usats anteriorment.

També és fàcil provar que si un sòlid té un eix de simetria, allà es troba son centre de gravetat.



MECÀNICA

SEGONA PART

PROBLEMES

1. Quina força vertical haurem d'aplicar al punt *A* (fig. 1) perquè, essent paral·lela a les altres, el sistema estigui en equilibri?

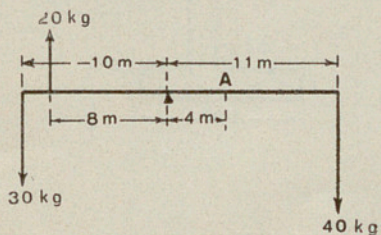


FIG. 1

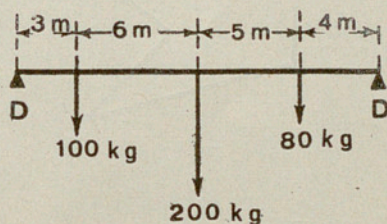


FIG. 2

2. Trobar les reaccions dels descansos al sistema representat a la fig. 2.

3. Trobar les reaccions dels descansos *DD* al sistema representat a la fig. 3.

4. Quina és la intensitat de les forces d'un parell el braç de palanca del qual és 10 m, essent 42 kgm el seu moment?

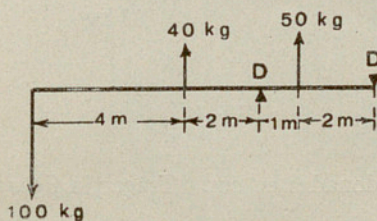


FIG. 3

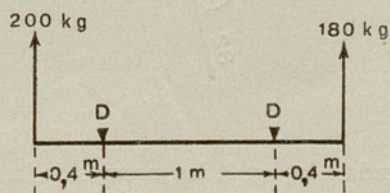


FIG. 4

5. Trobar les reaccions dels descansos al sistema representat a la fig. 4.
6. Trobar les reaccions dels descansos en el cas de la fig. 5.

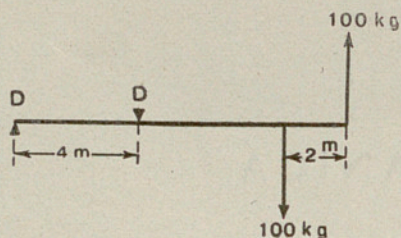


FIG. 5

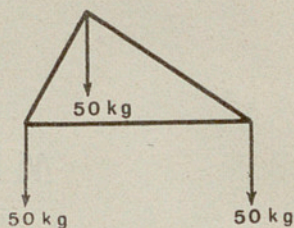


FIG. 6

7. Cercar la distància a què es troba el punt o aplicació de la resultant del sistema de forces representat a la fig. 6 del centre de gravetat del triangle.

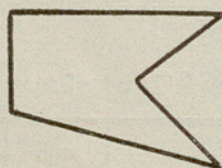


FIG. 7

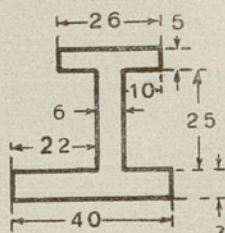


FIG. 8

8. Explicar com és cercat el centre de gravetat d'una superfície com la representada a la fig. 7.

9. Trobar gràficament el centre de gravetat de la superfície represen-

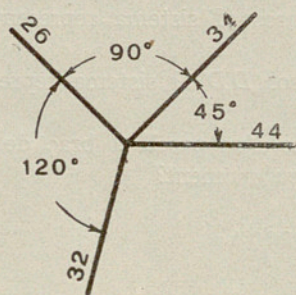


FIG. 9

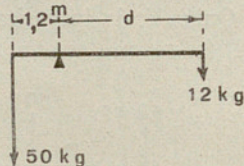


FIG. 10

tada a la fig. 8, les mesures de la qual són donades en cm. Traçar la figura a l'escala de $\frac{1}{5}$.

10. Trobar gràficament el centre de gravetat del conjunt de les rectes indicades a la fig. 9, les longituds de les quals són donades en m.

11. On és situat el centre de gravetat d'un triangle?

12. Trobar el centre de gravetat del sistema format per dues esferes, una de fusta i l'altra de ferro, de 30 i 20 cm de diàmetre respectivament,

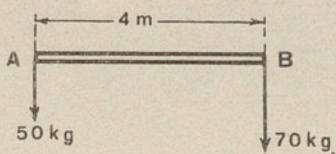


FIG. 11

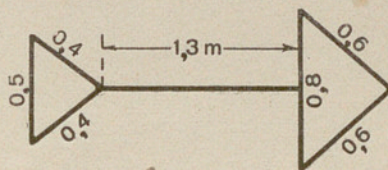


FIG. 12

situades a 2 m de distància entre els seus centres; la densitat del ferro és 7,8, la de la fusta 0,68.

13. Quina haurà d'ésser la distància d perquè el sistema representat a la fig. 10 estigui en equilibri?

14. Per quin punt s'haurà de suspendre la biga AB (fig. 11), que pesa 16 kg per metre, perquè estigui en equilibri? Resoldre el problema analíticament i gràficament.

15. Què entenem per moment d'una força respecte a un punt?

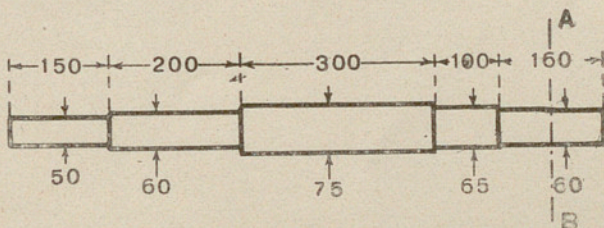


FIG. 13

16. Quin és, en quilogràmetres, el moment d'una força de 800 g respecte a un punt que dista 140 cm de la recta que representa la força?

17. Què entenem per braç de palanca d'un moment?

18. Quin és el braç de palanca d'una força de 35 kg, el moment de la qual és de 49 kgm?

19. Trobar analíticament el centre de gravetat del sistema format per les dues superfícies triangulars representades a la fig. 12, les mides de les quals són donades en m.

20. Trobar el centre de gravetat de l'arbre representat a la fig. 13, les mides del qual són donades en mm, que a un extrem porta una politja de 100 kg; la línia AB representa el pla de càrrega de la politja.

RF-5-27

